

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

Autor(en): **Laisant, C.-A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4650>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ments étant rangés dans chaque terme de Δ suivant l'ordre des lignes, et m étant de même parité que le nombre des *inversions* de la permutation d'indices $p, q \dots s$: il suffit, en effet, d'admettre cette règle de formation du multiplicateur $(-1)^m$ pour l'ordre $n - 1$, et de l'appliquer dans (1) aux α_i qui sont de cet ordre, pour l'établir aussitôt relativement à l'ordre n .

M. LELIEUVRE (Caen).

TRANSFORMATION

DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

Plusieurs correspondants m'ont manifesté le désir de connaître des formules simples permettant de passer d'un triangle de référence à un autre (ou d'un tétraèdre à un autre) en coordonnées homogènes trilinéaires ou tétraédriques. La question, en ce qui concerne les coordonnées barycentriques, est d'une telle simplicité que je la crois classique ; mais par cela même qu'elle a été posée, c'est qu'il peut y avoir un intérêt à faire connaître une réponse. C'est cette seule considération qui m'engage à publier la présente Note, où j'emploie les vecteurs pour l'établissement des formules dont il s'agit. Il est facile de voir qu'on y parviendrait aussi, mais moins rapidement, par l'emploi pur et simple des coordonnées cartésiennes.

Je me borne au cas des coordonnées trilinéaires, l'extension à l'espace (coordonnées tétraédriques) étant toute naturelle.

Soient : ABC un triangle de référence ; x, y, z les coordonnées barycentriques d'un point M par rapport à ABC ; A_1, A_2, A_3 un second triangle donné. Il s'agit de trouver les coordonnées x', y', z' de M par rapport à ce second triangle de référence.

Appelons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les coordonnées de A_1 ; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ celles de A_2 ; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ celles de A_3 par rapport à ABC ; et supposons qu'on ait :

$$x + y + z = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 1,$$

ce qui est toujours permis, puisque les coordonnées sont homogènes.

En prenant une origine commune quelconque O, et appelant A, B, ... les vecteurs OA, OB, ... on a les relations

$$M = xA + yB + zC,$$

$$A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C,$$

$$A_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C,$$

$$A_3 = \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C.$$

Éliminons A, B, C entre ces quatre équations linéaires, et il vient

$$\begin{vmatrix} M & x & y & z \\ A_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ A_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$M \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - A_1 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - A_3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = A_1 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} + A_3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Les coordonnées barycentriques de M par rapport au triangle de référence $A_1 A_2 A_3$ sont donc, comme il s'agit de coordonnées homogènes,

$$x' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad y' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}, \quad z' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

On peut aussi écrire, et peut-être de préférence

$$x' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad y' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad z' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Comme application très simple, supposons que A_1, A_2, A_3 , soient les centres des cercles exinscrits au triangle ABC; alors

$\alpha_1 = \frac{-a}{2(p-a)}$, $\beta_1 = \frac{b}{2(p-a)}$, $\gamma_1 = \frac{c}{2(p-a)}$, ... et l'on obtient

$$x' = \frac{1}{4(p-b)(p-c)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = \frac{a}{2(p-b)(p-c)} (cy + bz), \dots$$

ou, plus simplement, en remplaçant ces résultats par des quantités proportionnelles,

$$x' = (p-a) \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right),$$

$$y' = (p-b) \left(\frac{z}{c} + \frac{x}{a} \right),$$

$$z' = (p-c) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

On pourrait déduire par exemple de là l'équation générale des coniques passant par les centres des trois cercles exinscrits à ABC, et divers autres résultats faciles à obtenir et sur lesquels il nous semble inutile d'insister.

C.-A. LAISANT.

NOTE SUR L'EMPLOI DU SYMBOLE i ,

DANS LA RECHERCHE

DES FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

1. Le rôle important que joue la quantité complexe de la forme $p + qi$ a fait comprendre à ceux qui s'occupent d'enseignement que l'étude de ces quantités devait se faire par le jeune mathématicien dès le début de ses études. Aussi leur étude est déjà inscrite depuis longtemps au programme des cours de mathématiques spéciales.

On sait que l'on peut mettre une telle quantité sous la forme $r(\cos a + i \sin a)$, r étant son module, a son argument. On con-