$A - (b - r^2) = m_1 . m_2$, en procédant comme dans (4). En outre $x_1 > 1$, et l'irrationnelle $\frac{\sqrt{A} + b - r}{m_2}$ est de la forme y ou y', car m_1 et m_2 sont inférieurs $\sqrt{A} + b - r$.

Le développement de t_3 entraîne

$$t_2 = l' + \frac{\sqrt{A} + (b - r')}{m_1} = l' + \frac{1}{x_1'}.$$

Ici encore, il est facile de voir que l'irrationnelle x_1 est de la forme y ou y'. D'où il suit que :

Les irrationnelles t_1, t_2, t_3 t_4, se développent en fractions continues périodiques mixtes, plus petites ou plus grandes que l'unité. La partie irrégulière ne comprend qu'un seul quotient incomplet.

On peut remarquer que, pour deux irrationnelles comme

$$t_2 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}$$

et

$$t_4 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}$$

toutes deux supérieures à l'unité, les parties périodiques sont identiques dès que l'on a 2λ divisible par m_1.

V

Nous avons vu des irrationnelles dépendant de $\lambda^2 < A$. On peut aussi en construire avec $\lambda^2 > A$.

Posons :

$$\lambda^2 - A = n_1 m_1.$$

Il en résulte des valeurs comme :

$$V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1} \tag{13}$$

et

$$V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$$

Ces irrationnelles peuvent être plus grandes ou plus petites que l'unité suivant que les valeurs n_1 et m_1 sont comprises entre $\lambda + \sqrt{A}$ et $\lambda - \sqrt{A}$, ou en dehors de ces valeurs. Les valeurs inférieures à l'unité se ramènent évidemment à l'inverse des valeurs supérieures.

Etudions une de ces dernières, soit : $V_1 > 1$ et

$$V_1 = \frac{\lambda + \sqrt{A}}{n_1}.$$

On a :

$$V_1 = \frac{\lambda + b - r}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b + r_1}{n_1} = p_1 + \frac{(r_1 - b) + \sqrt{A}}{n_1} = p_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Le reste r peut être évidemment plus grand que b.

On a encore :

$$x_1 = \frac{(r_1 - b) - \sqrt{A}}{n_2} = p_2 + \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_2} = \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_3} = p_3 + \frac{1}{x_3}$$

. . . .

car

$$(r_1 - b)^2 - A = n_1 . n_2$$

et

(14) $$(r_k - b)^2 - A = n_k . n_{k+1}.$$

La première formule et la généralisation s'établissent comme pour la formule (4).

Le terme général prend la forme :

$$x_k = \frac{(r_k - b) - \sqrt{A}}{n_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \frac{(r_{k+1} + b) + \sqrt{A}}{n_{k+2}}$$

$$x_{k+2} = \frac{(r_{k+2} - b) - \sqrt{A}}{n_{k+3}}.$$

Il est à remarquer que les valeurs $(r_k - b)$, $(r_{k+1} + b)$ et $(r_{k+2} - b)$ vont en diminuant. En effet :

$$r_{k+1} = r_k - 2b - p_{k+1} . n_{k+1}.$$

Donc

$$r_{k+1} + b = (r_k - b) - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

En outre,

$$r_{k+2} = r_{k+1} + 2b - p_{k+2} \cdot n_{k+2}$$

et

$$r_{k+2} - b = (r_{k+1} + b) - p_{k+2} \cdot n_{k+2}.$$

C. q. f. d.

On arrivera donc une fois à une valeur

$$x_\lambda = \frac{\mathrm{M} + \sqrt{\mathrm{A}}}{n_{\lambda+1}}, \text{ telle que } \mathrm{M} < b.$$

Cette valeur donnera :

$$x_{\lambda+1} = \frac{\sqrt{\mathrm{A}} + (b - r_{\lambda+1})}{n_{\lambda+2}},$$

une irrationnelle de la forme y ou y' qui se développe en fraction continue périodique simple, car $n_{\lambda+1} < 2b$,

$$r_{\lambda+1} < b$$

et

$$x_{\lambda+1} > 1.$$

Le radical $\sqrt{\mathrm{A}}$ dans x_λ ne saurait être négatif, car il entraînerait une irrationnelle négative, ce qui est impossible, et le raisonnement subsiste pour

$$\mathrm{V}_1 = \frac{\lambda - \sqrt{\mathrm{A}}}{n_1}.$$

Il en résulte la loi suivante :

Les irrationnelles de la forme $\mathrm{V}_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{\mathrm{A}}}{n_1}$ *ou* $\mathrm{V}_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{\mathrm{A}}}{m_1}$ *se développant en fractions continues périodiques mixtes; la partie irrégulière a un nombre indéterminé mais limité de quotients incomplets.*

VI

Ces théories appliquées aux racines des équations du 2^e^ degré nous conduisent à une forme nouvelle plus complète du théorème de Lagrange.