

# V

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$A - (b - r^2) = m_1 \cdot m_2$ , en procédant comme dans (4). En outre  $x_1 > 1$ , et l'irrationnelle  $\frac{\sqrt{A} + b - r}{m_2}$  est de la forme  $y$  ou  $y'$ , car  $m_1$  et  $m_2$  sont inférieurs  $\sqrt{A} + b - r$ .

Le développement de  $t_3$  entraîne

$$t_2 = l' + \frac{\sqrt{A} + (b - r')}{m_1} = l' + \frac{1}{x_1'}$$

Ici encore, il est facile de voir que l'irrationnelle  $x_1$  est de la forme  $y$  ou  $y'$ . D'où il suit que :

*Les irrationnelles  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , se développent en fractions continues périodiques mixtes, plus petites ou plus grandes que l'unité. La partie irrégulière ne comprend qu'un seul quotient incomplet.*

On peut remarquer que, pour deux irrationnelles comme

$$t_2 = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}$$

et

$$t_4 = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}$$

toutes deux supérieures à l'unité, les parties périodiques sont identiques dès que l'on a  $2\lambda$  divisible par  $m_1$ .

### V

Nous avons vu des irrationnelles dépendant de  $\lambda^2 < A$ . On peut aussi en construire avec  $\lambda^2 > A$ .

Posons :

$$\lambda^2 - A = n_1 m_1.$$

Il en résulte des valeurs comme :

$$(13) \quad V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1}$$

et

$$V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$$

Ces irrationnelles peuvent être plus grandes ou plus petites que l'unité suivant que les valeurs  $n_1$  et  $m_1$  sont comprises entre  $\lambda + \sqrt{A}$  et  $\lambda - \sqrt{A}$ , ou en dehors de ces valeurs. Les valeurs inférieures à l'unité se ramènent évidemment à l'inverse des valeurs supérieures.

Étudions une de ces dernières, soit :  $V_1 > 1$  et

$$V_1 = \frac{\lambda + \sqrt{A}}{n_1}.$$

On a :

$$V_1 = \frac{\lambda + b - r}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b + r_1}{n_1} = p_1 + \frac{(r_1 - b) + \sqrt{A}}{n_1} = p_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Le reste  $r$  peut être évidemment plus grand que  $b$ .

On a encore :

$$x_1 = \frac{(r_1 - b) - \sqrt{A}}{n_2} = p_2 + \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_2} = \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{(r_2 + b) - \sqrt{A}}{n_3} = p_3 + \frac{1}{x_3}$$

car

$$(r_1 - b)^2 - A = n_1 \cdot n_2$$

et

$$(14) \quad (r_k - b)^2 - A = n_k \cdot n_{k+1}.$$

La première formule et la généralisation s'établissent comme pour la formule (4).

Le terme général prend la forme :

$$x_k = \frac{(r_k - b) - \sqrt{A}}{n_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = \frac{(r_{k+1} + b) + \sqrt{A}}{n_{k+2}}$$

$$x_{k+2} = \frac{(r_{k+2} - b) - \sqrt{A}}{n_{k+3}}.$$

Il est à remarquer que les valeurs  $(r_k - b)$ ,  $(r_{k+1} + b)$  et  $(r_{k+2} - b)$  vont en diminuant. En effet :

$$r_{k+1} = r_k - 2b - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

Donc

$$r_{k+1} + b = (r_k - b) - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

En outre,

$$r_{k+2} = r_{k+1} + 2b - p_{k+2} \cdot n_{k+2}$$

et

$$r_{k+2} - b = (r_{k+1} + b) - p_{k+2} \cdot n_{k+2}.$$

C. q. f. d.

On arrivera donc une fois à une valeur

$$x_\lambda = \frac{M + \sqrt{A}}{n_{\lambda+1}}, \text{ telle que } M < b.$$

Cette valeur donnera :

$$x_{\lambda+1} = \frac{\sqrt{A} + (b - r_{\lambda+1})}{n_{\lambda+2}},$$

une irrationnelle de la forme  $y$  ou  $y'$  qui se développe en fraction continue périodique simple, car  $n_{\lambda+1} < 2b$ ,

$$r_{\lambda+1} < b$$

et

$$x_{\lambda+1} > 1.$$

Le radical  $\sqrt{A}$  dans  $x_\lambda$  ne saurait être négatif, car il entraînerait une irrationnelle négative, ce qui est impossible, et le raisonnement subsiste pour

$$V_1 = \frac{\lambda - \sqrt{A}}{n_1}.$$

Il en résulte la loi suivante :

*Les irrationnelles de la forme  $V_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{n_1}$  ou  $V_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{A}}{m_1}$  se développant en fractions continues périodiques mixtes ; la partie irrégulière a un nombre indéterminé mais limité de quotients incomplets.*

## VI

Ces théories appliquées aux racines des équations du 2<sup>e</sup> degré nous conduisent à une forme nouvelle plus complète du théorème de Lagrange.