

I

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

# NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT

## DE CERTAINES IRRATIONNELLES DE LA FORME

$$\frac{\sqrt{A} + M}{P}$$

EN FRACTIONS CONTINUES

### I

Posons :

$$A - \lambda^2 = n_1 m_1,$$

$\lambda$  étant entier inférieur à  $b$  et le plus grand carré parfait contenu dans  $A$ ,  $n_1$  et  $m_1$  étant entiers, positifs et compris tous deux entre  $(b + \lambda)$  et  $(b - \lambda)$ ; puis développons en fractions continues, les irrationnelles :

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1} = y$$

et

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1} = y'.$$

On peut poser :

$$y = \frac{b + \lambda}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b}{n_1} = k_1 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_1)}{n_1} = k_1 + \frac{1}{x_1};$$

on avait  $y > 1$ , il en résulte  $k_1 \geq 1$  et  $x_1 > 1$ , et ces trois valeurs sont évidemment positives.

Le reste de la première division,  $r_1$  donne :

$$b + \lambda - n_1 k_1 = r_1,$$

et l'on a  $r_1 < n_1$  et  $r_1 > b$ , car si  $n_1 > b$ , on a  $k_1 = 1$  et  $r_1 < b$ . On développe ensuite  $x_1$  de la même manière :

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{n_1 (\sqrt{A} + b - r_1)}{A - (b - r_1)^2} &= \frac{\sqrt{A} + b - r_1}{n_2} = k_2 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_2)}{n_2} \\ &= k_2 + \frac{1}{x_2}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que l'on a eu :

$$A - (b - r_1)^2 = n_1 \{ m_1 - k_1 (n_1 k_1 - 2\lambda) \} = n_1 n_2$$

le facteur  $n_2$  étant positif, d'un autre côté  $x_1 > 1$  entraîne  $k_2 \geq 1$  ;  $r_2 < b$  ; et  $x_2 > 1$ , les valeurs étant évidemment toutes positives.

En continuant, on obtient :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = k_3 + \frac{1}{x_3} = \frac{2b - r_2 - r_3}{n_3} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_3)}{n_3} \\ x_3 = k_4 + \frac{1}{x_4} = \frac{2b - r_3 - r_4}{n_4} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_4)}{n_4} \\ \dots \dots \dots \\ x_{p-1} = k_p + \frac{1}{x_p} = \frac{2b - r_{p-1} - r_p}{n_p} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} ; \end{array} \right.$$

les facteurs  $n$ , sont liés par la relation :

$$(2) \quad A - (b - r_{p-1})^2 = n_{p-1} \cdot n_p.$$

Pour établir la généralité de ces formules, rappelons que l'on avait :  $y > 1$  ;  $k_1 \geq 1$  ;  $x_1 > 1$  ;  $r_1 < n_1$  ;  $r_1 < b$  toutes ces valeurs étant certainement positives ; on avait encore  $A - (b - r_1)^2 = n_1 \cdot n_2$ . Si nous admettons que ces relations subsistent pour les éléments d'indices  $p - 1$ , elles subsistent encore pour les éléments d'indices  $p$ , et elles sont par conséquent générales.

En effet, si nous admettons que l'on ait :

$$A - (b - r_{p-1})^2 = n_{p-1} \cdot n_p$$

avec

$$r_{p-1} < b$$

$$n_{p-1} \text{ positif,}$$

et

$$x_{p-1} > 1,$$

nous aurons

$$(3) \quad x_{p-1} = \frac{n_{p-1} (\sqrt{A} + b - r_{p-1})}{A - (b - r_{p-1})^2} = \frac{\sqrt{A} + b - r_{p-1}}{n_p} = \frac{2b - r_{p-1}}{n_p} + \frac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} = k_p + \frac{1}{x_p}$$

et les valeurs positives :

$$n_p < 2b ; k_p \geq 1 ; x_p > 1 \text{ et } r_p < b.$$

En outre, nous pourrions écrire :

$$(4) \quad A - (b - r_p)^2 = n_p \{ n_{p-1} - k_{p-1} (r_{p-1} - r_p) \} = n_p \cdot n_{p-1}$$

avec

$$n_{p+1} \text{ pos. } < 2b.$$

Puisque les conditions admises étaient vraies pour les termes d'indices 1) et 2), elles sont générales, et la formule (3) donne le terme général du développement; nous pourrions énoncer en outre les remarques suivantes :

a) : Les quotients complets  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , sont positifs et  $> 1$ .

b) : Les quotients incomplets  $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots$ , sont entiers et positifs.

c) : Les diviseurs  $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ , sont entiers, positifs et  $< 2b$ .

d) : Les restes sont tous  $< b$ .

e) : Les restes sont plus petits que le diviseur correspondant et que le diviseur suivant; c'est-à-dire :

$$r_p < n_p$$

et

$$r_p < n_{p+1}$$

car on peut écrire :

$$A - (b - r_p)^2 = n_{p+1} \cdot n_p = n_1 m_1 + r_p (2b - r_p)$$

et

$$n_{p+1} = \frac{n_1 \cdot m_1}{n_p} + r_p \cdot k_p + \frac{r_p \cdot r_{p-1}}{n_p}$$

Donc

$$n_{p+1} > r_p$$

Il en résulte donc que l'on a :

$$(5) \quad y = k_1 + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots$$

C'est une fraction continue illimitée. On obtient un résultat analogue en développant  $y'$ .

## II

Les quotients incomplets sont liés entre eux par une périodicité qui découle des deux théorèmes suivants :