NOTE SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE CERTAINES IRRATIONNELLES DE LA FORME

$$\frac{\sqrt{A} + M}{P}$$

EN FRACTIONS CONTINUES

I

Posons :

$$A - \lambda^2 = n_1 m_1,$$

λ étant entier inférieur à b et le plus grand carré parfait contenu dans A, n_1 et m_1 étant entiers, positifs et compris tous deux entre $(b + \lambda)$ et $(b - \lambda)$; puis développons en fractions continues, les irrationnelles :

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1} = y$$

et

$$\frac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1} = y'.$$

On peut poser :

$$y = \frac{b + \lambda}{n_1} + \frac{\sqrt{A} - b}{n_1} = k_1 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_1)}{n_1} = k_1 = \frac{1}{x_1} ;$$

on avait $y > 1$, il en résulte $h_1 \geqq 1$ et $x_1 > 1$, et ces trois valeurs sont évidemment positives.

Le reste de la première division, r_1 donne :

$$b + \lambda - n_1 k_1 = r_1,$$

et l'on a $r_1 < n_1$ et $r_1 > b$, car si $n_1 > b$, on a $k = 1$ et $r_1 < b$. On développe ensuite x_1 de la même manière :

$$x_1 + \frac{n_1 (\sqrt{A} + b - r_1)}{A - (b - r_1)^2} = \frac{\sqrt{A} + b - r_1}{n_2} = k_2 + \frac{\sqrt{A} - (b - r_2)}{n_2}$$

$$= k_2 + \frac{1}{x_2}.$$

Il est facile de voir que l'on a eu :

$$A-(b-r_1)^2=n_1\left\{m_1-k_1(n_1k_1-2\lambda)\right\}=n_1n_2$$

le facteur n_2 étant positif, d'un autre côté $x_1>1$ entraîne $k_2\geqq 1$; $r_2<b$; et $x_2>1$, les valeurs étant évidemment toutes positives. En continuant, on obtient :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
x_2&=k_3+\frac{1}{x_3}=\frac{2b-r_2-r_3}{n_3}+\frac{\sqrt{A}-(b-r_3)}{n_3}\\
x_3&=k_4+\frac{1}{x_4}=\frac{2b-r_3-r_4}{n_4}+\frac{\sqrt{A}-(b-r_4)}{n_4}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{p-1}&=k_p+\frac{1}{x_p}=\frac{2b-r_{p-1}-r_p}{n_p}+\frac{\sqrt{A}-(b-r_p)}{n_p};
\end{aligned}\right.$$

les facteurs n, sont liés par la relation :

$$(2)\qquad A-(b-r_{p-1})^2=n_{p-1}.n_p.$$

Pour établir la généralité de ces formules, rappelons que l'on avait : $y>1$; $k_1\geqq 1$; $x_1>1$; $r_1<n_1$; $r_1<b$ toutes ces valeurs étant certainement positives ; on avait encore $A-(b-r_1)=n_1.n_2$. *Si nous admettons que ces relations subsistent pour les éléments d'indices $p-1$, elles subsistent encore pour les éléments d'indices p, et elles sont par conséquent générales.*

En effet, si nous admettons que l'on ait :

$$A-(b-r_{p-1})^2=n_{p-1}.\,n_p$$

avec

$$r_{p-1}<b$$

$$n_{p-1}\ \text{positif},$$

et

$$x_{p-1}>1$$

nous aurons

$$(3)\qquad x_{p-1}=\frac{n_{p-1}\left(\sqrt{A}+b-r_{p-1}\right)}{A-(b-r_{p-1})^2}=\frac{\sqrt{A}+b-r_{p-1}}{n_p}=\frac{2b-r_{p-1}}{n_p}+\frac{\sqrt{A}-(b-r_p)}{n_p}=k_p+\frac{1}{x_p}$$

et les valeurs positives :

$$n_p<2b\,;\ k_p\geqq 1\,;\ x_p>1\ \text{et}\ r_p<b.$$

En outre, nous pourrons écrire :

$$(4) \qquad A - (b - r_p)^2 = n_p \left\{ n_{p-1} - k_{p-1} (r_{p-1} - r_p) \right\} = n_p . n_{p-1}$$

avec

$$n_{p+1} \text{ pos.} < 2b.$$

Puisque les conditions admises étaient vraies pour les termes d'indices 1) et 2), elles sont générales, et la formule (3) donne le terme général du développement ; nous pourrons énoncer en outre les remarques suivantes :

a) : Les quotients complets x_1, $x_2 \ldots$, x_p, sont positifs et > 1.

b) : Les quotients incomplets k_1, $k_2 \ldots$, $k_p \ldots$, sont entiers et positifs.

c) : Les diviseurs n_1, $n_2 \ldots$, $n_p \ldots$, sont entiers, positifs et $< 2\,b$.

d) : Les restes sont tous $< b$.

e) : Les restes sont plus petits que le diviseur correspondant et que le diviseur suivant ; c'est-à-dire :

$$r_p < n_p$$

et

$$r_p < n_{p+1}$$

car on peut écrire :

$$A - (b - r_p)^2 = n_{p+1} . n_p = n_1 m_1 + r_p (2b - r_p)$$

et

$$n_{p+1} = \frac{n_1 . m_1}{n_p} + r_p . k_p + \frac{r_p . r_{p-1}}{n_p}.$$

Donc

$$n_{p+1} > r_p.$$

Il en résulte donc que l'on a :

$$(5) \qquad y = k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \ldots}}$$

C'est une fraction continue illimitée. On obtient un résultat analogue en développant y'.

II

Les quotients incomplets sont liés entre eux par une périodicité qui découle des deux théorèmes suivants :