Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'APPLICATION DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHÉMATIQUE
Autor: Bettazzi, Rodolphe
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3551

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'APPLICATION

DANS

L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHÉMATIQUE

Relations entre la mathématique et la réalité. — 1. La mathématique est une science exacte, et, par conséquent, elle consiste en déductions obtenues par des procédés de logique; mais quelques-uns des objets sur lesquels elle opère et les principes fondamentaux d'où elle part, ne peuvent pas, nécessairement, s'obtenir ainsi. Ils sont empruntés directement à la réalité, de manière à avoir une science qui diffère d'une science expérimentale par la manière de tirer les conclusions, mais qui, avec ces conclusions, sert à obtenir des résultats qui se réflètent dans la réalité. Si tel n'est pas le but actuel de tout mathématicien dans ses recherches, c'est là néanmoins l'idée générale qui donna l'origine aux sciences mathématiques, et qui les alimenta dans le cours des siècles.

2. Nous ne voulons pas dire par là que la mathématique étudie les objets et les phénomènes tels qu'ils sont en réalité. Elle prend en eux les propriétés qui ont rapport à la quantité, à la forme, à l'extension, au mouvement, et les idéalise, c'est-à-dire que, en faisant abstraction des autres, elle les sépare et les isole (quoiqu'en réalité elles ne soient jamais séparées), et quelquefois les modifie pour obtenir des résultats plus utiles ; par exemple, on considère les corps géométriques comme continus, tandis qu'il y a réellement de l'espace entre une molécule et une autre : nous nous les figurons pénétrables et, en réalité, ils sont impénétrables.

Dans la mathématique, on fait donc une construction abstraite des objets ; sans cela, elle ne pourrait pas être une science exacte, puisque la conception et la définition exactes de ce que sont les objects de la réalité nous manquent.

Le mathématicien, dans ses études, se délivre de n'importe quelle préoccupation extérieure et déduit, trouve, démontre, dans le seul but de découvrir des vérités qui le satisfont pour l'unique raison qu'elles sont des vérités; et il se renferme ainsi complètement dans une abstraction, qui est la caractéristique et, en même temps, la sauvegarde de la mathématique. Mais, à côté de cela, il n'est pas moins vrai que les définitions et les principes fondamentaux se modèlent sur ce qui arrive dans la réalité. Si en ce moment cela n'est pas une chose évidente, c'est parce que leur étude actuelle succède à une période dans laquelle on a eu recours à la réalité; on a reconnu quels étaient les principes qu'il fallait admettre pour expliquer les faits que l'on voulait étudier, et l'on a établi des lois qu'on propose ensuite comme fondamentales en mathématique, comme si elles avaient été trouvées à première vue, mais auxquelles, certainement, on n'aurait pas pensé, sans l'observation des faits qui se passent autour de nous.

3. M. KLEIN, dans sa conférence — *Sur le procédé arithmétique dans la mathématique* — observe que « les mathéma-
« tiques ne sont pas du tout épuisables par la déduction logique,
« mais qu'à côté d'elles l'intuition conserve, encore à présent,
« son efficacité pleine et entière, et qu'une exposition abstraite
« de déductions logiques ne peut pas nous suffire, tant que l'on
« n'en a pas formulé la force dans chaque forme d'intuition et
« qu'on ne connaît pas les multiples relations que, selon le
« champ d'observation que l'on choisit, le schéma logique a avec
« les autres parties de nos connaissances. » M. HOÜEL [1] écrit que
« la construction d'une telle science (exacte) se compose essen-
« tiellement de deux parties distinctes : l'une, qui est fondée
« sur l'observation et sur l'expérience, consiste à rassembler
« des faits et à en conclure par induction les lois et les prin-
« cipes qui serviront de bases à la science; l'autre, qui n'est
« qu'une branche de la logique générale, s'occupe de combiner
« ces principes fondamentaux, de manière à déduire la repré-
« sentation des faits observés et à prédire, en outre, des faits
« nouveaux. »

---

[1] HOÜEL. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*. Appendice, note 1.

A ces deux éléments, nous pouvons en ajouter un troisième, en distinguant, comme le fait M. LAISANT (1), en trois périodes la tâche des mathématiques dans toutes les questions : c'est-à-dire le passage du concret à l'abstrait, la solution mathématique de la question, et enfin le retour de l'abstrait au concret, ou l'application à la réalité des résultats obtenus, ce qui représente le but définitif et complet (sinon actuel et particulier) de la mathématique.

La partie logique, sur laquelle principalement, et parfois uniquement, on insiste dans les classes, est donc une seule des trois parties qui nous donnent la raison d'être de la science : son origine et le but auquel elle tend, vont, pour ainsi dire, se *plonger* dans la réalité.

Les relations de la mathématique avec le monde qui nous environne ne sont donc pas accidentelles et artificielles; et si on oubliait ces relations, on ferait perdre à cette science son caractère.

4. Sur le troisième élément dont nous venons de parler, et qui est le retour au concret, il faut faire une observation, indispensable pour le sujet que nous allons traiter. Dans ce « retour », on ne peut pas trouver des résultats qui se combinent exactement avec ceux que l'on peut mesurer directement; on aura toujours une différence, et, par conséquent, le résultat théorique ne représentera qu'approximativement le résultat pratique. On reconnaîtra la vérité de ce fait, en considérant que les objets de la réalité ne sont pas, comme nous l'avons déjà dit, ceux de la théorie; et, qu'en outre, les mesures, prises sur la réalité, sont loin d'être exactes, soit à cause de l'imperfection (inévitable comme dans toutes les choses humaines) de nos sens et de nos moyens de mesurage, soit parce que les mesures théoriques sont autres que les mesures pratiques, appliquées comme elles le sont à des objets qui diffèrent (et qui peut dire à quel degré?) de ceux de la réalité.

Dans le retour de l'abstrait au concret, il y a donc une erreur qui, d'après ce que nous avons dit, n'est pas exactement calculable, mais de laquelle il faut connaître une limite supérieure si

(1) LAISANT. *La Mathématique.*

l'on ne veut pas que les résultats soient privés de toute signification. Cette erreur se retrouve toujours, même dans les cas où il y a la plus grande ressemblance entre les objets théoriques et les réels. Elle devient d'autant plus petite que cette ressemblance devient plus grande, mais ne peut jamais disparaître tout à fait : de manière que, dans sa forme figurative, la phrase de d'Alembert « les vérités géométriques sont l'asymptote des vérités physiques », est profondément vraie.

L'EXERCICE COMME MOYEN D'ÉTUDE ET D'ENSEIGNEMENT. — 5. L'usage de l'intuition et de l'exercice est nécessaire quelquefois, toujours utile dans l'enseignement. M. KLEIN observe avec raison que dans les leçons élémentaires et dans celles qui sont destinées à des élèves qui auront beaucoup à faire usage de l'intuition, comme les naturalistes et les ingénieurs, le point de départ doit être l'intuition, par laquelle, comme l'écrit à son tour M. POINCARÉ (1), « le monde mathématique reste en contact avec le monde « réel; et quand même les mathématiques pures pourraient s'en « passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler « l'abîme qui sépare le symbole de la réalité. Le praticien en « aura donc toujours besoin, et, pour un géomètre pur, il doit y « avoir cent praticiens ». Mais. même en laissant cela de côté, il semble indispensable de ramener les élèves à la réalité, de laquelle, en substance, naissent les objets de la science et leurs opérations, même lorsque la science les idéalise; ainsi, d'une part, les élèves ne perdront pas de vue l'origine de la mathématique, de l'autre, ils en apprécieront le but, et ils s'habitueront à se servir dans la vie d'un si précieux instrument, et à en apprécier comme il faut les résultats, c'est-à-dire, en tenant compte de l'approximation : et cela vaudra mieux que de faire plus tard et à part cette application, en lui donnant peut-être une fausse interprétation d'exactitude.

6. Il est nécessaire d'observer que si l'on a recours à la réalité, soit pour établir les principes de la mathématique, soit pour en enseigner les applications, nous ne voulons pas que cette réa-

(1) POINCARÉ. *La logique et l'intuition dans les sciences mathématiques.* (*L'Enseignement mathématique.* 1re année, n° 3.)

lité aille jusqu'à suppléer la démonstration et le raisonnement. Que l'on déduise de l'observation de ce qui nous entoure, les objets de la mathématique et, parmi de leurs propriétés, qui, selon les degrés de l'enseignement, sont opportunes ; mais le raisonnement rigoureux seul devra servir à découvrir les autres propriétés, sans faire de concession ni aucun mélange avec la pratique. Tout au plus, on pourra, dans les cas où on le croit nécessaire (à cause du manque de temps ou de la difficulté excessive), ne donner que les énoncés de quelques théorèmes, en sautant la démonstration et en fournir des exemples pratiques pour les *illustrer*, de manière qu'on ne les considère pas comme démontrés, mais qu'on en puisse saisir la portée, ce qui arrive difficilement en donnant le seul énoncé. Les exemples et les exercices seront précieux, lorsqu'on aura démontré les théorèmes, pour mieux en faire ressortir l'importance et le but ; ils procureront la satisfaction de reconnaître que ces propriétés se vérifient dans la pratique, ou s'appliquent à des recherches utiles, toujours en tenant compte de cette approximation que nous avons dit être inévitable.

7. On peut observer de plus que l'intuition et la pratique peuvent quelquefois servir à précéder le raisonnement et à lui aplanir la voie. — M. Klein pense que « l'intuition mathéma-
« tique, depuis l'impression de caractère métrique avec laquelle
« l'ingénieur juge de la distribution des forces dans une cons-
« truction quelconque faite par lui, jusqu'à ce sens indéterminé
« de convergence que l'habile calculateur sent en présence d'un
« procédé indéfini de calcul, précède toujours dans sa sphère la
« déduction logique et qu'à chaque instant elle embrasse un
« champ plus vaste que celle-là...

« Dans le développement des diverses branches de la science
« mathématique, l'intuition a fait les premiers pas et précédé
« l'étude logique et rigoureuse. »

Il est donc utile, même dans l'enseignement de cette science, de cultiver avec soin cette partie pratique, qui, appliquée avec discernement, conduit parfois à la découverte de quelques vérités.

Par exemple, si l'on dessine deux segments équivalents, et qu'on joigne leurs extrémités par deux droites qui ne s'entre-

croisent pas, on appellera l'attention des élèves sur ces deux segments de la figure, et aussitôt naîtra, dans l'esprit des enfants, d'abord un vague soupçon, puis à peu près la certitude que ces deux segments sont égaux : alors ce sera le moment d'intervenir et d'annoncer que la propriété est absolument vraie, et l'on pourra la démontrer, ou essayer de la faire démontrer par les élèves. On procédera de la même manière dans tous les cas semblables, ce qui servira à développer l'intelligence des élèves et à perfectionner leur intuition géométrique.

8. L'application nous oblige à sortir du champ de la pure et simple abstraction, mais, en revanche, elle peut nous conduire dans le domaine d'autres sciences. Dans l'enseignement, ce travail est utile, car il nous montre les liens et l'accord qui existent entre les diverses branches d'études : il oblige, de plus, les élèves à apprendre et à imprimer dans leur esprit certaines parties fondamentales des autres sciences, tandis que celles-ci, par l'application de la mathématique, reçoivent, à leurs yeux, une sorte de sanction, à cause de la sûreté que l'emploi d'une science exacte donne à leurs résultats. De cette manière, la mécanique, la physique, la cristallographie, la topographie, reçoivent de puissants secours de l'enseignement mathématique, et lui en donneront, à leur tour : et les élèves tout en en retirant un réel avantage, trouveront, sans doute, une agréable et utile récréation.

9. Les applications sont le meilleur et le plus sûr moyen pour vaincre la répugnance traditionnelle qu'on éprouve pour les mathématiques, et quelquefois même pour en éveiller le goût chez ceux qui, sans encore s'en douter, y sont portés naturellement. En choisissant bien les applications, on éveille la curiosité des jeunes gens, on excite leur intérêt ; et il peut se faire que l'élève soit ainsi amené à étudier à fond une question qu'il n'avait qu'ébauchée jusqu'alors, et peut-être (comme il arrive quelquefois) qu'il se révèle en lui une très forte passion pour la science. Si on traite les questions sans faire aucune application pratique, on rend l'enseignement aride et difficile, les élèves se découragent et commencent à se demander s'ils ne perdent pas leur temps dans l'étude d'une science sans utilité pratique et sans attrait ; tandis que si l'on montre immédiatement, par des

applications bien choisies, l'utilité et l'importance des choses qu'on a étudiées, ou ramène l'élève dans le monde où il vit habituellement, et on le délivre de cette espèce d'oppression que lui donne l'étude d'une science complètement abstraite.

« Quand vous arriverez aux racines carrées, dit le P. Poulain (1), « sachez les utiliser en les appliquant à des calculs de *moyennes* « *proportionnelles* et *au carré de l'hypoténuse*. Qu'après avoir « mis bien du temps à apprendre l'extraction des racines, les « élèves n'aient plus à demander : A quoi cela sert-il ? Cessez de « leur répondre majestueusement : « Vous le saurez plus tard. » « — Oui, bien tard. Montrez-leur tout de suite qu'un ingénieur « est souvent amené aux extractions de racines par les pro- « blèmes que je viens d'indiquer. »

Moyens de se servir des applications dans l'enseignement. — 10. Examinons maintenant de quelle manière la pratique peut rendre des services dans l'enseignement.

Les problèmes d'Arithmétique sont d'un grand secours ; si les sujets sont empruntés à une science appliquée, et si les données des problèmes sont bien choisies, ils pourront intéresser beaucoup les élèves, et satisfaire ou exciter leur curiosité. Ces problèmes deviendront encore plus utiles et instructifs, si les élèves eux-mêmes sont tenus d'en chercher les données, parce que, indépendamment du plaisir qu'ils trouvent dans les recherches en question, dans les mensurations, les expériences, les lectures d'instruments, etc., il y a encore un grand avantage : c'est qu'ils ne verront là rien d'arbitraire, mais, un exemple effectif de ce qui se présente réellement dans la nature.

11. Le dessin est aussi un grand moyen d'enseignement géométrique, car il permet de réaliser, sinon les figures qui sont abstraites, du moins certains objets réels, dont ces figures sont les images. Le dessin rend familier aux élèves l'usage des mots et la construction des figures géométriques, leur donne l'occasion d'apprendre de nouvelles définitions, et les habitue à concevoir avec précision et clarté les figures géométriques qu'ils

(1) P. A. Poulain. *Les mathématiques dans les collèges.* (*L'Enseignement chrétien*, 6e année, 1897.)

étudieront plus tard avec plus de facilité. Pour que le dessin donne de bons résultats, il devra être fait avec le plus de soin et de précision possible. Le but n'est certes pas que les figures dessinées aient plus de ressemblance avec les vraies figures géométriques, car entre une figure abstraite et une figure concrète, il ne peut y avoir une véritable ressemblance, et les figures concrètes « sont toujours fausses », comme l'observe très bien M. LAISANT (*l. c.*) ; mais, selon le même auteur, « lorsque » l'approximation est par trop grossière, lorsque les tracés « sont mal exécutés et confus, cette confusion matérielle engen- « dre vite celle du raisonnement et contribue à empêcher l'ap- « parition de la vérité. »

12. Il ne faut pas craindre que le dessin, en faisant paraître évidentes des choses qui doivent être démontrées, serve à détrôner les raisonnements. Dans tout enseignement, en effet, il faut toujours établir avec précision les principes fondamentaux et primitifs, qu'ils puissent ou non être démontrés. Ils seront plus ou moins nombreux selon les exigences de l'école et la nature de l'enseignement; mais, une fois ces principes établis, toute vérité qu'on énonce doit être ou l'un de ces principes, ou une conséquence logique qui découle d'eux-mêmes et des autres vérités qui auront déjà été démontrées. Il en résulte que, si l'on réfléchit, si l'on rejette toute assertion qui ne soit pas de telle nature, on éliminera ainsi celles que nous serions tentés d'émettre d'après ce simple témoignage de l'observation et des sens, et, par conséquent, aussi celles qui seraient suggérées par le dessin. Par suite, le danger signalé plus haut n'existe pas, du moins (et cela soit dit pour tout ce qui a été écrit ou que j'écrirai dans le cours de cet article) si le maître est savant et consciencieux.

13. Il ne faut pas craindre davantage que le dessin puisse circonscrire la fantaisie géométrique, en rendant trop limitées ou trop pauvres les images des figures qu'il crée, et en les restreignant presque à ne représenter que la figure spéciale que l'on trace dans chaque dessin.

Lorsqu'une figure, un triangle par exemple, aura été défini, l'élève qui la dessine pensera à cette définition, et ne fixera son attention que sur ce qu'elle contient ; par conséquent il verra lui-même dans le dessin quelque chose qui représente le

vrai triangle, mais qui ne l'est pas. Des explications spéciales de la part du maître, et les divers changements de formes du triangle dans de nouveaux dessins suffiront pour persuader l'élève que le triangle est l'image abstraite qui embrasse les infinies variétés de figures correspondantes que l'on pourrait tracer.

14. Dans certaines questions de géométrie solide, le dessin est indispensable pour bien comprendre les relations réciproques des lignes et des surfaces, que les jeunes élèves, sans cela, comprennent difficilement ; dès lors, il serait utile, comme le fait remarquer Lacroix (1), d'exercer les élèves à dessiner, d'après nature, des modèles de corps géométriques, avec tous les détails d'ombres et de reliefs qu'on réserve habituellement pour le dessin d'ornement et de figures.

15. L'usage du dessin est encore très recommandable dans l'étude de la Géométrie analytique, surtout plane : car, en ce qui concerne la Géométrie dans l'espace, le dessin présente des difficultés considérables dues à l'imperfection ou à la complication des moyens représentatifs.

Le dessin peut servir, sinon à découvrir les propriétés des courbes, du moins à diriger et localiser les recherches destinées à trouver ces propriétés ; en outre, le dessin, en accompagnant ces recherches, les illustre, les précise et donne une idée exacte de la valeur réelle des résultats obtenus.

Il est utile que les élèves fassent beaucoup d'exercices de dessins de courbes, et que dans chacun d'eux ils tracent le plus grand nombre possible d'éléments relatifs à la courbe. Si le manque de temps (qui est désormais le tyran de nos écoles) ne permet pas de dessiner avec les instruments, qu'on le fasse faire à la main sur papier quadrillé ; particulièrement dans les coordonnées cartésiennes, cela permet d'obtenir des résultats rapides et suffisamment exacts.

16. Le travail manuel sera aussi d'un secours agréable et utile. Pour la Géométrie dans l'espace, tout le monde le sait, les modèles de solides en bois ou en fil de fer sont très précieux, comme aussi les surfaces faites avec des fils, etc... Les polyèdres mêmes, développés sur le papier, sont des auxiliaires utiles, sur-

(1) Lacroix. *Essais sur l'Enseignement.*

tout si on les fait confectionner par les élèves en leur donnant les règles nécessaires et opportunes (1).

Il est aussi très utile et amusant pour les élèves de leur faire dessiner des courbes planes sur de petites plaques de bois qui servent au travail à découper ; on leur fera ensuite exécuter le découpage de ces dessins, et les élèves verront ainsi et comprendront les propriétés des courbes relativement à leur développement les unes sur les autres, à leur engrenage pour la transformation des mouvements, ainsi que beaucoup d'autres propriétés mécaniques. On pourra leur faire construire ainsi de petits instruments pour le tracé de certaines courbes, par exemple des cycloïdes, épicycloïdes, etc...

17. Indépendamment de ces exercices pratiques que les élèves font individuellement dans l'école ou chez eux, il y en a d'autres tout aussi importants qu'on peut faire collectivement et sur le terrain, comme les opérations les plus élémentaires de la mesure des hauteurs, des distances, des aires, des volumes et les reliefs ; ils n'exigent seulement que l'aide de quelques instruments très simples et des premières notions de mathématiques. Ces exercices, par suite du milieu même où ils sont exécutés et de l'application à la vie qu'ils contiennent, présentent un grand intérêt ; de plus, ils sont pour les jeunes gens un agréable divertissement, sans compter que là sur le terrain, en pleine campagne, les élèves comprennent plus facilement, et apprécient mieux certaines vérités avec lesquelles ils n'avaient pu se familiariser à l'école.

18. Je crois devoir faire remarquer que ce que j'ai dit jusqu'ici et qui se rapporte à l'emploi de la pratique dans l'enseignement, n'est pas seulement mon opinion personnelle, ou celle des auteurs que j'ai cités. Quelques-uns de mes collègues, professeurs dans quelques lycées peu nombreux, conduisent leurs élèves à la campagne, et après de brèves explications sur l'emploi des instruments, leur font mesurer la distance entre des points inaccessibles, la hauteur des tours au moyen de l'ombre, etc. Le professeur PEANO, de l'Université de Turin, mon collègue à l'Académie Militaire, fait dessiner à ses élèves dans les deux écoles, des

(1) Voir RIVELLI. *Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi et alla lora costruzione in carta.*

courbes, qu'il leur donne ou par leurs équations ou par leurs définitions géométriques ou mécaniques, et, après avoir fait calculer leurs principaux éléments, il les fait dessiner en tout ou en partie, jusqu'à ce que des difficultés trop considérables de dessin viennent s'y opposer. Et l'expérience démontre que de cette façon les idées sont plus claires, plus précises, et se fixent dans l'esprit bien mieux qu'avec de longues explications au tableau noir.

La pratique dans l'enseignement primaire des mathématiques. — 19. Tout le monde connaît l'importance de la pratique et de l'intuition au début de l'enseignement des mathématiques ; c'est par là qu'il faut commencer afin de donner aux enfants une idée des nombres et des figures géométriques. Il ne faut pas croire cependant que l'enseignement des mathématiques dans les classes élémentaires doit être une chose purement matérielle, car il sera bon au contraire de préparer les enfants, et cela graduellement, sans aucun apparat de définitions ou d'explications, à ces abstractions qui sont la base des mathématiques ; mais, quand les enfants comprendront bien que les nombres et les figures sont des choses purement idéales, il faudra les rappeler à la réalité au moyen d'exercices et d'applications. Un maître intelligent, par le passage de la théorie à la pratique, aura l'occasion de faire noter que la théorie agit sur des choses abstraites et que la résolution des problèmes n'est que l'application d'opérations abstraites à des questions concrètes ; il évitera ainsi de fréquentes erreurs chez les enfants, en leur faisant observer, par exemple, qu'on ne multiplie ou qu'on ne divise pas des mètres par des ouvriers ou des kilogrammes par des jours, mais qu'on n'opère seulement que sur des nombres qui représentent ces grandeurs.

La pratique ne doit pas supplanter, mais seulement corroborer et aider l'abstraction ; mais, d'un autre côté la négliger, et réduire l'enseignement élémentaire à une simple énumération de nombres, à de simples calculs numériques serait le dénaturer et le rendre aride, avec la certitude d'être mal compris, et de voir les élèves se dégoûter de la mathématique.

20. Le dessin devra être utilisé même dans les écoles élémentaires comme moyen d'enseignement pour donner aux enfants des idées de forme, d'extension et de figure. Il sera bon, du

moins dans les classes secondaires inférieures, d'exercer les élèves eux-mêmes au dessin géométrique qui est une école précieuse d'ordre et de précision, et un moyen puissant pour préparer l'intelligence à comprendre ce que seront plus tard, dans un enseignement plus avancé, les théorèmes, et peut-être même à en deviner quelques-uns.

Naturellement on fera dessiner des figures et des constructions choisies parmi les plus simples ; mais leur exécution sera sans doute féconde d'heureux résultats, à condition, cependant, que l'on habitue les enfants à dessiner avec exactitude.

21. Dans les écoles inférieures il sera avantageux aussi de familiariser les élèves avec la mesure *directe* des objets, en proposant des problèmes se rapportant autant que possible aux choses qui sont généralement à la portée de l'écolier. Ces applications ont encore l'avantage d'exercer l'œil et la main des enfants afin qu'ils puissent bientôt évaluer approximativement et sans instruments, les longueurs, les poids, les capacités, etc.

Le mesurage peut être employé aussi en faisant exécuter des dessins à une échelle déterminée et d'après certaines données fournies par le maître. Cela donnera aux enfants l'idée de proportion, de rapport : et la même figure exécutée, plusieurs fois à des échelles différentes, fera naître chez eux l'idée de figures semblables (1).

LA PRATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ET SUPÉRIEUR DES MATHÉMATIQUES. — 22. Quant à l'enseignement secondaire (et ce qui suit soit dit aussi pour diverses branches de l'enseignement supérieur) il est certain que sa base ne peut être que le raisonnement logique et rigoureux. L'usage de la pratique doit être seulement subsidiaire ; mais il sera utile pour la plus grande clarté des études, pour exciter l'intérêt, et récréer les élèves. On fera des applications fréquentes au fur et à mesure que l'occasion se présentera.

En ce qui concerne l'Algèbre, il faut chercher à éveiller chez les élèves le goût d'autres sciences, en choisissant les problèmes

(1) Telle est l'opinion du professeur MANNHEIM comme il résulte de l'article : « Réflexions sur le premier enseignement de la Géométrie » de M. C.-A. Laisant dans *L'Enseignement mathématique*. 1re année, n° 5, p. 339-343.

dans la Physique, l'Astronomie, etc... Afin que les questions excitent la curiosité, on les pourra choisir parmi celles qu'on croit généralement difficiles ou insolubles : l'amour-propre des élèves en sera piqué. La théorie des probabilités, par exemple, et celle des approximations pourront fournir des questions, des problèmes intéressants et donner lieu à de curieuses applications.

23. Il est utile de faire exécuter par le dessin les constructions pendant qu'on les explique dans le cours, et réaliser ainsi sinon avec les instruments (le temps peut-être ne le permettant pas) du moins à la main sur papier quadrillé, la solution des problèmes qu'on étudie. Il sera bon aussi de faire dessiner des figures élémentaires correspondant à des mesures données, par exemple un arc de cercle (dont la mesure est donnée en rayons ou en degrés), un arc d'un sinus ou d'une tangente donnés, ou bien encore de résoudre graphiquement des problèmes qui, quoique insolubles théoriquement par les moyens de la Géométrie élémentaire, peuvent toutefois être résolus avec le degré d'approximation que l'on veut, comme par exemple trouver la $n^{ième}$ partie d'un angle, rectifier une circonférence, faire la quadrature d'un cercle, etc., en évaluant ensuite le degré d'approximation théorique et pratique auquel on est arrivé.

Dans la présentation des problèmes graphiques il faudra leur donner l'aspect de questions pratiques, comme par exemple le tracé d'une voie ferrée, étant donnés quelques points où elle doit passer ou la longueur de certains traits, etc.

24. Dans l'enseignement secondaire il serait désirable qu'on introduisît, même si le programme ne le comporte pas, l'idée de la représentation cartésienne ou polaire des fonctions par les courbes, ou même la représentation vectorielle, pour initier les élèves aux procédés représentatifs aujourd'hui en usage, même en dehors des mathématiques ; on pourra ensuite parler des appareils enregistreurs (comme l'anémographe, le sismographe, etc.), et en exposer le fonctionnement.

Comme application, on fera tracer aux élèves la courbe représentative de quelque phénomène qui se passe sous leurs yeux, comme par exemple la variation de la température d'une chambre durant les différentes heures de la journée, celle de la mortalité d'une ville durant le cours de l'année, etc.

25. La connaissance des courbes représentatives des fonctions peut servir dans l'enseignement secondaire et supérieur à montrer aux élèves leur usage pour remplacer les tables de calcul. Ainsi, par exemple, la sinusoïde $y = \sin x$, une fois dessinée, nous donne les sinus des arcs qui sont exprimés (en rayons) par ses abscisses ; la spirale logarithmique $\rho = e^{\varphi}$ nous donne dans les arguments de ses points (mesurés par le radiant) les logarithmes népériens des rayons vecteurs de ces points, etc., de telle sorte que les courbes tracées avec une exactitude suffisante peuvent suppléer les tables de logarithmes et d'autres encore, au moins dans une certaine mesure. Pour cela il faudra tracer les courbes avec d'autres moyens que la détermination de leurs points obtenus par les coordonnées calculées par l'équation ; par suite, il faudra enseigner les moyens mécaniques ou géométriques pour le tracé des principales courbes, au moins dans la mesure que comporte le degré d'enseignement.

26. La réduction d'échelle pourra donner lieu à des exercices intéressants et utiles.

Par exemple les données d'un problème exprimées avec une certaine unité pourront être dessinées à une échelle réduite, et l'on pourra, à cette même échelle, faire dessiner la solution de problèmes, ou réduire à une autre échelle des figures déjà dessinées.

La réduction aux échelles fournira l'occasion d'enseigner aux élèves à se servir des plans topographiques, pour la mesure des hauteurs, distances, inclinaisons, etc., ou pour retrouver un chemin déjà parcouru pour aller d'un lieu à un autre, étant donnée une ligne brisée parcourue, au moyen de la longueur de ses divers côtés, et de leurs inclinaisons les uns sur les autres.

27. Nous rappelons ici, quoique nous en ayons déjà parlé, et parce qu'ils concernent l'enseignement secondaire, les exercices utiles du développement des solides, des constructions de polyèdres en papier ou en fil de fer, de courbes en bois ou en métal, ainsi que les relevés topographiques avec lesquels les élèves prennent sur le terrain les mesures nécessaires, et, s'il le faut, exécutent ensuite chez eux les calculs pour la détermination des différentes inconnues.

La pratique, objet d'étude. — 28. Afin que l'on comprenne mieux combien il est important que les élèves étudient aussi l'application pratique, il est bon de rappeler que c'est la pratique qui a suggéré, et, pour ainsi dire, créé diverses branches des sciences mathématiques. Ainsi la théorie des approximations, le calcul des erreurs naissent de l'usage des mathématiques appliquées aux choses concrètes. La solution graphique effective des problèmes de Géométrie, qui conduit à des constructions plus ou moins longues et compliquées et par suite à un degré de précision plus ou moins grand, a donné naissance à la Géométrographie, qui examine et confronte les constructions au point de vue de leur précision et de leur simplicité.

D'un autre côté, certaines questions nées de la pratique ont été, tôt ou tard, directement ou indirectement, la source de nouvelles études et de nouvelles théories. Je citerai par exemple la duplication du cube née, si ce que l'on dit est vrai, d'une question pratique posée par l'oracle ; elle a fait naître des constructions de nouvelles courbes et nous a valu de belles et récentes études pour en démontrer l'impossibilité par la Géométrie élémentaire.

Nécessité de l'étude de l'approximation. — 29. Ainsi que nous l'avons déjà fait observer, l'usage de la pratique exige qu'on fasse bien comprendre aux élèves que les résultats qu'on obtient, s'ils sont exacts comme cas spéciaux de cas généraux théoriques, ne répondent pas exactement à la pratique (N° 4). Il est donc nécessaire que les élèves aient une idée suffisamment exacte du calcul des approximations et des limites de ces approximations mêmes, c'est-à-dire du degré d'approximation auquel on peut arriver. M. Laurent (1) dit que ce serait presque un *crime* de ne pas enseigner à résoudre des questions aussi simples et indispensables ; et certainement aucune connaissance mieux que le calcul des approximations ne peut faire apprécier la nature réelle des recherches mathématiques comparées avec la réalité, et la valeur de celle-ci dans les applications. En vérité cette

(1) Laurent. *Les mathématiques spéciales en France.* (*L'Enseignement mathématique.* 1re année, n° 1.)

appréciation sur l'exactitude pratique d'une recherche ne peut se faire sans un examen sérieux de la question pour laquelle on l'exécute ; il est donc nécessaire que les élèves soient initiés à cet examen des objets auxquels s'applique le calcul, pour bien juger les limites dans lesquelles les erreurs restent circonscrites.

En attendant, on pourra leur faire noter, comme le dit M. LAISANT (*l. c.*) « qu'il est permis de considérer ici un résultat « approché (en théorie), comme très supérieur à un résultat « rigoureusement exact, si le premier est par sa nature, mieux « adapté à l'objet qu'on a en vue, et si en somme l'erreur finale, « au point de vue pratique, est inférieure à celle qu'aurait pro- « duite la solution mathématique absolue ».

De même, il faudra bien inculquer le principe si important dans les applications « de proportionner l'approximation que « l'on poursuit, à la puissance des moyens mis en œuvre, et à la « nature pratique des questions. Celui qui évaluerait l'aire d'un « champ de quelques hectares, en se trompant d'un are ou deux « serait un piètre arpenteur ; mais celui qui prétendrait la « déterminer à un millimètre carré près, serait un fou ». (LAISANT, *l. c.*)

M. KLEIN, dans la sixième des conférences sur la mathématique tenues à Chicago, insiste lui aussi sur ce point que « les déve- « loppements mathématiques qui dépassent les limites rigou- « reuses de la science appliquée n'ont aucune valeur pratique ».

Par suite, les jeunes gens devront être exercés dans l'appréciation de l'approximation qu'il est convenable de rechercher relativement au résultat, d'un côté, et de l'autre de celle qu'il faut exiger relativement aux données du problème. Il faudra aussi faire bien comprendre le degré de précision nécessaire dans l'usage des instruments de calcul, proportionnellement au degré d'approximation que nécessairement on ne pourra dépasser dans les questions spéciales. Cela soit dit pour le choix des tables de logarithmes, pour lesquels, sauf quelques rares exceptions, 4 ou 5 décimales sont suffisantes.

En se servant des tables à sept décimales ou davantage encore, par exemple dans des calculs de longueurs où les méthodes employées rendent possible une erreur de 1 ou 2 mètres pour une vingtaine de kilomètres, l'approximation qu'on obtiendrait

ainsi serait une apparence chimérique et trompeuse. C'est encore l'opinion de M. LAISANT.

MOYENS MÉCANIQUES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES. — 30. L'introduction des questions pratiques dans l'enseignement donnera l'occasion (dans les écoles plus avancées et avec des jeunes gens suffisamment instruits), d'enseigner au moins l'usage des principaux instruments et appareils avec lesquels on peut exécuter et simplifier les calculs et les constructions. Après avoir familiarisé les élèves avec les tables proprement dites (logarithmes, etc.), on pourra leur parler des abaques et des règles logarithmiques. On les habituera aussi à se servir des courbes représentatives des fonctions pour déterminer, avec une approximation souvent suffisante, les valeurs pour lesquelles ces fonctions se trouvent dans certaines conditions, et conséquemment pour résoudre des équations.

Il sera utile encore de parler des moyens physiques par lesquels on peut résoudre des équations, par exemple de l'usage des liquides, et en général des machines qui ont été construites pour l'exécution des calculs et la recherche des fonctions ; parmi ces machines, quelques-unes, comme l'arithmomètre, sont largement utilisées dans la pratique, et d'autres, comme l'intégraphe, ont beaucoup d'applications (1).

RODOLPHE BETTAZZI (Turin).

---

(1) Voir PASCAL E., *Repertorio di matematiche superiori*, et DYCK. *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.*