

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA DEMONSTRATION DES FORMULES DU DEMI-ANGLE EN TRIGONOMETRIE PLANE
Autor: Redl, Frz.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3565>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

« polaires de deux points quelconques par rapport aux ellipsoïdes du faisceau F se coupent suivant une gerbe de droites parallèles. »

Pour terminer, nous mentionnons encore les propositions suivantes :

« 1° Les sommets de tous les parallélépipèdes circonscrits à un ellipsoïde et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde aux extrémités de trois diamètres conjugués quelconques sont tous situés sur un ellipsoïde concentrique homothétique au premier. »

« 2° Les sommets de tous les cônes circonscrits à un ellipsoïde qui limitent avec les plans de leurs ellipses de contact des solides de volume donné, sont tous situés sur un second ellipsoïde, concentrique, homothétique au premier. » (Reye.)

Pour démontrer ces deux propositions, nous n'avons qu'à allier les ellipsoïdes à des sphères. Dans le premier cas nous trouverons comme lieu des sommets des cubes correspondant aux parallélépipèdes, une sphère concentrique à la première ; et de même les sommets des cônes circonscrits à la sphère correspondant aux cônes circonscrits à l'ellipsoïde sont situés sur une sphère concentrique à la première.

D^r KILBINGER (Mulhouse).

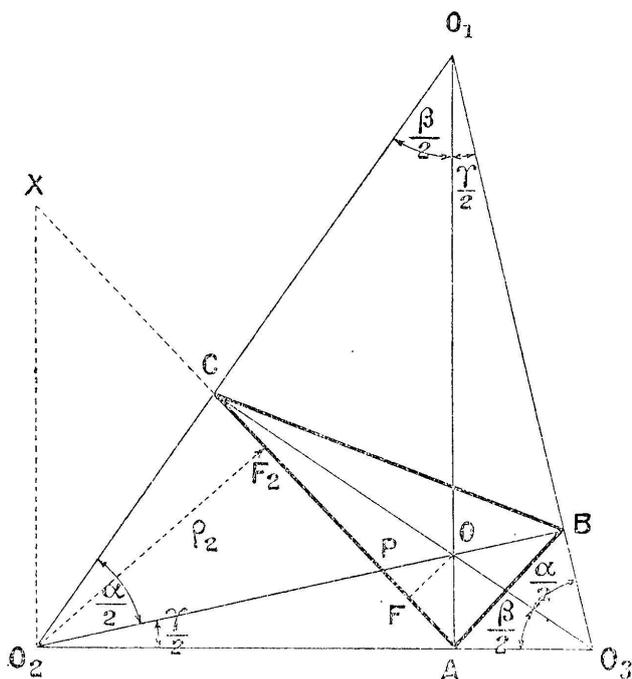
SUR LA DÉMONSTRATION
DES FORMULES DU DEMI-ANGLE
EN TRIGONOMÉTRIE PLANE

Le théorème de Carnot résout en principe le problème fondamental de la Trigonométrie, qui consiste à déterminer les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Toutefois la formule obtenue ne se prête guère au calcul logarithmique ; aussi en déduit-on d'ordinaire les formules dites du demi-angle, en ayant recours à des transformations algébriques.

C'est, je crois, à M. Fred. Meyer, professeur au Gymnase de Halle, qu'on doit le premier essai ⁽¹⁾ d'arriver directement à ces dernières formules, par des considérations purement géométriques.

Un peu plus tard M. Korschel donna ⁽²⁾ une démonstration analogue à celle de M. Meyer.

La méthode que je me propose d'exposer ici et qui conduit aux formules du demi-angle par une voie purement géométrique,



me semble plus importante que celle de Meyer, tant au point de vue pédagogique, qu'au point de vue scientifique. En effet, elle n'exige aucun théorème auxiliaire; la démonstration est absolument analogue pour les trois formules et, correspondant ainsi à leurs constructions, met bien en lumière leur étroite parenté; la figure sur laquelle elle se base a une grande importance géométrique, puisque le triangle ABC est précisément le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$; enfin, par cette méthode il est toujours facile de retrouver la démonstration de l'une quelconque des formules. Mais, arrivons au fait.

Menons les bissectrices tant intérieures qu'extérieures du triangle donné ABC (voir la figure); soit AO_1, BO_2 et CO_3 les

⁽¹⁾ Voir sa note publiée dans la *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht*, année 1887, p. 265 et 266.

⁽²⁾ *Österr. Zeitschrift für das Realschulwesen*, année 1893, p. 460, 461.

trois bissectrices intérieures, O_2O_3 , O_3O_1 et O_1O_2 les trois bissectrices extérieures, soient encore $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\lambda}{2}$ les demi-angles du triangle ABC.

1. Pour trouver la valeur de $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, il suffit de comparer les deux triangles semblables OCO_2 et OBO_3 ; le premier nous donne $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OC}{OO_2}$, et le deuxième $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{OO_3}$; on en déduit, en multipliant membre à membre :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{OC}{OO_2} \cdot \frac{OB}{OO_3} = \frac{OC}{OO_3} \cdot \frac{OB}{OO_2}.$$

Si, d'autre part, on projette les points O et O_3 sur l'un des côtés CB ou CA, on voit que

$$\frac{OC}{OO_3} = \frac{(s-c)}{c}$$

en désignant par s le demi-périmètre du triangle; de même si l'on projette les points O et O_2 sur l'un des côtés BA ou BC, on voit que

$$\frac{OB}{OO_2} = \frac{(s-b)}{b}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, on a enfin :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)}{b} \cdot \frac{(s-c)}{c}.$$

2. En employant les triangles OCO_2 et O_1BO_2 , on arrivera d'une façon analogue à la formule de $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

On a, en effet, dans le triangle OCO_2 :

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2C}{O_2O}$$

et dans le triangle O_1BO_2 :

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2B}{O_2O_1}$$

d'où, par multiplication :

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{O_2C}{O_2O} \cdot \frac{O_2B}{O_2O_1} = \frac{O_2C}{O_2O_1} \cdot \frac{O_2B}{O_2O}.$$

Projetant les points O_1 et O_2 sur CB ou CA , les points O et O_2 sur BC ou BA , on trouve :

$$\frac{O_2C}{O_2O_1} = \frac{(s-a)}{c} \text{ et } \frac{O_2B}{O_2O} = \frac{s}{b},$$

ce qui donne la formule cherchée :

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{b \cdot c}.$$

3. Enfin, pour trouver $\operatorname{tg} \frac{2\alpha}{2}$, il suffit de considérer les triangles OCO_2 et O_1CO_3 , qui nous donnent :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{OC \cdot O_1C}{O_2C \cdot O_3C} = \frac{OC}{O_3C} \frac{O_1C}{O_2C};$$

mais

$$\frac{OC}{O_3C} = \frac{(s-c)}{s}, \text{ et } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{(s-b)}{(s-a)}$$

ainsi qu'on le reconnaît aisément par projection ; d'où il suit

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}.$$

On obtiendrait plus rapidement cette dernière formule en formant le quotient $\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, mais je tenais tout d'abord à montrer la généralité de la méthode, en l'appliquant aussi à ce cas, et à indiquer ensuite un nouveau moyen de déterminer ρ ; il suffit, en effet, pour l'obtenir de remplacer dans la dernière formule $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\rho}{(s-a)}$.

Reste maintenant à exposer brièvement que cette méthode fournit un moyen mémnotechnique pour retrouver ces formules ; il repose sur la définition même des fonctions trigonométriques. Par exemple : pour trouver le second triangle qui, avec OCO_2 , nous donnera la démonstration de la formule du $\sin \frac{\alpha}{2}$, on prolonge dans le triangle OCO_2 , le côté opposé à $\frac{\alpha}{2}$ et l'hypoténuse, et l'on obtient le triangle OBO_3 . Pour $\cos \frac{\alpha}{2}$, on prolongerait le côté adjacent à $\frac{\alpha}{2}$ et l'hypoténuse et pour $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, les deux côtés de l'angle droit.

Bien que ce qui suit n'appartienne plus, à vrai dire, à mon sujet, le lecteur me permettra d'indiquer, en terminant, une méthode nouvelle, à ce que je crois, pour déterminer le rayon du cercle ex-inscrit au triangle donné ABC. Calculons, par exemple, le rayon ρ_2 du cercle de centre O_2 .

Menons O_2X parallèle à AO_1 ; on voit alors que

$$\rho_2^2 = (s - c) \cdot \overline{F_2X}.$$

On obtiendra $\overline{F_2X}$ en remarquant que les triangles semblables OFA et O_2F_2X sont homothétiques, et ont pour centre d'homothétie P et pour rapport d'homothétie $\frac{\rho}{\rho_2} = \frac{(s-b)}{s}$; le côté $\overline{F_2X}$ est donc l'homologue de \overline{FA} , et comme ce dernier égale lui-même $(s-a)$, on a

$$\overline{F_2X} = (s-a) \frac{s}{(s-b)}$$

d'où finalement

$$\rho_2^2 = \frac{s(s-a)(s-c)}{(s-b)}.$$

FRZ. REDL (Viehofen, Basse-Autriche).

NOTION DE L'INFINI EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A PROPOS D'UN ARTICLE DE M. RIPERT (1)

La Géométrie élémentaire a heureusement échappé jusqu'ici aux innovations qui, sous couleur de progrès scientifique, ont entraîné les mathématiques spéciales dans une voie dangereuse. Aussi suis-je bien loin de partager l'opinion de M. Ripert sur l'introduction, dans la Géométrie élémentaire, de l'infini, au sens que M. Ripert donne à ce mot.

(1) Voir n° 2, 2^e année, de *l'Enseignement mathématique* (15 mars 1900).