Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1900)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE DE LA FORMULE DE TAYLOR
Autor: Hatzidakis, J. N.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3583

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

Résoudre l'équation $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \log\lambda = 0{,}48502$$

$$\operatorname{sh} a = -\frac{3}{\lambda}, \log(-\operatorname{sh} a) = \underline{1}{,}99210, \quad a = -0{,}86857$$

$$\frac{a}{3} = -0{,}28952, \quad \log\operatorname{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \bar{1}{,}46772, \quad \log\operatorname{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0{,}01796$$

$$\log(-x_1) = \bar{1}{,}95274$$

$$\log\frac{x_3 - x_2}{i} = \log\lambda + \log\sqrt{3} + \log\operatorname{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0{,}74153$$

$$-x_1 = 0{,}8969$$

$$x_2 + x_3 = 0{,}8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5{,}5148$$

$$x_1 = -0{,}8969$$

$$x_2 = 0{,}44845 - 2{,}7574\,i$$

$$x_3 = 0{,}44845 + 2{,}7574\,i.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.

2. Considérons d'abord la différence

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x)\equiv\Gamma$$

entre l'accroissement de la fonction et sa différentielle. Si, dans l'expression

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\varepsilon\sigma'(x)-\Gamma,$$

nous remplaçons ε par une variable ω et que nous multipliions Γ par $\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2$, nous aurons la fonction suivante de ω

$$\sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\omega\sigma'(x)-\Gamma\frac{\omega^2}{\varepsilon^2},$$

qui, par la manière même dont elle a été construite, s'annule pour $\omega=0$ et $\omega=\varepsilon$; sa dérivée

$$\sigma'(x+\omega)-\sigma'(x)-2\Gamma\frac{\omega}{\varepsilon^2}$$

s'annule donc pour une valeur ε_1 de ω $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$; mais, comme elle s'annule aussi pour $\omega=0$, sa dérivée

$$\sigma''(x+\omega)-2\Gamma\frac{1}{\varepsilon^2}$$

s'annulera, elle aussi, pour une valeur ε_2 de ω $(0<\varepsilon^2<\varepsilon_1)$, c'est-à-dire qu'on aura

$$\Gamma=\frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2),$$

d'où

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\frac{\varepsilon}{1}\sigma'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2).$$

3. Considérons maintenant, en général, la différence

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)-\frac{\varepsilon}{1!}\sigma'(x)-\frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x)-\frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(x)-\ldots$$
$$\ldots-\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)\equiv\Gamma.$$

Nous pouvons, de la même manière qu'auparavant, former la fonction suivante de ω

$$(1)\quad \sigma(x+\omega)-\sigma(x)-\frac{\omega}{1!}\sigma'(x)-\frac{\omega^2}{2!}\sigma''(x)-\ldots-\frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)-\Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}},$$

dont les dérivées successives jusqu'à l'ordre $r+1$ sont les suivantes

$$\sigma'(x+\omega)-\sigma'(x)-\frac{\omega}{1!}\sigma''(x)-\frac{\omega^2}{2!}\sigma'''(x)-\ldots-(r+1)\,\omega^r\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma''(x+\omega)-\sigma''(x)-\frac{\omega}{1}\sigma'''(x)-\ldots-(r+1)\,r\omega^{r-1}\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma'''(x+\omega)-\sigma'''(x)-\frac{\omega}{1}\sigma''''(x)-\ldots-(r+1)\,r(r-1)\,\omega^{r-2}\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma^{(r)}(x+\omega)-\sigma^{(r)}(x)-2.3\ldots r\,(r+1)\,\omega\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma^{(r+1)}(x+\omega)-\sigma^{(r+1)}x-1.2\ldots r\,(r+1)\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}}.$$

Ces dérivées s'annulent toutes (excepté la dernière) pour $\omega=0$ et, comme la fonction (1) s'annule pour les deux valeurs de ω : $\omega=0$, $\omega=\varepsilon$, sa dérivée première s'annulera pour $\omega=\varepsilon_1$ $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$; mais elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée, c'est-à-dire la dérivée seconde de (1), s'annulera pour $\omega=\varepsilon_2$ $(0<\varepsilon_2<\varepsilon_1)$; or, elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée (ou bien la dérivée troisième de (1)) doit s'annuler pour $\omega=\varepsilon_3$ $(0<\varepsilon_3<\varepsilon_2)$, et ainsi de suite; la dernière dérivée (celle de l'ordre $r+1$) s'annulera pour $\omega=\varepsilon_{r+1}$ $(0<\varepsilon_{1+r}<\varepsilon_r<\ldots\ldots<\varepsilon_1)$. On a donc :

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\frac{\varepsilon}{1!}\sigma'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)+$$
$$+\frac{\varepsilon^{r+1}}{(r+1)!}\sigma^{(r+1)}(x+\rho)\,;\quad(0<\rho<\varepsilon).$$

c. q. f. d.

J. N. Hatzidakis (Athènes).

Traduit en français par N.-J. Hatzidakis (Berlin).