DÉFINITION ET DÉTERMINATION ANALYTIQUE DES FOYERS D'UNE CONIQUE

forme réduite : on peut le remplacer par le premier membre $\Delta(\lambda) = \Delta_1 + \Theta_1\lambda + \Theta\lambda^2 + \Delta\lambda^3$. On développera alors $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ suivant les puissances entières croissantes de λ ; et on égalera à o les m premiers coefficients du développement de $E(\lambda) + E_1(\lambda)\sqrt{\Delta(\lambda)}$ qui en résulte, ce qui donnera m relations linéaires et homogènes entre les coefficients des polynômes E et E_1 : l'annulation de leur déterminant donnera la condition cherchée sous la forme indiquée par Salmon (sections coniques, p. 584).

M. Lelieuvre (Caen).

DÉFINITION ET DÉTERMINATION ANALYTIQUE

DES FOYERS D'UNE CONIQUE

PRÉLIMINAIRES

Pour plus de clarté nous avons divisé cet article en deux parties. Dans la première, nous étudions au point de vue de l'enseignement les diverses définitions qui ont été employées pour désigner les foyers d'une conique. A ces définitions, nous en avons ajouté une nouvelle, qui nous semble destinée à être utilisée dans l'enseignement.

Dans la deuxième partie nous montrons comment cette nouvelle définition conduit *naturellement* à un procédé de détermination des foyers d'une conique, procédé bien plus élégant et plus commode que les procédés connus. Nous y avons présenté nos résultats sous une forme condensée en laissant de côté tous les calculs que le lecteur peut facilement effectuer lui-même. Afin de ne pas trop étendre notre travail, nous n'avons indiqué ce procédé de détermination que dans le cas où la conique est rapportée à des axes coordonnés rectangulaires ; la méthode est d'ailleurs la même dans le cas d'axes obliques.

Ce procédé possède un certain intérêt au point des résultats ;

mais il a surtout un intérêt pédagogique, de même que l'étude des définitions dont il n'est en réalité qu'un complément.

Dans l'exposé de notre travail nous avons utilisé les déterminants; nous avons trouvé avantage à agir ainsi : car, ceux-ci sont d'un emploi fréquent dans l'enseignement supérieur et il existe une tendance très prononcée à les faire entrer dans le premier enseignement de l'Algèbre et de la Géométrie analytique (1). D'ailleurs, pour obtenir les résultats indiqués sans utiliser la théorie des déterminants, il suffit d'apporter à notre exposé quelques légères modifications que le lecteur fera facilement.

I. — Sur la manière de définir les foyers

1. Dans un premier enseignement de la Géométrie analytique le professeur s'attache uniquement à l'étude des points et des droites réelles, tant qu'il n'aborde pas la théorie des sections coniques. Mais une fois qu'il expose cette théorie, il se laisse conduire, en vue d'exprimer des théorèmes absolument généraux, à la considération des points et des droites imaginaires et il applique à ces systèmes imaginaires les propriétés fondamentales bien établies des systèmes réels. De là résultent des inconvénients très graves : car, d'une part l'élève ne se fait pas facilement à la conception de ces êtres géométriques nouveaux qu'il ne peut pas concevoir d'une manière concrète ; d'autre part la difficulté déjà grande de compréhension se trouve devenir insurmontable par l'intervention d'une nouvelle cause : celle de l'extension *rigoureuse et d'une manière élémentaire* de certaines notions, et en particulier de celles qui, comme la notion d'angle et de direction d'une droite, se basent sur la connaissance des fonctions circulaires, au cas où les points et les droites deviennent imaginaires.

Il faut en conclure qu'il convient que dans un *premier* enseignement le professeur s'attache exclusivement à la considération de points et de droites réelles.

Tel n'a pourtant pas été l'opinion générale de ceux qui ont

(1) Plusieurs traités d'Algèbre élémentaire renferment les principes de la théorie des déterminants.

fait des traités de Géométrie analytique destinés à être mis entre les mains des commençants.

Ils ont préféré prendre un terme moyen ; ils ont écarté la considération des droites imaginaires et s'en sont tenus à celle des points imaginaires qui permettaient de donner aux théorèmes relatifs aux coniques réelles une exposition tout à fait générale, moyennant l'exclusion des droites imaginaires, — cela du moins en ce qui concerne certaines propriétés de la conique.

Mais cette manière de faire a eu un effet déplorable ; car, non seulement il a nui à l'unité qui existait lors de la considération exclusive des systèmes réels ; mais en outre, si elle a diminué en une certaine mesure les défauts signalés plus haut, il en est de ceux-ci qui existent encore. D'ailleurs, cette manière de faire est parfaitement inutile ; car elle n'atteint pas son but qui ne peut être qu'un exposé général de la théorie des coniques réelles ; ainsi elle ne donne pas de solution au problème de la détermination des tangentes menées par un point intérieur à la conique, étant donné qu'on écarte la considération des droites imaginaires.

Concluons donc qu'il est désirable que ceux qui commencent l'étude de la Géométrie analytique n'aient à ne s'occuper que d'êtres géométriques qui, bien qu'abstraits, puissent être facilement conçus grâce à la considération des êtres matériels qui sont à notre portée.

Voilà donc ce qui constituerait un premier enseignement de la Géométrie.

Ce premier enseignement doit être assez développé pour que l'élève ait acquis des connaissances suffisantes, et pour qu'il se soit familiarisé avec le langage analytique, afin de pouvoir aborder avec fruit les théories générales de la Géométrie, où entre la considération des systèmes imaginaires.

Ce premier enseignement n'est qu'une introduction.

Nous n'allons pas montrer pourquoi les mathématiciens ont trouvé avantageux d'introduire les imaginaires en Géométrie. Cela nous entraînerait trop loin en dehors de notre sujet. Il nous suffit de constater le fait que, après un premier enseignement, en vient un second qui est définitif et qui nécessite la considération des systèmes imaginaires pour pouvoir donner à un grand nombre de théorèmes le degré de généralité qu'ils comportent.

2. De là résulte que l'on peut se demander comment il convient de définir les foyers d'une conique soit dans le premier enseignement, soit dans l'enseignement supérieur.

Nous avons étudié la réponse qu'il convient de donner à chacune de ces deux questions, et nous donnons ici les résultats de cette étude.

3. Dans un premier enseignement on définit *un foyer d'une conique* en disant que *c'est un point tel que le rapport des distances d'un point quelconque de la courbe à ce point et à une droite fixe du plan est constant ;* cette droite est appelée une *directrice* de la conique. Parfois le concept de foyer d'une conique se présente dans les traités élémentaires *comme étant un point tel que la distance d'un point de la conique à celui-ci est une fonction linéaire invariable des coordonnées du point de la courbe*.

Ces définitions qui sont les seules utilisées dans l'enseignement élémentaire sont bien imparfaites tant au point de vue pédagogique qu'au point de vue de la méthode. Et cela se conçoit : aux notions de diamètre, de centre, de tangente en un point, d'asymptote et de polaire d'un point par rapport à une conique s'ajoutent deux nouvelles notions : celles de foyer et de directrices ; aucun lien ne rattache ces deux nouveaux concepts à l'une des notions fondamentales de la théorie des coniques. Ce fait ne serait pas regrettable si ces deux notions s'introduisaient naturellement dans la théorie. Mais il n'en est pas ainsi ; la discussion de l'équation du second degré ne conduit nullement à la connaissance des foyers ni des directrices, et l'existence de ces points et de ces droites n'est seulement bien mise en évidence qu'après avoir établi *rigoureusement* que l'équation générale peut, sauf le cas où elle représente deux droites, se mettre sous une forme spéciale que nous ne rappelons pas.

C'est là un défaut très grave au point de vue pédagogique, et considérable au point de vue de la méthode.

A ce défaut s'en ajoute un autre : celui de ne pas mettre clairement en évidence l'existence des êtres géométriques ainsi conçus, ni par la définition elle-même, ni par des calculs ou des déductions découlant immédiatement de celle-ci. On sait, en effet, que pour montrer l'existence des foyers il faut mettre l'équation de la courbe sous une forme spéciale. Cette opération est très embrouillée ; on ne l'achève d'ailleurs qu'après avoir réduit l'équation de la courbe à sa forme simplifiée, de telle sorte que c'est alors seulement que l'existence des foyers et des directrices apparaît avec clarté. A notre avis, c'est là un défaut des plus grands, parce que, nous semble-t-il, il est presque nécessaire, du moins lorsqu'on s'adresse à des commençants, de montrer l'existence des êtres géométriques immédiatement après qu'on les a définis.

Enfin, remarquons encore que l'emploi des définitions signalées renferme également l'inconvénient que voici : les notions de foyers et de directrices ainsi conçues ne s'étendent pas aux courbes planes algébriques d'un ordre ou d'une classe quelconque ; elles ne s'adaptent qu'à la considération d'une conique.

Les défauts que nous venons de signaler ne sont pas assez graves pour qu'il faille écarter ces définitions et se résoudre à ne parler dans un premier enseignement ni des foyers ni des directrices. Mais ces défauts devaient faire tendre les efforts des mathématiciens à rechercher une définition, la plus parfaite possible, et dont la compréhension puisse se faire par des commençants, afin qu'elle puisse remplacer dans l'enseignement les définitions imparfaites qui y ont été conservées faute de mieux.

Ces efforts ont été tentés par les mathématiciens, mais jusqu'ici, n'ont pas été couronnés de succès. Plücker parvint bien, il est vrai, à trouver une notion de foyer qui pouvait s'étendre à une courbe plane quelconque. Pour lui, les foyers d'une courbe sont les points pour lesquels deux tangentes menées en ce point à la courbe ont $+ i$ et $- i$ pour coefficients angulaires, les axes des coordonnées cartésiennes étant rectangulaires. Mais, étant donné que dans un premier enseignement il fallait écarter la considération des droites imaginaires, on ne put penser à utiliser cette définition.

4. J'ai de mon côté étudié la question, et grâce à la méthode

que j'ai employée, je suis parvenu à pouvoir proposer, pour les foyers, une nouvelle définition qui me semble entièrement satisfaisante.

Voici comment on est logiquement conduit à cette nouvelle définition.

La notion de polaire d'un point par rapport à une conique conduit immédiatement à celle de deux droites conjuguées par rapport à cette conique. On appelle ainsi deux droites telles que le pôle de l'une se trouve sur l'autre; si elles se coupent en un point tel que de ce point on puisse mener deux tangentes à la conique, le système des deux tangentes et des deux droites conjuguées constitue un faisceau harmonique.

Parmi ces faisceaux le plus intéressant à considérer est celui où deux des droites conjuguées sont perpendiculaires entre elles; car on sait que dans ce cas elles sont les bissectrices des deux angles formés par les deux autres droites du faisceau.

On sait aussi que la réciproque a lieu.

On voit donc que si l'on considère le point de rencontre de deux tangentes quelconques à une conique et les deux bissectrices des deux tangentes, ces bissectrices seront deux droites conjuguées rectangulaires; et il n'existe qu'un système de droites pareilles se rencontrant en ce point.

On peut se demander s'il n'existe pas des droites conjuguées perpendiculaires se coupant en un point, duquel on ne pourrait pas mener des tangentes à la conique. On est ainsi conduit à l'étude du problème de la détermination d'un système (ou des systèmes) de deux droites conjuguées rectangulaires passant par un point quelconque donné.

La solution de ce problème est facile.

Plaçons-nous dans le cas où la conique est définie par une équation en coordonnées cartésiennes, les axes coordonnées étant rectangulaires. Soient α et β les coordonnées du point donné, et

$$y - \lambda x - (\beta - \alpha\lambda) = 0, \qquad x + \lambda y - (\alpha + \beta\lambda) = 0,$$

les équations de deux droites rectangulaires qui s'y coupent.

La condition nécessaire et suffisante pour que ces droites soient conjuguées par rapport à la conique $f(x, y, z) = 0$ est que λ satisfasse à la relation

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & 1 \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} & \lambda \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} & -(\alpha+\beta\lambda) \\ \lambda & -1 & \beta-\alpha\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant, et en posant.

$$Q = \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$$2P = \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - 2\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} - 2\alpha \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yy} & f''_{yz} \end{vmatrix} + (\alpha^2-\beta^2) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix},$$

$$Q(1-\lambda^2) + 2P\lambda = 0.$$

Comme cette équation admet toujours deux racines réelles, on peut en déduire qu'étant donné un point (α, β) il existe toujours un système unique de deux droites conjuguées passant par ce point, sauf toutefois si le point est tel que l'on ait simultanément

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Alors tout système de deux droites rectangulaires passant par ce point constitue un système de deux droites conjuguées. Nous appellerons ces points des FOYERS de la conique ; de sorte que, pour nous, *un foyer d'une conique est un point tel que tout système de deux droites rectangulaires qui s'y rencontrent constitue un système de deux droites conjuguées par rapport à la conique* (¹).

L'existence des foyers d'une conique résulte donc de la détermination des solutions réelles communes aux deux équations

$$P = 0 \qquad Q = 0.$$

Cette détermination peut se faire d'une manière très commode et très élégante ; elle est indiquée dans la deuxième partie de cet article. On peut ainsi établir immédiatement l'existence des points que nous venons de définir.

(¹) Cette propriété des foyers d'une conique est très connue, mais on n'a jamais songé à l'utiliser comme définition du foyer.

D'après les détails qui précèdent nous avons pu constater que la définition que nous proposons aux géomètres pour indiquer la notion de foyer d'une conique s'introduit tout naturellement dans la théorie des sections coniques.

Cette notion ainsi présentée est d'ailleurs susceptible d'être facilement comprise par ceux qui commencent l'étude de la Géométrie analytique ; en plus elle est susceptible de s'étendre à une courbe algébrique plane quelconque.

Le seul défaut pédagogique qu'elle pourrait renfermer consisterait dans la difficulté d'établir d'une manière facile, en partant de la nouvelle notion de foyer, les principales propriétés métriques dont jouissent les foyers d'une conique et qu'il convient de signaler, même dans une première étude de ces courbes. Mais ce défaut n'existe pas ; car nous allons montrer que la nouvelle définition conduit immédiatement à deux théorèmes, sur lesquels on peut faire reposer toute l'étude des propriétés métriques des foyers d'une conique.

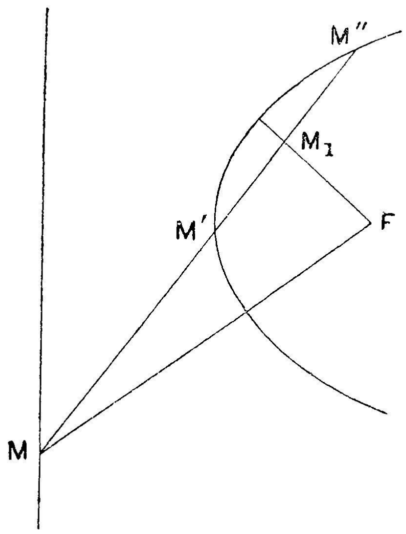

Fig. 1.

A cet effet, notons que les foyers étant des points particuliers du plan, les polaires de ces points seront des droites particulières auxquelles il convient de donner une dénomination : nous les appellerons des *directrices*.

Cette nouvelle notion permet d'exprimer le théorème que voici, grâce à la restriction que, ni le foyer, ni la directrice correspondante ne sont situés à l'infini dans le plan :

Si une sécante M′ M″ *coupe en* M *la directrice correspondant à un foyer* F, *la droite* MF *est une bissectrice de l'angle* M′FM″.

En effet, si l'on mène par F une perpendiculaire FM_1 à FM, on a un système de deux droites conjuguées. Les quatre droites MF, M_1 F, M′ F et M″ F constituent donc un faisceau harmonique dont deux droites conjuguées sont perpendiculaires entre elles. Ces dernières droites sont donc les bissectrices de l'angle M′FM″ formées par deux autres droites du faisceau et en particulier MF est une des bissectrices de cet angle.

De cette propriété découle immédiatement le théorème suivant :

Le rapport des distances d'un point d'une conique ou foyer et à la directrice correspondante est constant.

Car MF étant une bissectrice de l'angle M′ F M″, il vient, d'après un théorème connu de la Géométrie élémentaire

$$\frac{M'F}{M''F} = \frac{M'M}{M''M}.$$

Si des points M′ et M″ on abaisse des perpendiculaires sur la directrice, et si on appelle m' et m'' les pieds de ces perpendiculaires, la considération des deux triangles semblables $MM'm'$ et $MM''m''$ donne

$$\frac{M'M}{M''M} = \frac{M'm'}{M''M''}.$$

La comparaison des deux dernières relations donne ensuite

$$\frac{FM'}{FM''} = \frac{m'M'}{m''M''} \quad \text{ou} \quad \frac{FM'}{m'M''} = \frac{FM''}{m''M''}.$$

Cette dernière égalité conduit immédiatement à la propriété énoncée. Cette propriété conduit elle-même à toutes les autres propriétés métriques fondamentales du foyer.

Je crois donc avoir établi d'une manière évidente qu'il convient dans un premier enseignement de la Géométrie analytique de définir le foyer d'une conique par la notion de deux droites conjuguées.

5. Il s'agit maintenant d'aborder la même question lorsqu'on se place au point de vue de l'enseignement supérieur.

Dans cet enseignement l'élève est censé être familiarisé avec la considération des points, des droites et des courbes imaginaires. La définition proposée par Plücker peut donc être utilisée dans un tel enseignement, à la condition qu'elle s'introduise naturellement dans la théorie. Les géomètres se sont peu préoccupés de cette question, qui a pourtant une importance capitale au point de vue des méthodes. Il convenait en effet de montrer comment on en est arrivé, en suivant un ordre logique, à s'attacher spécialement à l'étude des points que l'on obtient par l'intersection de tangentes spéciales à une conique : les tangentes de direction $+ i$ et $- i$ quand elles sont rapportées à des axes coordonnés rectangulaires.

Pour introduire naturellement la notion de foyer dans la théorie des coniques, on peut procéder d'une manière identique à celle que nous avons proposé de suivre dans un premier enseignement.

On part de la considération de deux droites conjuguées par rapport à une conique. Elles forment toujours avec les tangentes, menées de leur point d'intersection à la courbe, un faisceau de quatre droites en situation harmonique.

Parmi ces systèmes, le plus simple est celui où deux des droites conjuguées sont perpendiculaires entre elles. On sait que dans ce cas elles sont les bissectrices des deux angles formés par les deux autres droites du faisceau, *sauf si ces dernières droites ont pour coefficients angulaires* + i *et* — i, *lorsqu'elles sont rapportées à des axes rectangulaires* (¹). Dans ce dernier cas, tout système de deux droites perpendiculaires forme avec les deux droites de direction $+ i$ et $- i$ un faisceau harmonique, et cette propriété ne peut avoir lieu que dans ces conditions.

Deux propriétés apparaissent en même temps par la simple application de ce qui précède à la considération d'une conique. On les énonce en disant que :

1° *Les intersections des tangentes de direction* + i *et* — i *sont des points tels que deux droites rectangulaires quelconques passant par ces points forment un système de deux droites conjuguées par rapport à la conique ;*

2° *Les points tels que tout système de deux droites perpendiculaires qui s'y coupent constitue un système de deux droites conjuguées par rapport à la conique sont aussi tels que les deux tangentes menées par ce point sont de direction* + i *et* — i.

Pour l'étude de ces points, on leur donnera un nom spécial : *foyer*.

On voit ainsi qu'en suivant un ordre logique on est conduit à

(¹) Ces droites sont appelées *droites isotropes;* les deux points situés à l'infini sur celles-ci s'appellent *points circulaires ou cycliques.*

définir les foyers, soit en utilisant la définition de Plücker, soit en utilisant la nouvelle définition que nous avons déjà proposée pour le premier enseignement de la Géométrie.

Chacune de ces deux notions s'introduit naturellement dans la théorie des sections coniques : c'est l'unique condition à laquelle on puisse les astreindre au point de vue méthodologique ; néanmoins, même au point de vue de la méthode, il est avantageux de ne pas être obligé à changer de notion quand on veut définir les foyers d'une courbe quelconque. C'est ce qui arrive ici, car chacune de ces deux notions s'étend à une courbe quelconque : mais, si la définition de Plücker n'est susceptible que d'une seule généralisation, la nôtre peut s'étendre aux courbes planes algébriques de deux manières différentes. Ces deux généralisations sont basées sur l'extension à une courbe de la notion de deux droites conjuguées par rapport à celle-ci ; nous avons trouvé des résultats dans cette voie, mais le sujet que nous traitons actuellement ne nous permet pas de les indiquer dans ce travail.

Les deux définitions précédentes semblent à première vue ne pas pouvoir conduire facilement aux propriétés *métriques* des foyers d'une conique. Pourtant, ces propriétés s'en déduisent aisément.

Nous avons déjà montré plus haut qu'il en est ainsi pour la définition que nous proposons.

Quant à la définition de Plücker, elle conduit aussi d'une manière facile à ces propriétés métriques. Dans son beau travail *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires* (²), M. G. Darboux, grâce à la notion des points associés et à l'étude de leurs propriétés essentielles, parvient à déduire facilement de la définition de Plücker et d'un théorème de Chasles établissant que le rapport anharmonique de quatre points où une tangente mobile rencontre quatre tangentes fixes est constant, parvient à en déduire des propriétés métriques des foyers, desquelles se déduisent les autres propriétés métriques de ces points.

En opérant ainsi, le savant géomètre français a eu pour but de rattacher d'une manière directe aux propositions générales de

(¹) Pages 61-65.

la théorie des coniques la démonstration des propriétés métriques des foyers. Sans les rattacher à ces théorèmes généraux, et sans l'emploi des points associés, on peut établir très simplement ces propriétés métriques en notant que l'équation des tangentes menées d'un point (α, β, γ), où $\gamma = 1$, à une conique $f(x, y, z) = o$ est

$$(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - 4f(\alpha\beta\gamma)\, f(xyz) = 0.$$

Si le point (α, β, γ) est un foyer, les tangentes passant par ce point ont pour coefficients angulaires $+ i$ et $- i$, les axes coordonnés étant rectangulaires. On voit donc qu'on doit avoir

$$4f(\alpha, \beta, \gamma)\, f(x, y, z) = (xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - c\,[(x - \alpha)^2\, (y - \beta)^2],$$

c étant une constante.

Cette équation montre que *le rapport des distances d'un point de la conique au foyer et à la directrice correspondante est constant*, pourvu que le foyer n'appartienne pas à la courbe. Ce dernier cas ne se présente que lorsque la conique dégénère en un système de deux droites. Le théorème énoncé permet d'établir les autres propriétés métriques focales.

On voit donc combien la définition des foyers proposée par Plücker et la nôtre sont parfaites au point de vue de la méthode : c'est l'une de celles-ci qui, nous semble-t-il, doit être utilisée dans l'enseignement supérieur.

II. — Détermination analytique des foyers

6. Partant de la définition : (ou si l'on veut de la propriété) un foyer d'une conique est un point tel que deux droites perpendiculaires quelconques qui s'y rencontrent constitue un système de deux droites conjuguées par rapport à la courbe, nous allons indiquer un procédé de détermination *sans changement d'axes coordonnés* des foyers, d'une conique dans les cas où celle-ci est définie par une équation soit en coordonnées cartésiennes ordinaires, soit en coordonnées cartésiennes tangentielles.

7. *Coordonnées cartésiennes ordinaires.* — Considérons une

conique représentée par une équation homogène du second degré

$$f(x, y, z) = 0,$$

x et y étant les coordonnées courantes d'un point par rapport à des axes rectangulaires, et z étant égal à l'unité.

Soient α et β les coordonnées d'un point F, et

$$y - \lambda x - (\beta - \alpha\lambda) = 0,$$
$$x + \lambda y - (\alpha - \beta\lambda) = 0,$$

les équations des deux droites perpendiculaires qui s'y rencontrent.

Ce système de deux droites varie en même temps que λ. La condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit constamment constitué de deux droites conjuguées par rapport à la conique est que l'expression

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & 1 \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} & \lambda \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} & -(\alpha+\beta\lambda) \\ \lambda & -1 & \beta - \alpha\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

s'annule, quelle que soit la valeur de λ. Cette condition est aussi celle pour que le point F soit au foyer de la conique.

Le développement de ce déterminant peut s'écrire, en posant

$$Q = \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix},$$

$$2P = \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - 2\alpha \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - 2\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} + (\alpha^2 - \beta^2) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}.$$

$$Q(1 - \lambda^2) + 2P\lambda.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que le point F soit un foyer est que ses coordonnées satisfassent simultanément aux deux équations

$$\text{(1)} \qquad P = 0, \qquad Q = 0.$$

La détermination des foyers et la solution de ce système sont donc deux problèmes identiques.

8. Pour simplifier l'écriture, nous poserons :

$$\left.\begin{aligned}
a &= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \qquad
b = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} \qquad
c = \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{xy} \\ f''_{yz} & f''_{xz} \end{vmatrix} \\
d &= \begin{vmatrix} f''_{yz} & f''_{xy} \\ f''_{zz} & f''_{xz} \end{vmatrix} \qquad
f = \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} (\omega_2).$$

Représentant les coordonnées α et β par x et y et utilisant les relations précédentes, le système des équations (1) prend la forme

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{aligned} Q &= axy + bx + cy + d = 0, \\ 2P &= a(x^2 - y^2) + 2cx - 2by + f = 0. \end{aligned}\right.$$

Les racines de ces deux équations satisfont à l'équation

$$2P + 2\mu Q = a(x^2 - y^2 + 2\mu xy) + 2x(c + b\mu) - 2y(b - c\mu) + f + 2\mu d = 0,$$

μ étant une constante arbitraire.

Donnons à cette constante une valeur telle que le premier membre de l'équation précédente se décompose en deux facteurs linéaires. Il convient à cet effet de donner à μ une valeur racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} a & \mu a & c + b\mu \\ \mu a & -a & -(b - c\mu) \\ c + b\mu & -(b - c\mu) & f + 2d\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du troisième degré ; mais ses racines se calculent très facilement : cette équation peut s'écrire, en développant le déterminant précédent et en laissant de côté les déterminants qui sont identiquement nuls :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} \mu^3 + \begin{vmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & -b \\ b & c & f \end{vmatrix} \mu^2 + \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -a & c \\ c & -b & 2d \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\left[\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix}\right] [1 + \mu^2] = 0. \quad \text{(II)}$$

9. Cette équation mise sous cette forme est très remarquable. Elle permet d'abord de mettre facilement en évidence une pro-

priété que nous avons déjà établie très simplement dans la première partie. Cette propriété s'énonce en disant que *les foyers sont les intersections des tangentes menées à la conique par les deux points singuliers (ou circulaires) situés à l'infini dans le plan.*

Pour montrer la vérité de cette proposition, il suffit évidemment de montrer que les équations

$$(2)\quad \begin{cases} 2P + 2iQ = a(x+yi)^2 + 2(c+bi)(x+yi) + f + 2di = 0 \\ 2P - 2iQ = a(x-yi)^2 + 2(c-bi)(x-yi) + f - 2di = 0 \end{cases}$$

représentent chacune deux tangentes de direction $+i$ et $-i$. Voici comment on peut établir facilement ces dernières propriétés :

Considérons, par exemple, un point M situé sur l'une des deux droites $P + iQ = 0$ ou $P = -iQ$. En supposant que ce point M ne soit pas un foyer (ce qui revient à dire que la valeur correspondante de $P(x, y)$ est différente de zéro), on sait que les bissectrices de l'angle formé par les deux tangentes menées par ce point à la conique (le point étant supposé ne pas se trouver sur la conique) ont des coefficients angulaires racines de l'équation

$$Q(1 + \lambda^2) + 2P\lambda = 0$$

Cela a lieu en vertu de ce qui est dit au n° 4.

Dans le cas qui nous occupe, cette équation prend la forme

$$P(1 + \lambda^2 - 2\lambda i) = 0,$$

ou

$$P(1 - \lambda i)^2 = 0.$$

D'ailleurs, P étant différent de zéro, on a une racine double $\lambda = +i$.

Les deux bissectrices de l'angle en question se confondent donc et ont pour direction commune $\lambda = +i$

On doit en conclure que la droite passant par M et faisant partie du système $P + iQ = 0$ est une tangente à la courbe.

10. Il est utile de faire remarquer que les deux équations (2) précédentes ramènent la détermination des foyers à la résolution de deux équations du second degré, qui malheureusement sont compliquées de coefficients imaginaires. Aussi, dans le cas ou l'équa-

tion $f(x, y, z) = 0$ de la conique ne renferme pas de coefficients imaginaires, il est préférable, nous semble-t-il, de procéder autrement.

11. On considérera la troisième racine de l'équation (II). Elle est donnée par la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = 0, \tag{III}$$

équation que l'on transformera en ayant égard aux relations (ω_2).

Il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} = -2a(ad-bc) = +2f''_{xy} \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = a(c^2-b^2-af)(f''_{xx}-f''_{yy}) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

Si

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = 0,$$

la courbe est une parabole ; elle n'a qu'un foyer qui se détermine par la solution du système (1) constitué alors de deux équations linéaires.

Si

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0;$$

la courbe se compose de deux droites, de même que toutes les coniques $P + \mu Q = 0$. Mais ces coniques ont toutes le même centre que la courbe $f(x, y, z) = 0$.

On en déduit que les droites $P + \mu_1 Q = 0$ sur lesquelles sont situés les foyers ne peuvent rencontrer les droites $P + \mu_2 Q = 0$, auxquelles appartiennent également les foyers qu'en un point : le point d'intersection des deux droites $f(x, y, z) = 0$.

Par suite, une conique se réduisant à deux droites n'a qu'un foyer ; sont point double unique. Si les droites sont parallèles, le foyer est à l'infini.

Enfin, si aucun de ces cas ne se présente, la relation (III) prend la forme

$$\mu = -\frac{f''_{xx} - f''_{yy}}{f''_{xy}}.$$

Pour cette valeur de μ, l'équation

$$P + \mu Q = 0$$

représente deux droites passant par le centre de la conique $f = 0$ et parallèles aux deux droites

$$x^2 - y^2 - \frac{f''_{xx} - f''_{yy}}{2f''_{xy}} xy = 0.$$

Ces deux droites sont donc les axes de la conique.

Donc, *les foyers d'une conique sont situés sur ses axes.*

Pour déterminer les foyers d'une conique, on commencera donc par voir si la courbe ne se réduit pas a une parabole ou à deux droites. S'il en est ainsi, on procède comme il a été dit plus haut concernant ces cas spéciaux. S'il n'en est pas ainsi, la courbe admet deux axes dont on déterminera chacune des équations. On combinera ensuite chacune de celles-ci avec l'une des équations (1).

La détermination se fait ainsi par la résolution de deux systèmes de deux équations dont l'une est du premier degré et l'autre du second par rapport aux inconnues.

On emploie cette méthode sans aucune modification dans le cas général ; mais dans certains cas particuliers, on peut pour la rapidité des calculs utiliser les relations (1) mises sous la forme (¹)

$$Q = f'_x f'_y - 2ff''_{xy} = 0$$
$$2P = f'^2_x - f'^2_y - 2f(f''_{xx} - f''_{yy}) = 0.$$

(¹) Pour vérifier ces résultats il suffit de remplacer dans ces équations $2f$, f'_x et f'_y respectivement pour chacune des expressions

$$x^2 f''_{xx} + y^2 f''_{yy} + z^2 f''_{zz} + 2xyf''_{xy} + 2xyzf''_{xz} + 2yzf''_{yz},$$
$$xf''_{xx} + yf''_{yx} + zf''_{zx},$$
$$xf''_{xy} + yf''_{yy} + zf''_{zy}$$

d'effectuer les opérations indiquées et de réduire à leur forme la plus simple les expressions ainsi obtenues de $f'_x f'_y - 2ff''_{xy}$ et de $f'^2_x - f'^2_y - 2f(f''_{xx} - f''_{yy})$.

D'après ces équations, on voit que si $f''_{xy}=0$ et si $f''_{xx}=f''_{yy}$, il n'existe qu'un foyer qui est le centre du cercle représenté par $f(x, y, 5)=0$.

Si $f''_{xy}=0$, on obtient les foyers par la solution de chacun des deux systèmes

$$\begin{aligned} &f'_x = 0 &&\text{et} && f'_y = 0 \\ &f'^2_y - 2f(f''_{yy} - f''_{xx}) = 0 && && f'^2_x - 2f(f''_{xx} - f''_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

Si $f''_{xx}=f''_{yy}$; les coordonnées des foyers sont les racines des deux systèmes.

$$\begin{aligned} &f'_x f'_y - 2ff''_{xy} = 0 &&\text{et} && f'_x f'_y - 2ff''_{xy} = 0 \\ &f'_x + f'_y = 0 && && f'_x - f'_y = 0. \end{aligned}$$

12. *Coordonnées cartésiennes tangentielles.* — Afin de résoudre le même problème en coordonnées tangentielles, considérons deux droites perpendiculaires d_1 (u_1, v_1) et d_2 (u_2, v_2), se rencontrant en un point fixe F représenté par l'équation

$$au + bv + 1 = 0.$$

On a donc, les axes coordonnés étant supposés rectangulaires,

$$\begin{aligned} u_1u_2 + v_1v_2 &= 0, \\ au_2 + bv_2 + 1 &= 0, \\ au_1 + bv_1 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent

$$\frac{u_2}{-v_1} = \frac{v_2}{u_1} = \frac{1}{av_1 - bu_1}.$$

Cherchons la condition pour que les droites d_1 et d_2 soient deux droites conjuguées. Le pôle de d_2 est

$$u_2f'_u + v_2f'_v + f'_w = 0,$$

ou

$$-v_1f'_u + u_1f'_v + (av_1 - bu_1)f'_w = 0.$$

Ce pôle se trouvant sur d_1, on doit avoir

$$-v_1f'_{u_1} + u_1f'_{v_1} + (av_1 - bu_1)f'_{w_1} = 0,$$

ou, en tenant compte des relations,

$$f'_{u_1} = u_1 f''_{uu} + v_1 f''_{uv} + f''_{uw},$$
$$f'_{v_1} = u_1 f''_{uv} + v_1 f''_{vw} + f''_{vw},$$
$$f'_{w_1} = u_1 f''_{uw} + v_1 f''_{vw} + f''_{ww},$$

et

$$au_1 + bv_1 = -1,$$
$$-v_1(u_1 f''_{uu} + v_1 f''_{uv}) + u_1(u_1 f''_{uv} + v_1 f''_{vv}) + (av_1 + bu_1)(u_1 f''_{uw} + v_1 f''_{vw})$$
$$-\left[-v_1 f''_{uw} + u_1 f''_{vw} + (av_1 - bu_1) f''_{ww}\right](au_1 + bv_1) = 0.$$

Les diverses propriétés énoncées devant avoir lieu, quelle que soit la position de la droite d_1, pourvu que cette droite passe constamment par F, il faut et il suffit que la relation précédente ait lieu quelles que soient les valeurs de u_1 et de v_1.

On trouve ainsi, en égalant à zéro les coefficients de u_1^2, $u_1 v_1$ et v_1^2, les trois équations de condition

$$f''_{uv} - bf''_{uw} - af''_{vw} + abf''_{ww} = 0,$$
$$-f''_{uu} + f''_{vv} + af''_{uw} - bf''_{vw} + af''_{uw} - bf''_{vw} - a^2 f''_{ww} + b^2 f''_{ww} = 0,$$
$$-f''_{uv} + af''_{vw} + bf''_{uw} - abf''_{ww} = 0.$$

Les coordonnées (a, b) des foyers de la conique $f(u, v, w) = 0$ sont donc les racines du système

$$(1')\quad \begin{cases} abf''_{ww} - af''_{vw} - bf''_{uw} + f''_{uv} = 0, \\ (a^2 - b^2) f''_{ww} - 2af''_{uw} + 2bf''_{vw} + f''_{uu} - f''_{vv} = 0 \text{ (1)}. \end{cases}$$

On voit d'abord que si $f''_{ww} = 0$, il n'y a qu'un foyer qui s'obtient par la solution de deux équations (1′) qui sont linéaires ; on sait que la courbe se réduit alors à une parabole.

Si la courbe n'est pas une parabole, on procédera, pour résoudre (1′), de la même façon que dans le cas de coordonnées cartésiennes ordinaires.

A cet effet, on notera que les équations (1′) sont de la forme (I).

Si donc on représente par Q et par 2P respectivement les premiers membres des équations (1′), les équations

$$P + iQ = 0 \qquad \text{et} \qquad P - iQ = 0$$

(1) Les relations (1) et (1′) peuvent aussi se déduire immédiatement les unes des autres d'après une transformation connue.

se décomposent chacune en deux facteurs linéaires. Cela a lieu, ainsi que ce que nous avons encore à dire en vertu de ce qui a été établi au n° 10.

Au moyen de ces deux dernières équations, la détermination de a et celle de b se font par la résolution séparée de deux équations du second degré, dont les coefficients sont malheureusément compliqués d'imaginaires.

Aussi, si les cofficients des variables dans l'équation de la conique $f(u, v, w) = 0$ sont tous réels, il est préférable de considérer la valeur du μ, racine de l'équation linéaire

$$\begin{vmatrix} 0 & f''_{ww} & -f''_{vw} \\ f''_{ww} & 0 & -f''_{uv} \\ -f''_{vw} & -f''_{uw} & 2f''_{uv} \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} f''_{ww} & 0 & -f''_{uw} \\ 0 & -f''_{ww} & f''_{vw} \\ -f''_{uw} & f''_{vw} & f''_{uu}-f''_{vv} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en divisant le premier membre par f''_{ww}.

$$2\begin{vmatrix} f''_{uv} & f''_{vw} \\ f''_{uw} & f''_{ww} \end{vmatrix} \mu - \left[f''^2_{uw} - f''^2_{vw} - (f''_{uu} - f''_{vv})\, f''_{ww} \right] = 0.$$

Pour cette valeur de μ l'équation $P + \mu Q = 0$ se décompose en deux facteurs linéaires.

Pour obtenir les coordonnées (a, b) des points foyers, on combinera chacun de ces facteurs égalés à zéro avec l'une des équations $(1')$. La solution du problème se fait ainsi au moyen de deux systèmes d'équations, dont l'une est du premier, l'autre du second degré par rapport aux inconnues.

Notons encore que, d'après l'équation linéaire qui donne la valeur de μ et d'après ce qui est dit au *n*° 11, la condition nécessaire et suffisante pour que la conique $f(u, v, w) = 0$ rapportée à des axes coordonnés rectangulaires se réduise à un cercle est que l'on ait simultanément

$$\begin{vmatrix} f''_{uv} & f''_{vw} \\ f''_{uw} & f''_{ww} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad f''^2_{uw} - f''^2_{vw} - (f''_{uu} f''_{vv})\, f''_{ww} = 0.$$

L. Van Emelen (Louvain).