NOUVELLES CONSIDÉRATIONS SUR LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

Autor(en): **Frolov, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3570

NOUVELLES CONSIDÉRATIONS
SUR LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

---

1. Dans le numéro 4 d'un précédent article (¹), nous avons supposé, conformément aux indications des savants non-euclidiens, qu'en agrandissant le triangle ABC (fig. 3 dudit article) ou, en d'autres termes, en le faisant remonter le long des perpendicu-

---

ranto. Il contient des considérations grammaticales et autres sur la langue, avec des modèles de conversations pratiques, puis une chronique détaillée des progrès de l'Esperanto dans les deux mondes, des publications nouvelles intéressant la langue, des actes de la S. p. p. E., etc. Son *Supplément*, mensuel aussi et de quatre pages du même format, est rédigé exclusivement en Esperanto; on y trouve toujours des articles de littérature proprement dite (nouvelles, etc.). Prix de l'abonnement (pour les personnes ne faisant pas partie de la S. p. p. E.) : France, 3 fr., 4 fr. avec le *Supplément;* Etranger 3 fr. 50 et 4 fr. 50. S'adresser au secrétaire de la S. p. p. E.

III. Les trois ouvrages suivants, de M. le Dr Zamenhof, sont les seuls à la rigueur qui soient nécessaires à l'étude de l'Esperanto :

1° *Manuel complet de la langue internationale Esperanto*, traduction française par M. de Beaufront. Prix (franco) : Fr. 1.50. La partie purement grammaticale est d'une étendue insignifiante comme je l'ai dit, le plus gros se composant principalement de deux lexiques, l'un Esperanto-Français, l'autre Français-Esperanto. Le premier fait en quelque sorte double emploi avec le dictionnaire désigné ci-après ; mais le second est le seul donnant encore la traduction des mots français en Esperanto (V. note (12)). Le surplus de ce très petit volume est consacré à des considérations générales).

2° **Universala vortaro de la lingvo internacia Esperanto.** Prix (franco) : Fr. 1,10 (Tableau par ordre alphabétique, des racines fondamentales de l'Esperanto, traduites en français, anglais, allemand, russe et polonais).

3° **Ekervaro de la linguo internacia Esperanto.** Prix (franco) : Fr. 0,85 (collection de textes typiques et gradués, contenant toutes les tournures propres à la langue, avec des commentaires grammaticaux rédigés dans les cinq langues ci-dessus, 2°).

Mais une lecture un peu suivie de textes Esperanto, de ceux, par exemple, que l'*Espérantiste* apporte chaque mois, est presque indispensable aux personnes qui veulent arriver à écrire bien facilement la langue ; pour la correction de leur style, elles trouveront les meilleurs conseils dans l'excellent opuscule intitulé :

Commentaire sur la grammaire de la langue internationale Esperanto, par M. L. de Beaufront, prix : fr. 2,00, franco fr. 2,25.

(¹) Voir 1900, n° 3, p. 179.

laires Ee, Gg, Kk, ses angles diminuent tous ensemble, jusqu'à devenir nuls simultanément. Pourtant cette supposition présente une nouvelle difficulté. En effet, en faisant descendre le triangle ABC, l'angle C, croîtra graduellement, ayant pour limite supérieure deux angles droits, tandis que les deux autres angles A et B décroîtront nécessairement de plus en plus et deviendront nuls à l'infini. Il en résulte qu'inversement, quand le triangle remonte, les angles A et B croîtront graduellement, de sorte qu'on aura d'abord $C = 4A$, puis $C = 2A$ et enfin $C < 2A$, avant l'anéantissement de l'angle C. Alors les trois perpendiculaires médianes, supposées asymptotes entre elles, se couperont inévitablement. Pour échapper à cette nouvelle difficulté, les non-euclidiens devraient prouver que les angles A et B ne croîtront que jusqu'à une certaine limite, ce qui est impossible, car cette nouvelle hypothèse est contraire à la loi de continuité.

2. On sait que, selon leur doctrine, l'asymptote commune aux deux côtés d'un angle est symétrique par rapport à sa bissectrice et que, par conséquent, elle doit être située semblablement par rapport aux deux côtés, c'est-à-dire que tous ses points symétriques doivent être également distants de ces côtés. Or, voici ce qui arrive dans la géométrie non-euclidienne. Considérons trois droites QR, ST, UV, (fig. 1), qui sont asymptotes communes des côtés de trois angles égaux MON, NOP, POM et, par suite, sont asymptotes réciproques. Elles sont symétriques par rapport aux bissectrices Mm, Nn, Pp, qui se coupent en O. Chacune d'elles est située semblablement par rapport aux côtés de l'angle correspondant. Par exemple, la droite UV est située semblablement par rapport aux côtés MO et NO de l'angle MON et, par suite, elle ne peut pas être située semblablement par rapport aux côtés

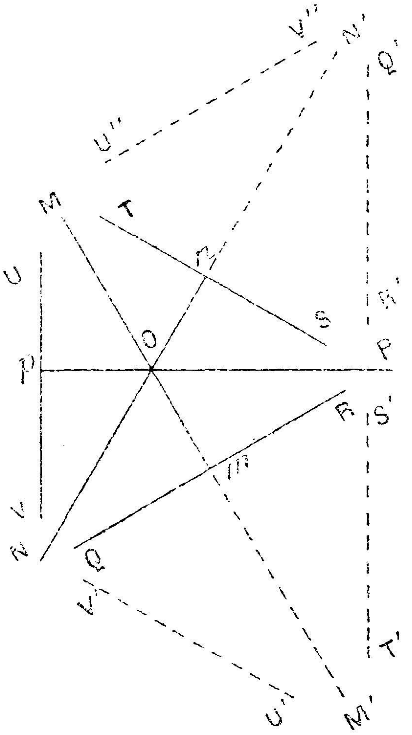

Fig. 1.

d'un autre angle quelconque, dont Pp n'est pas la bissectrice. Retournons maintenant la figure autour de la droite QR et nous aurons quatre asymptotes réciproques ST, UV, U'V' S'T', placées respectivement dans quatre angles droits MmR, MmQ, $M'mQ$, $M'mR$, dont les bissectrices sont autres, que celles des angles en O.

Par conséquent, aucune de ces quatre lignes qui sont, d'après la doctrine, asymptotes de la ligne QR, ne saurait être asymptote commune des deux côtés de l'angle correspondant. Par exemple, UV, qui est asymptote des droites MM' et QR, ne saurait être asymptote commune de ces dernières, dès qu'elles sont considérées comme les côtés de l'angle MmQ, car UV n'est pas située semblablement par rapport à ses côtés. Il y a là une contradiction manifeste, qui révèle la défectuosité de la doctrine non-euclidienne. On le comprendra mieux en effectuant d'autres retournements de la figure. Par exemple, si on la retourne autour de la droite ST, on aura cinq asymptotes réciproques UV, U'V', S'T', Q'R', U''V'' (fig. 2). Or leur disposition générale n'a aucune ressemblance avec celle qu'elles devraient avoir et qui présente l'aspect d'un pentagone régulier, dont les angles sont supposés nuls (fig. 2).

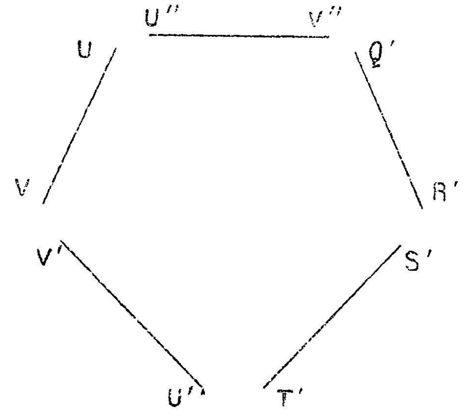

Fig. 2.

3. Il faut rendre justice aux inventeurs de la Géométrie non-euclidienne d'avoir si bien combiné leurs hypothèses qu'il est assez difficile d'y dévoiler des contradictions intrinsèques. Leur secret est très simple : remplacer au besoin les lignes droites par des lignes courbes, tournant leur convexité vers l'intérieur des polygones, sous prétexte de l'insuffisance des définitions de la ligne droite.

Au reste, nous avons signalé dans nos articles quelques cas où leur doctrine semble en défaut. Dans le paragraphe 3 de l'article précédent est exposée une contradiction, ou peut-être un malentendu, qui consiste en ce qu'on ne sait pas au juste ce que deviennent à la limite les côtés du triangle équilatéral ABC qu'on agrandit indéfiniment. Se transforment-ils en trois lignes brisées aOb, bOc, cOa, composées chacune de deux bissectrices, comme l'a déclaré Gauss dans sa lettre à Schumacher, ou bien se transforment-ils en trois asymptotes réciproques QR, ST, UV, comme l'assurent ses commentateurs ? Selon Gauss, les côtés de ce triangle se brisent d'eux-mêmes ; selon ses commentateurs, ils se détachent l'un de l'autre. Dans le paragraphe 4 la contradiction consiste en ce que les lignes droites sont simultanément asymptotes et sécantes réciproques. La contradiction, exposée dans le paragraphe 2 de ce nouvel article, consiste en ce que les droites peuvent en même temps être et ne pas être asymptotes communes des côtés d'un angle.

4. Ces points faibles de la Géométrie non-euclidienne suffisent pour établir : 1° qu'elle est erronée et ne peut être considérée que comme une démonstration par réduction à l'absurde du postulatum ou de l'axiome XI d'Euclide ; 2° que la géométrie d'Euclide et d'Archimède est non seulement *la plus commode*, comme on dit en cette fin de siècle, mais la seule qui soit possible et qui puisse se passer des hypothèses. En outre, elle ne peut pas être multiple, comme ne le peut être non plus l'Arithmétique, à laquelle la Géométrie ne cède en rien sous le rapport de la certitude absolue, et 3° que la nouvelle doctrine créée récemment sous le titre de *Géométrie Générale* ou de *Métagéométrie*, se réduit à la Géométrie d'Euclide et d'Archimède.

Dans un mémoire remarquable, inséré dans le numéro 7 du Bulletin de l'Académie de Bruxellles de l'année passée, M. Ch. Lagrange a établi d'une manière magistrale que *jusqu'ici on n'a pu donner qu'une seule définition de l'espace, qui consacre l'espace que nous connaissons, et que la Métagéométrie a établi le contraire de ce qu'elle prétendait : elle a voulu faire douter de la réalité physique du postulatum d'Euclide et elle a concouru à la démontrer.* » Ce mémoire doit être lu en entier par tous ceux qui s'intéressent sérieusement aux principes de Géométrie. Il est douteux que les partisans de la Métagéométrie soient en état de combattre ses arguments.

5. On se demande involontairement quelle fut la raison de la négation du postulatum d'Euclide, qui fut admis par des géo-

mètres de tant de siècles? A-t-on découvert quelque fait infirmant cette vérité évidente? On se demande encore avec une certaine anxiété comment la nouvelle doctrine, si paradoxale, issue de cette négation, a pu trouver tant de partisans ardents parmi les analystes modernes les plus hardis? — On ne peut expliquer ce fait étrange que par une certaine connexion qui semble exister entre l'invention de la Géométrie non-euclidienne et l'introduction dans l'Analyse des quantités imaginaires, qui au fond ne sont pas des quantités, mais des *non-quantités*, car une racine de degré pair d'une quantité négative est *impossible*. On a voulu trouver en géométrie quelque chose d'équivalent, comme *impossibilité*. On a songé d'abord à y opposer un triangle à la fois rectangle et équilatéral et l'on a fini par rejeter le postulatum d'Euclide. Depuis cette époque les mathématiques ont changé de caractère : elles ont cessé d'être la science des quantités pour devenir celle des quantités et des non-quantités, qui ne fait aucune distinction entre les unes et les autres, malgré qu'elles n'ont rien de commun.

Le grand avantage des imaginaires est de permettre la décomposition, d'ailleurs toute fictive, des polynômes en facteurs du premier degré et de *laisser libre jeu aux artifices hasardeux sans nombre* (1)... Tel est le rôle important qu'elles jouent dans les spéculations analytiques. Grâce à ce nouveau moyen d'investigations on a pu, entre autres, achever la théorie des fonctions elliptiques et aller encore plus loin. Mais toute médaille a son revers : ces beaux résultats ne furent obtenus qu'au détriment de la rigueur, de la précision et de la clarté ; les mathématiques furent envahies par un grand nombre d'inductions, d'analogies, de conventions arbitraires, et ont perdu leur ancienne apodicticité.

Il est permis d'espérer qu'au XX^e^ siècle la considération des imaginaires sera remplacée par des moyens plus sûrs et qu'on arrivera à concilier les mathématiques avec la logique.

Sans prétendre à une compétence pédagogique, nous osons penser : 1° qu'il vaut mieux n'enseigner rien du tout qu'enseigner des théories d'une certitude douteuse et empiétant sur le bon sens, et 2° que Faraday a eu grandement raison de compa-

---

(1) *Leçons nouvelles sur l'Analyse*, par M. Méray, 1893.

rer les mathématiques à un moulin qui moud admirablement ce qu'on lui donne à moudre, mais qui ne rend pas autre chose que ce qu'on lui a donné. — Gardons-nous donc d'y mettre rien de faux, rien d'arbitraire, rien de contraire au bon sens !

M. FROLOV (Genève).

EUCLIDIEN ET NON-EUCLIDIEN

M. Frolov est plutôt dur pour ceux qu'il appelle (1) à tort *les non-euclidiens*.

Il paraît supposer que nous voulons interdire aux équerres le dessin des carrés et réclamer pour nous-mêmes le monopole de l'absurdité.

Que M. Frolov se rassure ! malgré les erreurs de raisonnement que renferme son article, je tiens celui-ci pour très intéressant.

Nous pouvons tous nous tromper, et l'étude de loyales erreurs de logique est précieuse pour ceux qui ont la curiosité des questions de pédagogie ; de plus, il y a des erreurs périodiques qu'il importe de souligner.

Il y a quelques années, dans une réunion que je ne préciserai pas davantage, j'ai entendu, formulée gravement, cette opinion « *que la morale elle-même est intéressée à la démonstration du postulatum d'Euclide* ; *car, disait-on, si la certitude déserte même les mathématiques, que deviendront hélas, les vérités morales* » ! Vous voyez le thème.

Je crois que la morale est plus qu'une convention, mais j'ai la certitude que le postulatum d'Euclide est *une convention* éminemment utile ; en ce sens, je reste euclidien ; mais l'étude *des autres conventions possibles* a aussi son intérêt, en ce sens je suis non-euclidien.

Il y a dans les sciences quelques autres conventions plus ou

(1) Voir l'*Enseignement mathématique*, 2e année, p. 179-187, mai 1900.