Dr H. Bork. — Mathematische Hauptsätze für Gymnasien : zweiter Theil : Pensum des Obergymnasiums ; zweite Auflage. 1 vol. in-8° 235 p. Prix : 2 marks 60. Dürr, Leipzig.

« Il résulte de cette définition que multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{m}{n}$, c'est prendre » m fois la n^e partie de $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b \cdot n}\right) m = \frac{am}{bn}. \text{ »}$$

C'est simple ; mais cela laisse quelque peu à désirer au double point de vue de la clarté et de la rigueur.

Il est vrai que nous touchons ici à une partie assez délicate de l'Arithmétique élémentaire ; c'est précisément une raison pour ne pas passer dessus comme chat sur braise.

L'extension de la notion de multiplication au cas où le multiplicateur est fractionnaire constitue l'une de ces inductions remarquables qui sont le propre, le génie même des Mathématiques. Il y a là une première généralisation importante qu'il faut mettre en pleine lumière, au lieu de la dissimuler sous une convention ou une définition plus ou moins habilement posée.

Pour introduire l'exposant fractionnaire, on montre comment l'on est conduit à représenter $\sqrt[n]{a^m}$ par $a^{\frac{m}{n}}$ lors même que m n'est pas divisible par n, et l'on justifie cette notation en démontrant que les règles de l'exposant entier s'appliquent aussi à l'exposant fractionnaire.

C'est d'une manière entièrement analogue qu'à mon avis on devrait procéder pour passer de la notion du multiplicateur entier à celle du multiplicateur fractionnaire.

Cette réserve faite, le livre de M. Testi peut rendre d'excellents services aux élèves auxquels il est destiné ; il me paraît cependant correspondre au programme des écoles normales plutôt qu'à celui des écoles techniques.

Lucien Baatard (Genève).

Dr H. Bork. — **Mathematische Hauptsätze für Gymnasien** ; zweiter Theil : Pensum des Obergymnasiums ; zweite Auflage. 1 vol. in-8° 235 p. Prix : 2 marks 60. Dürr, Leipzig.

Ainsi que l'indique son titre, ce livre n'est pas un manuel proprement dit, mais un simple abrégé présentant sous forme condensée et dans un ordre convenable l'ensemble des connaissances mathématiques des écoles moyennes; il renferme tout ce qui peut être confié à la mémoire de l'élève ou être facilement consulté par lui. Les différents sujets sont traités de manière à laisser au maître une certaine liberté quant à l'ordre qu'il adoptera pour son programme.

Les services que peut rendre un pareil abrégé dans l'enseignement moyen sont incontestables, aussi croyons-nous que ce livre sera le bienvenu de beaucoup de maîtres. Mais l'auteur dépasse encore ce programme en ce qu'il ajoute aux propositions de courtes démonstrations : de plus il fait suivre les parties importantes d'exemples bien choisis. L'exposition est excellente, et on ne peut que louer la brièveté et la concision des termes.

Pour ce qui concerne le choix des matières, l'auteur a dû, dans une certaine mesure, tenir compte du plan d'étude adopté en Prusse : ce livre sera donc consulté avec intérêt même en dehors de l'Allemagne, parce qu'il permet de se faire une idée de l'état des connaissances mathématiques dans les Gymnases prussiens.

Afin de faciliter notre compte rendu dans ses détails, nous énoncerons d'abord les deux postulats suivants, concernant les mathématiques des écoles moyennes, postulats que l'on ne peut guère contredire :

1) L'école moyenne (Gymnase) doit se concentrer de préférence sur les parties des mathématiques qui sont de toute importance dans le domaine de la vie pratique, ou qui facilitent la compréhension des questions astronomiques, physiques et techniques.

2) Elle doit ensuite autant que possible s'efforcer de relier les théories et les propositions de façon que les propriétés et les formules obtenues dans les degrés inférieurs, retrouvent leur emploi dans les degrés supérieurs; par contre, les propositions qui ne satisfont pas à cette condition doivent être laissées de côté.

Sur cette base, nous approuvons l'auteur d'avoir négligé les équations de Diophante et les fractions continues.

L'*Arithmétique*, qui comprend les puissances, les logarithmes et les équations du second degré, est traitée avec toute la rigueur désirable, comme cela ne se voit guère dans un manuel; le paragraphe « de l'infini et du zéro » est fait d'une façon particulièrement excellente et originale, ainsi que les racines irrationnelles et ce qui s'y rattache.

La notion de fonction est introduite de bonne heure et d'une manière habile. Les propriétés fondamentales des séries infinies et de leur convergence sont présentées avec beaucoup de clarté. Mais c'est ici que commencent les difficultés. Selon l'auteur les séries exprimant e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ sont obtenues d'une façon élémentaire. Toutefois nous ferons observer à ce sujet, que cette soi-disante exposition élémentaire est beaucoup plus difficile que celle qui utilise les procédés ordinaires du calcul différentiel. Et en première ligne, le théorème de Moivre appartient déjà aux parties les plus épineuses des mathématiques élémentaires.

Les relations de la forme

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \lim \left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n}\right)^n,$$

les calculs et conclusions qui s'y rapportent ne sont pas à la portée d'un élève du gymnase ; les séries obtenues pour sin et cos lui apparaîtront toujours comme des résultats du hasard et non comme les conséquences d'une discussion bien déterminée. La formation de ces séries serait bien plus convaincante si l'on pouvait dire à l'élève : « Nous voulons déduire ces fonctions des propriétés qui nous sont connues, c'est-à-dire des théorèmes d'addition. » Le procédé pour l'égalité des coefficients est déjà préparé au § 27 par le théorème sur les conditions d'identité de deux fonctions entières. Si l'on considère en outre que dans la Géométrie analytique, au § 65, le coefficient angulaire de la tangente, $\lim \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$ est employé, on voit que l'idée des dérivées est préparée, et l'on ne comprend pas pourquoi l'auteur a abandonné ce point de vue en préférant les considérations abstraites d'Euler.

La *Géométrie plane* a fait l'objet principal du premier volume de l'ouvrage; dans ce second volume elle se réduit à de simples compléments, parmi lesquels nous signalerons la question importante de *la Construction des expressions algébriques*. On y trouve, en outre, *la Théorie des transversales* avec le théorème de Pascal, et *la division harmonique,* avec les pôles et polaires dans le cercle.

La *Trigonométrie* est exposée d'une manière simple et précise; son champ est limité au strict nécessaire. Nous croyons qu'il serait difficile de faire mieux dans ce domaine. Le développement de la notion de fonction trigonométrique pour des angles supérieurs à 90° est introduit d'après la méthode des coordonnées en Géométrie analytique; c'est cette méthode en effet, qui fournit les définitions les plus simples. Ce chapitre se termine par la représentation de la fonction sinus à l'aide d'une courbe; on approuvera cela par égard aux applications à la Physique.

La *Stéréométrie* est, à notre avis, par trop restreinte dans ce manuel. Il est surprenant qu'il soit fait si peu usage de la Trigonométrie. Les trièdres et par suite les triangles sphériques devraient être traités d'une manière approfondie au point de vue des constructions et des calculs; ils devraient occuper dans ce chapitre la place la plus importante, comme le triangle en Géométrie plane et en Trigonométrie.

Il y aurait là une source féconde d'applications, et cette étude présenterait, à coup sûr, plus d'intérêt que les calculs de volume de tous les solides imaginables, mais qui, dans la pratique, ne se rencontrent jamais.

Il suffit de rappeler les problèmes suivants: tracé d'une route d'une pente donnée sur une montagne d'une inclinaison donnée; détermination des angles des faces des corps réguliers; position de l'axe terrestre sur l'écliptique et son influence sur la longueur des jours, sur les saisons, etc.

Il est complètement inutile au gymnase de traiter d'une façon spéciale la Trigonométrie sphérique. Les théorèmes du sinus et du cosinus suffisent; on peut se passer, sans aucun préjudice, des formules de Gauss, des analogies de Neper, etc. Il est vrai que les calculs se présenteraient sous une forme moins commode, mais l'objet principal n'est pas le calcul, c'est, en première ligne, l'interprétation des diverses formules appliquées à la Stéréométrie. Et sous ce rapport, la formule du cosinus de la Trigonométrie sphérique rend d'inestimables services, tandis que les formules commodes pour les calculs logarithmiques obscurcissent les relations géométriques.

Nous désirerions donc un meilleur développement de la Stéréométrie et une forte réduction de la Trigonométrie sphérique, ou, encore mieux, une complète liaison de celle-ci avec la Stéréométrie.

Du reste, il est possible que ces critiques s'adressent plutôt aux plans d'étude prussiens de 1892 qui ont servi de base à l'auteur, qu'au manuel lui-même, et nous reconnaissons avec plaisir que celui-ci présente une part de bonnes choses en stéréométrie. Ainsi, le calcul des volumes est fait très simplement et d'une façon très compréhensible; le passage de la règle du cosinus de la Trigonométrie sphérique à celle de la Trigonométrie plane est une bonne idée.

Une courte mais excellente introduction à la Géométrie analytique à deux dimensions constitue la fin de l'ouvrage; elle fait connaître de cette science autant qu'on en peut demander d'un élève du gymnase.

H. Ganter (Aarau).