

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 67 (2021)
Heft: 1-2

Artikel: Sur le developpement des courbes
Autor: Lagrange, Joseph Louis
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-966056>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le developpement des courbes

Lu le 13 Juillet f. 105r
1780

Joseph Louis LAGRANGE

[Édité par Philippe HENRY]

La theorie du developpement des courbes, due à Huyghens, est une des plus belles decouvertes qu'on ait faites dans la geometrie. Elle a precedé le calcul différentiel[†], mais elle a reçu ensuite de ce calcul plus d'étendue et de perfection.^{††} Cette theorie conduisit d'abord Huyghens a une nouvelle propriété de la cicloide, celle de se reproduire par le developpement[‡] ; mais Jacques Bernoulli trouva apres lui que cette propriété singuliere convenoit aussi a toutes les epicycloides decrites par la rotation d'un cercle sur un autre cercle, ainsi qu'à la logarithmique spirale^{‡‡}. Depuis M. Euler a resolu directement et généralement le probleme de trouver^{‡‡} toutes les courbes qui peuvent engendrer des courbes egales ou semblables par un ou plusieurs developpemens successifs, et la maniere dont il a traité ce point ne me paroît rien laisser a desirer (Voyez le tome XII des anciens Commentaires de Petersbourg^{‡‡‡}). Mais il y a un autre point^{‡‡‡} de la theorie des developpées qui ne me paroît pas encore suffisamment éclairci. C'est le theoreme donné par Jean Bernoulli dans un escrit intitulé Schediasma cyclometricum et imprimé dans le tome IV de ses Oeuvres^{‡‡‡}. Ce theoreme tres remarquable par sa singularité et sa généralité consiste en ce que si on developpe un arc d'une courbe quelconque terminé par des perpendiculaires qui fassent entr'elles un angle droit, qu'ensuite on developpe en sens contraire la courbe engendrée par le premier developpement, et ainsi

[†] infinitesimal

^{††} Huyghens

[‡] Voir le paragraphe 2.

^{‡‡} Voir le paragraphe 3.

^{‡‡‡} les courbes

^{‡‡‡} Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt, *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* 12, 1750, pp. 3–52; *Opera Omnia* 27 (series 1), pp. 130–180; E129.

^{‡‡‡} important

^{‡‡‡} Le titre complet est : De evolutione successiva et alternante curva cujuscunque in infinitum continuata, tandem Cycloidem generante; schediasma cyclometricum [2, IV, pp. 98–108]. Voir le paragraphe 3.

f. 106v de suite à l'infini, les différentes courbes résultantes de ces développemens successifs, doivent approcher de plus en plus de la cycloïde ordinaire, jusqu'à devenir enfin de vraies cycloïdes, quelle que soit d'ailleurs la nature de la première courbe développée⁵⁵.

L'auteur ne donne point la démonstration de ce théorème ; ††† il en fait seulement voir l'usage pour trouver des limites aussi approchées que l'on veut de la valeur du quart de cercle. M. Euler a tâché depuis de restituer cette démonstration dans un excellent Mémoire inséré dans le tome X des nouveaux Commentaires de Petersbourg⁵⁶ ; mais il me semble que sa méthode ne porte pas et ne sauroit porter dans l'esprit toute la lumière ni toute la conviction qu'on peut désirer sur ce sujet.

f. 107r M. Euler considère d'abord la dernière courbe formée par un nombre infini de développemens et il prouve que pour que cette courbe ainsi que toutes les précédentes soit finie et que les perpendiculaires aux deux extrémités fassent toujours entr'elles un angle droit, comme la nature du développement le demande, il faut qu'en nommant s l'arc de la courbe dont il s'agit et φ sa courbure^{††} c'est à dire l'angle compris entre les deux perpendiculaires menées aux extrémités de cet arc ; il faut dis-je que l'équation entre s et φ soit telle que l'on ait, lorsque $\varphi = 0$, s , $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$, $\frac{d^4s}{d\varphi^4}$ &c nuls, $\frac{ds}{d\varphi}$, $\frac{d^5s}{d\varphi^5}$ &c finis positifs, et $\frac{d^3s}{d\varphi^3}$, $\frac{d^7s}{d\varphi^7}$ &c finis négatifs, et que lorsque $\varphi = 90^\circ$ on ait $\frac{ds}{d\varphi}$, $\frac{d^3s}{d\varphi^3}$, $\frac{d^5s}{d\varphi^5}$ &c nuls, s , $\frac{d^4s}{d\varphi^4}$ &c finis positifs, et $\frac{d^2s}{d\varphi^2}$, $\frac{d^6s}{d\varphi^6}$ finis négatifs⁵⁷. De là M. Euler conclut d'abord que l'équation entre s et φ doit être de la forme

$$s = A \sin \alpha \varphi + B \sin \beta \varphi + C \sin \gamma \varphi + \&c;$$

ensuite que les coefficients α , β , γ &c ne peuvent être que les nombres impairs 1, 3, 5 &c ; enfin que les coefficients B , C , &c doivent être tous nuls, ce qui réduit l'équation dont il s'agit à $s = A \sin \varphi$, laquelle est celle d'une cycloïde ordinaire⁵⁸.

f. 108r Mais voici, ce me semble, ce qu'on peut objecter à ce raisonnement ; c'est que si la dernière courbe est en effet une cycloïde rigoureuse, comme il paroît s'ensuivre de la démonstration de M. Euler, toutes les courbes précédentes ne seront elles-mêmes, comme l'on sait, que des cycloïdes égales, par conséquent la première courbe ne sera plus arbitraire ainsi qu'on le suppose. Aussi ne sauroit-on, ce me semble, prendre le

⁵⁵Johann Bernoulli énonce le résultat pour une «courbe quelconque» dont les tangentes en A et B sont perpendiculaires et insiste sur la rapidité de la convergence vers un arc de cycloïde. Dans la suite du texte, il ne considère que le cas d'un quart de cercle. Leonhard Euler traite directement le cas général dans [6]. Voir le paragraphe 4.

††† mais

⁵⁶[6].

† sera

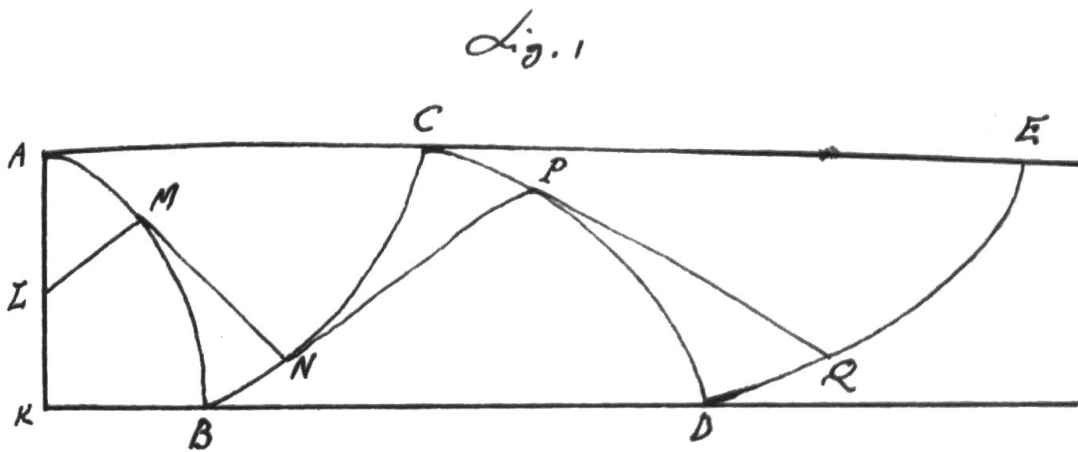
†† amplitude. Lagrange a d'abord noté ω au lieu de φ comme le montrent ses corrections.

⁵⁷Voir la Figure 7 où $z = s$ et $v = \varphi$.

⁵⁸Voir la fin du paragraphe 4.

theoreme dont il s'agit dans ce sens ; mais on[‡] doit seulement regarder la cycloide^{‡‡} comme l'assymptote des courbes formées par les developpement[s] successifs ; et l'essentiel consiste a faire voir comment ces courbes perdent peu a peu les proprietés qu'elles tiennent de la premiere developpée, et s'approchent de plus en plus de la nature de la cycloide. Pour cela il faut^{‡‡‡} partir nécessairement de la premiere courbe, et chercher la forme de toutes les courbes suivantes à l'infini ; montrer^{‡‡‡‡} ensuite comment cette forme degenerate peu a peu, et tend continuellement vers la cycloide ; c'est l'objet que je me suis proposé dans ce Memoire. J'ai cru que ce point d'analyse quoique de pure curiosité⁵⁹ meritoit neanmoins d'etre eclairci davantage et que mes recherches sur ce sujet pourroient meme avoir quelque utilité dans d'autres occasions.

1. Soit donc AMB (fig. 1) la courbe donnée qu'on suppose etre telle que les perpendiculaires AK et KB aux deux extremités A et B fassent entr'elles un angle droit AKB . Qu'on imagine que cette courbe se developpe en allant de B vers A , ensorte qu'elle engendre la courbe BC , qu'ensuite la courbe BC se developpe elle meme en sens contraire, c'est a dire en allant de C vers B , de maniere qu'il en resulte la courbe CD ; que celle-ci se developpe de meme en allant de D vers C , c'est a dire dans le meme sens que la premiere courbe AB , et ainsi de suite à l'infini ; il s'agit de prouver que ces differentes courbes $AB, BC, CD, DE, \&c$ [†] s'approchent continuellement de la cycloide qu'elle que soit d'ailleurs la nature de la premiere courbe AB .



‡ ne
 ‡‡ que
 ‡‡‡ done
 ‡‡‡‡ comment

⁵⁹Poisson termine son exposition du resultat de Johann en écrivant : «Mais ces méthodes, dont il est difficile d'apprécier le degré d'approximation, ne peuvent être présentement que des objets de pure curiosité, sur lesquels il serait superflu d'insister davantage.» [17, p. 442]

† iront

2. Prenons dans la courbe AB un point quelconque M et menons de ce point la perpendiculaire ML , et la tangente MN qui rencontre la courbe BC en N ; menons de meme du point N la tangente NP qui rencontre la courbe CD en P et de ce point P la tangente PQ qui rencontre la courbe DE en Q , et ainsi de suite; et nommons les arcs entiers AB, BC, CD, DE &c $a, b, a', b',$ &c, et les parties AM, CN, CP, EQ &c s, t, s', t' &c et enfin l'angle ALM ^{††}, c'est a dire la courbure de l'arc AM , φ .

Il est visible par la nature du developpement que la tangente MN sera egale à l'arc developpé BM , et qu'elle sera en meme tems le rayon de la developpée de la courbe BC au point N ; de meme la tangente NP sera egale à l'arc CN et sera en meme tems le rayon de la developpée de la courbe CD , et ainsi des autres. De plus il est clair que les courbes BC, CD &c seront toutes terminées par les deux droites paralleles AE, KD , dont la premiere touche la courbe AB en A , et dont la seconde est perpendiculaire à la meme courbe en B , et que ces memes droites seront aussi alternativement tangentes et perpendiculaires aux courbes BC, CD &c; d'où il s'ensuit que [‡] la courbure⁶⁰ de l'arc AM etant = φ , celles des arcs CN, CP, EQ &c seront aussi chacunes egales à φ ⁶¹.

Or on sait que le rayon de la developpée est egal à l'element de l'arc divisé par celui de^{‡‡} la courbure⁶²; donc on aura $MN = \frac{dt}{d\varphi}$, $NP = \frac{ds'}{d\varphi}$, $PQ = \frac{dt'}{d\varphi}$ &c; mais $NM = BM = a - s$, $PN = CN = t$, $QP = DP = a' - s'$ &c. Donc on aura ces equations

$$a - s = \frac{dt}{d\varphi}, \quad t = \frac{ds'}{d\varphi}, \quad a' - s' = \frac{dt'}{d\varphi}, \quad t' = \frac{ds''}{d\varphi}, \quad \&c,$$

lequelles donnent, en integrant, celles-ci

$$t = a\varphi - \int s d\varphi, \quad s' = \int t d\varphi, \quad t' = a'\varphi - \int s' d\varphi, \quad s'' = \int t' d\varphi \quad \&c,$$

f. 111r c'est a dire

$$\begin{aligned} t &= a\varphi - \int s d\varphi & t' &= a'\varphi - \frac{a\varphi^3}{2 \cdot 3} + \int d\varphi \int d\varphi \int s d\varphi \\ s' &= \frac{a\varphi^2}{2} - \int d\varphi \int s d\varphi & s'' &= \frac{a'\varphi^2}{2} - \frac{a\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \int d\varphi \int d\varphi \int d\varphi \int s d\varphi \\ & & & \&c. \end{aligned}$$

^{††} qu'on nomme communement l'amplitude

[‡] l'amplitude

⁶⁰ Lagrange n'utilise pas ce terme dans son acception actuelle. C'est ici pour lui l'angle entre les deux normales à la courbe, comme il l'a précisé ci-dessus.

⁶¹ Voir la Figure 14 sur laquelle la «courbure» des trois premiers arcs est indiquée.

^{‡‡} l'amplitude

⁶² On peut considérer infinimentesimement l'accroissement dt comme un arc de cercle de rayon MN et d'angle $d\varphi$.

Telles sont les equations entre les arcs t, s', t', s'' &c. des developpées successives et les angles φ de la courbure de ces arcs ; de sorte que si on vouloit qu'une quelconque de ces developpées devint semblable à la premiere, il n'y auroit qu'a faire t , ou s' , ou t' &c = ns , ce qui donneroit en differentiant, les equations

$$\frac{n ds}{d\varphi} = a - s, \quad \text{ou} \quad \frac{n d^2s}{d\varphi^2} = a - s, \quad \text{ou} \quad \frac{n d^3s}{d\varphi^3} = -a + s, \quad \text{ou} \quad \&c$$

lesquelles sont toutes integrables par les methodes connues⁶³.

Lorsque la [†] premiere developpée AB est une cycloïde, la seconde BC est aussi une cycloïde egale mais placée en sens contraire, et la troisieme CD est aussi une cycloïde egale et semblablement située à la premiere. On a donc pour ^{††} ce cas $\frac{d^2s}{d\varphi^2} = a - s$, dont l'integrale est $s = a + f \sin \varphi + g \cos \varphi$; mais il faut que s et $\frac{ds}{d\varphi}$ soi[ent] nuls au point A ou $\varphi = 0$, donc $g = -a$ et $f = 0$ ⁶⁴, donc $s = a(1 - \cos \varphi)$; ce qui est precisement l'equation d'une cycloïde⁶⁵; d'où l'on voit que cette courbe est la seule qui satisfasse à la condition proposée. f. 111v

3. Considerons maintenant les formules générales qu'on vient de trouver et voyons comment on en peut deduire la demonstration du theoreme proposé[‡]. Pour cela je remarque d'abord que par l'hypothese il faut que les arcs s, t, s', t', s'' &c deviennent nuls lorsque $\varphi = 0$, et qu'ils deviennent egaux à a, b, a', b', a'' &c lorsque $\varphi = 90^\circ$. Donc f. 112r

1°. il faudra que les integrales $\int s d\varphi, \int d\varphi \int s d\varphi, \int d\varphi \int d\varphi \int s d\varphi$ &c soient toutes prises de maniere qu'elles soient nulles lorsque $\varphi = 0$. Donc si on denote [†] ces integrales par ^{††} $\Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$ &c il faudra qu'en general Σ^m soit une telle fonction de φ que l'on ait lorsque $\varphi = 0$, f. 112v

$$\Sigma^m = 0, \quad \frac{d\Sigma^m}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2\Sigma^m}{d\varphi^2} = 0 \quad \&c \text{ jusqu'à } \frac{d^{m-1}\Sigma^m}{d\varphi^{m-1}} = 0^{66}.$$

⁶³Cette remarque fait allusion au mémoire d'Euler cité dans la note 53. Lagrange réutilise la notation n d'Euler.

[†] courbe donnée A

^{††} dans

⁶⁴Dans le cas traité ici, par le résultat de Huygens (voir le paragraphe 2), nous avons $s = s'$ d'où $t = \frac{ds'}{d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}$ et donc $\frac{dt}{d\varphi} = \frac{d^2s}{d\varphi^2} = a - s$. La solution de cette équation différentielle est $s = a + f \sin \varphi + g \cos \varphi$. Pour $\varphi = 0$, on a $s = 0$ et donc $g = -a$. Pour $\varphi = 0$, on a aussi $t = \frac{ds}{d\varphi} = 0$ et donc $f = 0$.

⁶⁵Il s'agit de l'équation de la longueur d'arc d'une cycloïde. Nous avons montré (voir la fin du paragraphe 4) que, avec les notations de la Figure 10, $s(x) = a \sin(x)$ caractérise cette courbe. Ainsi, l'équation $t(x) = \int_0^x s(\xi) d\xi = a(1 - \cos(x))$ la caractérise aussi.

[‡]Lagrange écrit «c'est a dire» et recopie à nouveau les formules pour t, s', t', s'' obtenues ci-dessus avant de tout tracer.

[†]Rature au contenu illisible.

^{††} \mathcal{S}

⁶⁶Puisque l'on a $\frac{d\Sigma^m}{d\varphi} = \Sigma^{m-1}, \frac{d^2\Sigma^m}{d\varphi^2} = \Sigma^{m-2}, \dots, \frac{d^{m-1}\Sigma^m}{d\varphi^{m-1}} = \Sigma'$.

Et les equations de l'art. prec. deviendront

$$\begin{aligned} t &= a\varphi - \Sigma' & t' &= a'\varphi - \frac{a\varphi^3}{2 \cdot 3} + \Sigma''' \\ s' &= \frac{a\varphi^2}{2} - \Sigma'' & s'' &= \frac{a'\varphi^2}{2} - \frac{a\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \Sigma^{iv} \\ & & & \&c \end{aligned}$$

et en général

$$\begin{aligned} s^n &= \frac{a^{n-1}\varphi^2}{2} - \frac{a^{n-2}\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{a^{n-3}\varphi^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \&c \pm \frac{a\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2n} \mp \Sigma^{2n} \\ t^n &= a^n\varphi - \frac{a^{n-1}\varphi^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^{n-2}\varphi^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c \mp \frac{a\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2n+1} \pm \Sigma^{2n+1} \end{aligned}$$

f. 113r les signes superieurs etant pour le cas ou n est [im]pair, et les inferieurs pour celui ou n est [pair]; et les exposans de s , t et Σ ne denotant pas des puissances mais des quantiemes.

2°.‡ Si on nomme ρ l'angle formé par les deux perpendiculaires AK , KB aux deux extremités A , B de la premiere courbe, angle qu'on suppose de 90° deegrés et qu'on designe par A' , A'' , A''' &c les valeurs de Σ' , Σ'' , Σ''' &c lorsque $\varphi = \rho$, il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} b &= a\rho - A' & b' &= a'\rho - \frac{a\rho^3}{2 \cdot 3} + A''' \\ a' &= \frac{a\rho^2}{2} - A'' & a'' &= \frac{a'\rho^2}{2} - \frac{a\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + A^{iv} \\ & & & \&c \end{aligned}$$

de sorte que l'on aura en general

$$a^v = \frac{a^{v-1}\rho^2}{2} - \frac{a^{v-2}\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{a^{v-3}\rho^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \&c \pm \frac{a\rho^{2v}}{2 \cdot 3 \dots 2v} \mp A^{2v}$$

f. 113v et

$$b^v = a^v\rho - \frac{a^{v-1}\rho^3}{2 \cdot 3} + \frac{a^{v-2}\rho^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c \mp \frac{a\rho^{2v+1}}{2 \cdot 3 \dots 2v+1} \pm A^{2v+1}.$$

4. †† Or en examinant les equations

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a\rho^2}{2} - A'' & a''' &= \frac{a''\rho^2}{2} - \frac{a'\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{a\rho^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} - A^{vi} \\ a'' &= \frac{a'\rho^2}{2} - \frac{a\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + A^{iv} & & \&c \end{aligned}$$

‡ Il faudra qu'en faisant $\varphi = \rho$ (ρ est l'angle de 90° deegrés) on ait $s = a$, $s' = a'$

†† Considerons les equations

il est facile de voir que si on forme † la fraction

$$\frac{a - A''x^2 + A^{iv}x^4 - A^{vi}x^6 + \&c}{1 - \frac{\rho^2}{2}x^2 + \frac{\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 - \frac{\rho^6}{2 \cdot 3 \dots 6}x^6 + \&c}$$

et qu'on la developpe suivant les puissances de x , on aura une serie telle que

$$a + a'x^2 + a''x^4 + a'''x^6 + \&c.$$

Mais†† on sait que $1 - \frac{\rho^2 x^2}{2} + \frac{\rho^4 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c$ est egale à $\cos \rho x$; donc si on fait pour f.114r
conserver l'analogie $a = A$ on aura⁶⁷

$$\frac{A - A''x^2 + A^{iv}x^4 - A^{vi}x^6 + \&c}{\cos \rho x} = a + a'x^2 + a''x^4 + a'''x^6 + \&c.$$

On sait de plus‡ que⁶⁸

$$\cos \rho x = \left(1 - x^2\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)\dots; \ddagger$$

ainsi††† on pourra resoudre la fraction $\frac{A - A''x^2 + A^{iv}x^4 - \&c}{\cos \rho x}$ en une infinité de fractions
particulieres telles que $\frac{\alpha}{1-x^2} + \frac{\beta}{1-\frac{x^2}{9}} + \frac{\gamma}{1-\frac{x^2}{25}} \&c$, et si on suppose pour abreger

$$A - A''x^2 + A^{iv}x^4 - A^{vi}x^6 + \&c = X,$$

on aura les valeurs des numerateurs $\alpha, \beta, \gamma \&c$ en mettant successivement dans f.114v
 $\frac{2X dx}{-x d \cos \rho x}$ les nombres 1, 3, 5, 7 &c à la place de x . Denotons par $X', X''', X^v \&c$ les

† l'expression

†† On

⁶⁷Lagrange a observé que les égalités pour les longueurs d'arc des courbes de rang impair $a', a'', a''' \&c$ entraînent

$$\begin{aligned} (1 - \frac{\rho^2 x^2}{2} + \frac{\rho^4 x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots)(a + a'x^2 + a''x^4 + a'''x^6 + \dots) \\ = A - A''x^2 + A^{iv}x^4 - A^{vi}x^6 + \dots \end{aligned}$$

‡ Maintenant on sait que

⁶⁸Lagrange substitue $\rho x = \frac{\pi x}{2}$ dans l'égalité d'Euler $\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} [1 - \frac{4x^2}{\pi^2(2n-1)^2}]$ (*Introductio in analysin infinitorum*, § 158).

‡‡ $= (1+x)(1-x)(1+x/3)(1-x/3)(1+x/5)(1-x/5)\dots$

‡‡† Desorte que l'

valeurs de X qui repondent a $x = 1, 3, 5$ &c, et l'on aura, à cause de $\frac{d \cos \rho x}{dx} = -\rho \sin \rho x$ et de $\rho = 90^\circ$,⁶⁹

$$\alpha = \frac{2X'}{\rho}, \quad \beta = -\frac{2X'''}{3\rho}, \quad \gamma = \frac{2X^v}{5\rho}, \quad \delta = -\frac{2X^{vii}}{7\rho}, \quad \&c.$$

Donc on aura en général

$$a + a'x^2 + a''x^4 + a'''x^6 + \&c = \frac{2X'}{\rho(1-x^2)} - \frac{2X'''}{3\rho(1-\frac{x^2}{9})} + \frac{2X^v}{5\rho(1-\frac{x^2}{25})} - \&c.$$

Or $\frac{1}{1-\frac{x^2}{v^2}} = 1 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{x^4}{v^4} + \frac{x^6}{v^6} + \&c$. Donc⁷⁰

$$\begin{aligned} a + a'x^2 + a''x^4 + a'''x^6 + \&c &= \frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3} + \frac{X^v}{5} - \&c \right) + \\ &\frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3^3} + \frac{X^v}{5^3} - \&c \right) x^2 + \\ &\frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3^5} + \frac{X^v}{5^5} - \&c \right) x^4 + \&c; \end{aligned}$$

f. 115r Desorte qu'en comparant les termes on aura $a = \frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3} + \frac{X^v}{5} - \&c \right)$, $a' = \frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3^3} + \frac{X^v}{5^3} - \&c \right)$, $a'' = \frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3^5} + \frac{X^v}{5^5} - \&c \right)$ et en général

$$a^v = \frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3^{2v+1}} + \frac{X^v}{5^{2v+1}} - \&c \right).$$

5. Maintenant puisqu'on a[†]

$$X = A - x^2 A'' + x^4 A^{iv} - \&c,$$

f. 115v A, A'', A^{iv} &c étant les valeurs de $s, \int d\varphi \int s d\varphi, \int d\varphi \int d\varphi \int d\varphi \int s d\varphi$ &c lorsque $\varphi = \rho$ (art. 3), si on considere X comme une fonction de φ on aura en général⁷¹

$$X = s - x^2 \int d\varphi \int s d\varphi + x^4 \int d\varphi \int d\varphi \int d\varphi \int s d\varphi - \&c,$$

⁶⁹On a, par exemple, $X(x) \cdot \frac{(1-\frac{x^2}{9})}{\cos \rho x} = \frac{\alpha(1-\frac{x^2}{9})}{1-x^2} + \beta + \frac{\gamma(1-\frac{x^2}{9})}{1-\frac{x^2}{25}} + \dots$ d'où, par la règle de Bernoulli-Hospital, $\frac{1-\frac{x^2}{9}}{\cos \rho x} \Big|_{x=3} = \frac{-2x}{3^2(-\rho \sin \rho x)} \Big|_{x=3}$ et donc $\beta = \frac{2X(x)}{-x(-\rho \sin \rho x)} \Big|_{x=3}$.

⁷⁰Lagrange oublie les facteurs x^2, x^4 dans le membre de droite du développement qui suit. Nous les avons ajoutés.

[†]en général

⁷¹Lagrange considère maintenant X comme fonction de deux variables $X(\varphi, x)$, sans changer de notation puisque ci-dessus $X = X(\rho, x) = A - x^2 A'' + x^4 A^{iv} - \dots$

donc en differentiant deux fois en prenant φ variable et x constant on aura

$$\frac{d^2(X - s)}{d\varphi^2} = -x^2s + x^4 \int d\varphi \int s d\varphi - \&c = -x^2X;$$

donc faisant $X - s = \xi$ ce qui donne $X = \xi + s$, on aura l'équation

$$\frac{d^2\xi}{x^2d\varphi^2} + \xi + s = 0$$

dont l'integrale est⁷²

$$\xi = \cos x\varphi \int s \sin x\varphi \cdot x d\varphi - \sin x\varphi \int s \cos x\varphi \cdot x d\varphi$$

ou bien à cause de⁷³ $\int s \sin x\varphi \cdot x d\varphi = -s \cos x\varphi + \int \cos x\varphi ds$ et $\int s \cos x\varphi \cdot x d\varphi =$ f. 116r
 $s \sin x\varphi - \int \sin x\varphi ds$,

$$\xi = -s + \cos x\varphi \int \cos x\varphi ds + \sin x\varphi \int \sin x\varphi ds;$$

donc

$$X = \cos x\varphi \int \cos x\varphi ds + \sin x\varphi \int \sin x\varphi ds;$$

mais lorsque $\varphi = 0$ il faut que l'on ait $X = s = 0$, et $\frac{dX}{d\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}$ ⁷⁴; donc il faudra que les integrales $\int \cos x\varphi ds$ et $\int \sin x\varphi ds$ soient prises ensorte qu'elles soient nulles lorsque $\varphi = 0$.

Faisons maintenant $\varphi = \rho$, et $x = 1, 3, 5$ &c et l'on aura les valeurs de X', X''', X^v &c; de sorte que comme $\cos \rho = 0, \cos 3\rho = 0, \cos 5\rho = 0$ &c et $\sin \rho = 1, \sin 3\rho = -1, \sin 5\rho = 1$ &c on aura

f. 116v

$$X' = \int \sin \varphi ds, \quad X''' = - \int \sin 3\varphi ds, \quad X^v = \int \sin 5\varphi ds, \quad \&c$$

ces integrales etant prises de maniere qu'elles soient nulles lorsque $\varphi = 0$, et ensuite φ y etant fait $= \rho$.

⁷²Il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire $\xi''(\varphi) + x^2\xi(\varphi) = -x^2s(\varphi)$. La solution générale est donnée par (voir la note 80)

$$\xi(\varphi) = (H + \int_0^\varphi xs(t) \sin(xt) dt) \cos(x\varphi) + (K - \int_0^\varphi xs(t) \cos(xt) dt) \sin(x\varphi), \quad H, K \in \mathbf{R}.$$

Pour $\varphi = 0$, on a $X = s = 0$ d'où $\xi = 0$ et donc $H = 0$. Puisque $\frac{dX}{d\varphi}(0) = \frac{ds}{d\varphi}(0)$ et $X = \xi + s$, on a $\frac{d\xi}{d\varphi}(0) = 0$ et cette condition entraîne $K = 0$.

⁷³Lagrange intègre par parties $\int s(\varphi) \sin(x\varphi)x d\varphi, \int s(\varphi) \cos(x\varphi)x d\varphi$ et note ds pour $\frac{ds}{d\varphi} d\varphi$.

⁷⁴On a $X(0, x) = s(0) = 0$ et $\frac{dX(\varphi, x)}{d\varphi}(0) = \frac{ds}{d\varphi}(0)$.

Ainsi il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans les expressions de a, a', a'' &c a^v de l'art. 4. †

- f. 117r 6. Si on vouloit avoir de la meme maniere les valeurs des quantités b, b', b'' &c il n'y auroit qu'à considerer dans la fig. 1 la courbe BC à la place de la courbe AB ⁷⁵, et nommant les arcs $BM = \sigma, BN = \tau, DP = \sigma', DQ = \tau'$ &c et l'angle compris entre les lignes LM et $KB = \psi$, ensorte que $\psi = 90^\circ - \varphi, \sigma = a - s, \tau = b - t$,
f. 117v $\sigma' = a' - s'$ &c, on aura comme dans l'art. 2, $MN = \frac{d\tau}{d\psi}, NP = \frac{d\sigma'}{d\psi}, PQ = \frac{d\tau'}{d\psi}$ &c, ensuite $NM = \sigma, NP = b - \tau, PQ = \sigma'$ &c; †† donc

$$\frac{d\tau}{d\psi} = \sigma, \quad \frac{d\sigma'}{d\psi} = b - \tau, \quad \frac{d\tau'}{d\psi} = \sigma', \quad \frac{d\sigma''}{d\psi} = b' - \tau', \quad \&c,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \tau &= \int \sigma d\psi & \tau' &= \frac{b\psi^2}{2} - \int d\psi \int d\psi \int \sigma d\psi \\ \sigma' &= b\psi - \int d\psi \int \sigma d\psi & \sigma'' &= b'\psi - \frac{b\psi^3}{2 \cdot 3} + \int d\psi \int d\psi \int d\psi \int \sigma d\psi \\ && & \&c. \end{aligned}$$

- f. 118r Denotons par B, B'', B^{iv} &c les valeurs des integrales $\int \sigma d\psi, \int d\psi \int d\psi \int \sigma d\psi, \int d\psi \int d\psi \int d\psi \int d\psi \int \sigma d\psi$ &c lorsque $\psi = \rho$, chaque integration etant faite de maniere que l'integrale soit nulle lorsque $\psi = 0$, et l'on aura en faisant $\psi = \rho$ ce qui rend $\tau = b, \tau' = b', \tau'' = b''$ &c

$$\begin{aligned} b &= B & b'' &= \frac{b'\rho^2}{2} - \frac{b\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + B^{iv} \\ b' &= \frac{b\rho^2}{2} - B'' & b''' &= \frac{b''\rho^2}{2} - \frac{b'\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{b\rho^6}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6} - B^{vi} \\ && & \&c. \end{aligned}$$

Donc en traitant ces formules d'une maniere semblable a celles de l'art. prec.⁷⁶, on trouvera que si l'on fait

$$B - B''y^2 + B^{iv}y^4 - B^{vi}y^6 + \&c = Y$$

- f. 118v et qu'on nomme Y', Y''', Y^v &c les valeurs de Y qui repondent a $y = 1, 3, 5$ &c on

†5. ~~De meme si on considere les équations $b = a\rho - A'$, $b' = a'\rho - \frac{a\rho^3}{2 \cdot 3} + A''$, $b'' = a''\rho - \frac{a'\rho^3}{2 \cdot 3} + \frac{a\rho^5}{2 \cdot 3 \cdot 5} - A^v$, &c. on aura les~~

⁷⁵C'est-à-dire considérer que la courbe BC avec la longueur d'arc $BN = \tau(\psi)$ (voir Fig. 14) est la première courbe.

†† d'où l'on tire

⁷⁶Il s'agit en fait de l'article 4.

aura

$$b^v = \frac{2}{\rho} \left(Y' - \frac{Y'''}{3^{2v+1}} + \frac{Y^v}{5^{2v+1}} - \&c \right).$$

Ensuite on trouvera aussi que les valeurs de Y' , Y''' , Y^v &c seront⁷⁷

$$Y' = \int \sigma \sin \psi d\psi, \quad Y''' = - \int \sigma \sin 3\psi d\psi, \quad Y^v = \int \sigma \sin 5\psi d\psi, \quad \&c$$

ces integrales etant prises ensorte qu'elles soient nulles lorsque $\psi = 0$, et qu'elles soient complettes lorsque $\psi = \rho$.

7. Reprenons maintenant les expressions de s^n et de t^n de l'art. 3 et substituons à la place de a^n , a^{n-1} , &c les valeurs[†] tirées des formules de l'art. 4; on aura en ordonnant les termes par rapport aux quantités X' , X''' , X^v &c

$$\begin{aligned} s^n = & \frac{2X'}{\rho} \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\varphi^6}{2 \cdot 3 \dots 6} - \&c \pm \frac{\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \dots 2n} \right) \\ & - \frac{2X'''}{3\rho} \left(\frac{\varphi^2}{2 \cdot 3^{2n-2}} - \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^{2n-4}} + \&c \pm \frac{\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \dots 2n} \right) \\ & + \frac{2X^v}{5\rho} \left(\frac{\varphi^2}{2 \cdot 5^{2n-2}} - \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^{2n-4}} + \&c \pm \frac{\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \dots 2n} \right) \\ & - \&c \mp \Sigma^{2n}, \end{aligned}$$

[et]

$$\begin{aligned} t^n = & \frac{2X'}{\rho} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3} + \frac{\varphi^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c \mp \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n + 1} \right) \\ & - \frac{2X'''}{3\rho} \left(\frac{\varphi}{3^{2n}} - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3 \cdot 3^{2n-2}} + \frac{\varphi^5}{2 \cdot 3 \dots 5 \cdot 3^{2n-4}} - \&c \mp \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \dots 2n + 1} \right) \\ & + \frac{2X^v}{5\rho} \left(\frac{\varphi}{5^{2n}} - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3 \cdot 5^{2n-2}} + \frac{\varphi^5}{2 \cdot 3 \dots 4 \cdot 5 \cdot 5^{2n-4}} - \&c \mp \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n + 1} \right) \\ & - \&c \pm \Sigma^{2n+1}. \end{aligned}$$

⁷⁷Lagrange transforme ici les intégrales obtenues de manière identique à celles de l'art. 4

$$Y' = \int \sin \psi d\tau, \quad Y''' = - \int \sin 3\psi d\tau, \quad Y^v = \int \sin 5\psi d\tau, \quad \dots$$

en utilisant $\sigma = \frac{d\tau}{d\psi}$.

[†]resultantes de la formule générale $a^v = \frac{2}{\rho} \left(X' - \frac{X'''}{3^{2v+1}} + \frac{X^v}{5^{2v+1}} - \&c \right)$ de l'art. prec.; en ordonnant les

Soit en général⁷⁸

$$\frac{\varphi^2}{2p^{2n-2}} - \frac{\varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot p^{2n-4}} + \frac{\varphi^6}{2 \cdot 3 \dots 6 \cdot p^{2n-6}} - \&c \pm \frac{\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \dots 2n} = w$$

$$\frac{\varphi}{p^{2n}} - \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3 \cdot p^{2n-2}} + \frac{\varphi^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot p^{2n-4}} - \&c \mp \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n + 1} = z$$

f. 120r les signes superieurs etant pour le cas ou n est impair, et les [signes] inferieurs pour celui ou n [est] pair; † on trouvera en differentiant

$$\frac{dw}{d\varphi} = p^2 \left(z \pm \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n + 1} \right), \quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{p^{2n}} - w$$

donc $w = \frac{1}{p^{2n}} - \frac{dz}{d\varphi}$; et de la⁷⁹

$$\frac{d^2z}{p^2 d\varphi^2} + z \pm \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n + 1} = 0,$$

équation dont l'integrale est⁸⁰

$$z = \cos p\varphi \left(H \pm \frac{\int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi}{2 \cdot 3 \dots 2n + 1} \right) - \sin p\varphi \left(K \pm \frac{\int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi}{2 \cdot 3 \dots 2n + 1} \right),$$

H et K etant deux constantes arbitraires. Or en faisant $\varphi = 0$ on a $w = 0$ et $z = 0$; donc $\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{p^{2n}}$; par consequent si on suppose que les integrales $\int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi$, et $\int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi$ soient prises de maniere qu'elles soient nulles lorsque $\varphi = 0$,

⁷⁸La notation de Lagrange ne met pas en évidence la dépendance en $p = 1, 3, 5, \dots$ ni en φ , ni en n .

† on aura

⁷⁹On a donc $\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{d^2z}{d\varphi^2}$.

⁸⁰Il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire $z''(\varphi) + p^2 z(\varphi) = \mp p^2 f(\varphi)$ en notant $f(\varphi) = \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$. La solution générale de l'équation homogène est $z = H \cos(p\varphi) + K \sin(p\varphi)$. Pour trouver une solution particulière, Lagrange utilise sa méthode de la variation des constantes. En cherchant une solution sous la forme $z = H(\varphi) \cos(p\varphi) + K(\varphi) \sin(p\varphi)$ et en supposant $H'(\varphi) \cos(p\varphi) + K'(\varphi) \sin(p\varphi) = 0$ pour simplifier les calculs, nous sommes conduits à l'égalité $-pH'(\varphi) \sin(p\varphi) + pK'(\varphi) \cos(p\varphi) = \mp p^2 f(\varphi)$. Il faut donc résoudre

$$\begin{pmatrix} \cos(p\varphi) & \sin(p\varphi) \\ -p \sin(p\varphi) & p \cos(p\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H'(\varphi) \\ K'(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp p^2 f(\varphi) \end{pmatrix},$$

ce qui livre

$$\begin{pmatrix} H'(\varphi) \\ K'(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p\varphi) & -\sin(p\varphi)/p \\ \sin(p\varphi) & \cos(p\varphi)/p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp p^2 f(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm p f(\varphi) \sin(p\varphi) \\ \mp p f(\varphi) \cos(p\varphi) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la solution générale est donnée par

$$z(\varphi) = \left(H \pm \int_0^\varphi p f(t) \sin(pt) dt \right) \cos(p\varphi) + \left(K \mp \int_0^\varphi p f(t) \cos(pt) dt \right) \sin(p\varphi), \quad H, K \in \mathbf{R}.$$

Observons qu'il manque un facteur p chez Lagrange. Toutefois, celui-ci n'a pas d'influence sur la suite de l'argumentation.

on aura $H = 0$ et $-pK = \frac{1}{p^{2n}}$; d'où $K = -\frac{1}{p^{2n+1}}$ de sorte que la valeur complete de z sera⁸¹ f. 120v

$$z = \frac{\sin p\varphi}{p^{2n+1}} \pm \frac{\cos p\varphi \int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi - \sin p\varphi \int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n + 1};$$

de la, a cause de $w = \frac{1}{p^{2n}} - \frac{dz}{d\varphi}$, on aura⁸²

$$w = \frac{1 - \cos p\varphi}{p^{2n}} \pm p \frac{\sin p\varphi \int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi + \cos p\varphi \int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n + 1}.$$

Donc si on fait pour abreger

$$\Phi^p = \frac{\sin p\varphi \int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi + \cos p\varphi \int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n + 1}$$

$$\Psi^p = \frac{\cos p\varphi \int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi - \sin p\varphi \int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n + 1}$$

(les exposans de Φ et de Ψ ne denotant pas des puissances mais des quantiemes ainsi que ceux de s , t , et Σ) on aura en general⁸³

$$s^n = \frac{2}{\rho} \left(X' \left(1 - \cos \varphi + \Phi' \right) - X''' \left(\frac{1 - \cos 3\varphi}{3^{2n+1}} + \Phi''' \right) \right. \\ \left. + X^v \left(\frac{1 - \cos 5\varphi}{5^{2n+1}} + \Phi^v \right) - \&c \right) \mp \Sigma^{2n}$$

[et]

f. 121r

$$t^n = \frac{2}{\rho} \left(X' \left(\sin \varphi + \Psi' \right) - X''' \left(\frac{\sin 3\varphi}{3^{2n+2}} + \Psi''' \right) \right. \\ \left. + X^v \left(\frac{\sin 5\varphi}{5^{2n+2}} + \Psi^v \right) - \&c \right) \pm \Sigma^{2n+1}.$$

8. Toute la difficulté se reduit maintenant à[†] faire voir que lorsque $n = \infty$ les équations precedentes^{††} deviennent necessairement[‡] celle de la cicloide ordinaire.

⁸¹Lagrange utilise la condition $z(0) = 0$ pour obtenir $H = 0$ et la condition $z'(0) = 1/p^{2n}$ pour déduire que $K = -1/p^{2n+1}$.

⁸²Sur le manuscrit de Lagrange, le premier terme est $\frac{1-\cos\varphi}{p^{2n}}$. Nous l'avons corrigé.

⁸³On a donc $w_{n,p}(\varphi) = \frac{1-\cos(p\varphi)}{p^{2n}} \pm p\Phi^p$ et $z_{n,p}(\varphi) = \frac{\sin(p\varphi)}{p^{2n+1}} \pm \Psi^p$. Dans les deux lignes suivantes, Lagrange ne tient plus compte des signes \pm et oublie de diviser les termes Ψ^p par p .

[†]Il s'agit à present de

^{††}se reduisent

[‡]Rature au contenu illisible.

Pour cela nous remarquerons

f. 121v 1°. Que puisque^{‡‡} les quantités Σ' , Σ'' , Σ''' &c sont égales à $\int s d\varphi$, $\int d\varphi \int s d\varphi$, $\int d\varphi \int d\varphi \int s d\varphi$ &c (en prenant ces intégrales en sorte qu'elles soient nulles lorsque $\varphi = 0$) et que la plus grande valeur de s est a , il s'ensuit que ces quantités seront nécessairement moindres que $\int a d\varphi$, $\int d\varphi \int a d\varphi$, $\int d\varphi \int d\varphi \int a d\varphi$ &c c'est à dire que $a\varphi$, $\frac{a\varphi^2}{2}$, $\frac{a\varphi^3}{2 \cdot 3}$ &c desorte que Σ^{2n} sera $< \frac{a\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \cdots 2n}$ et par conséquent, à plus forte raison (à cause que ρ est la plus grande valeur de φ) $< \frac{a\rho^{2n}}{2 \cdot 3 \cdots 2n}$; donc aussi (à cause que $\rho < 2$)⁸⁴

$$\Sigma^{2n} < \frac{a2^{2n}}{2 \cdot 3 \cdots 2n} < \frac{2a}{1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdots n}.$$

Or il est clair qu'on peut prendre n si grand que le produit $(1 + \frac{1}{2})(2)(2 + \frac{1}{2}) \cdots (n)$ surpasse toute quantité donnée; donc en supposant $n = \infty$, on aura nécessairement $\Sigma^{2n} = 0$; et par conséquent aussi $\Sigma^{2n+1} = 0$; de sorte que les termes Σ^{2n} , et Σ^{2n+1} disparaîtront des valeurs de s^n , et t^n , après un nombre infini de développemens.

f. 122r 2°. Comme $\sin p\varphi$, et $\cos p\varphi$ sont toujours renfermés entre les limites $+1$ et -1 il est clair que $\int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi$, et $\int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi$ seront toujours aussi renfermés entre les limites $\frac{\varphi^{2n+2}}{2n+2}$ et $-\frac{\varphi^{2n+2}}{2n+2}$; d'où il est facile de conclure que les quantités

$$\begin{aligned} & \sin p\varphi \int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi + \cos p\varphi \int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi, \quad \text{et} \\ & \cos p\varphi \int \varphi^{2n+1} \sin p\varphi d\varphi - \sin p\varphi \int \varphi^{2n+1} \cos p\varphi d\varphi \end{aligned}$$

f. 122v seront renfermées entre ces limites-ci $\frac{2\varphi^{2n+2}}{2n+2}$, et $-\frac{2\varphi^{2n+2}}{2n+2}$; donc les quantités Φ^p , et Ψ^p seront toujours renfermées entre ces limites $\frac{\varphi^{2n+2}}{3 \cdot 4 \cdots 2n+2}$ et $-\frac{\varphi^{2n+2}}{3 \cdot 4 \cdots 2n+2}$; donc à cause que la plus grande valeur de φ est $\rho < 2$ les quantités dont il s'agit seront aussi renfermées entre ces deux autres limites⁸⁵

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdots n + 1}, \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdots n + 1}.$$

Or il est clair qu'on peut prendre n si grand que ces deux limites deviennent aussi petites que l'on voudra; donc en faisant $n = \infty$ les quantités Φ^p , et Ψ^p deviendront toujours nulles.

f. 123r 3°. Enfin il est visible que lorsque $n = \infty$ les quantités $\frac{\sin p\varphi}{\rho^{2n+2}}$, et $\frac{1 - \cos p\varphi}{\rho^{2n+1}}$ seront aussi nulles; desorte que comme les quantités X' , X''' , X^v &c sont d'ailleurs toujours finies

^{‡‡}comme

⁸⁴La seconde majoration est en fait une égalité.

⁸⁵Le numérateur doit être 2 car $\frac{2^{2n+2}}{3 \cdot 4 \cdots 2n+2} = \frac{2 \cdot 2^{2n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n+2} = \frac{2}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2 \cdots n + 1}$.

(ces quantités n'étant jamais plus grandes que a), il s'ensuit que lorsque $n = \infty$ les valeurs de s^n , et de t^n se reduiront toujours a celles-ci⁸⁶

$$s^n = \frac{2X'}{\rho}(1 - \cos \varphi) \quad \text{et} \quad t^n = \frac{2X'}{\rho} \sin \varphi.$$

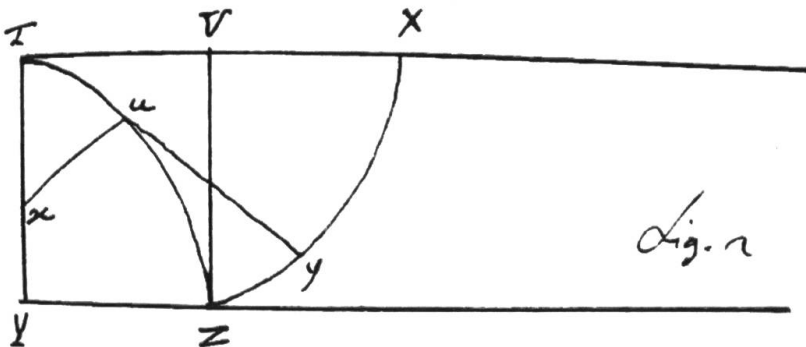
9. Donc si (fig. 2) IZ est la dernière⁸⁷ des courbes CD, EF &c (fig. 1) dont la position est semblable a celle de la première courbe AB , et que ZX soit la courbe produite par le developpement de la courbe IZ ; qu'on nomme l'arc $Iu = w$, l'angle Ixu formé par les perpendiculaires en I et $u = \varphi$, l'arc Xy intercepté entre les tangentes IX , et uy à la courbe $IZ = z$ desorte que l'amplitude de l'arc z soit égale à celle de l'arc w , c'est a dire $= \varphi$, on aura pour la nature de ces deux courbes les équations f. 123v

$$w = \frac{2X'}{\rho}(1 - \cos \varphi), \quad z = \frac{2X'}{\rho} \sin \varphi,$$

X' étant une constante égale à la valeur de $\int \sin \varphi ds$ lorsque $\varphi = \rho = 90^\circ$.

Or il est facile de voir par ces equations que les courbes IZ et ZX ne sont autre chose que deux demi cicloides égales et decrites sur les bases IY, VZ par des cercles égaux dont le diametre soit $= \frac{X'}{\rho}$.

Ainsi le theoreme de M. Bernoulli est démontré dans toute sa généralité et avec toute la rigueur qu'on puisse desirer. f. 124r



*Pour les Mem: sur le developpement
des courbes.*

⁸⁶Lagrange n'utilise pas la notation s^∞, t^∞ qui serait ici utile pour distinguer ces expressions de celles de l'art. 7.

⁸⁷Lagrange utilise ici une expression dont il a lui-même fait une mise en garde au sujet de son usage en introduction.

f. 124v 10. Si la première courbe AB est un quart de cercle dont le rayon soit r , on aura $s = r\varphi$ donc $\sin \varphi ds = r \sin \varphi d\varphi$, et intégrant de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $\varphi = 0$, $r(1 - \cos \varphi)$; donc faisant $\varphi = \rho$, on aura $X' = r$; desorte que la cycloïde qui résultera du développement[†] de ce cercle continué à l'infini aura pour cercle générateur un cercle dont le diamètre sera $\frac{r}{\rho}$; c'est le cas que M. Bernoulli a examiné. Comme M.

f. 125r Bernoulli a tiré de cette considération des approximations pour la valeur de l'arc de 90° degré il est bon d'examiner quel est le degré d'exactitude de ces approximations⁸⁸.
Le procédé de M. Bernoulli consiste à chercher par des formules analogues à celles de l'art. 2 les valeurs de b , a' , b' , a'' &c en a ^{††}; c'est à dire les longueurs des courbes BC , CD , &c par celle de la première courbe AB ; ensuite M. Bernoulli égale successivement entr'elles les quantités a et b , b et a' , a' et b' &c comme si les courbes AB , BC , CD &c étoient des cycloïdes, et il tire des ces égalités un suite de valeurs de a qui sont alternativement plus grandes et plus petites que la vraie valeur de a , mais qui en approchent de plus en plus.

Or, en faisant pour plus de simplicité $r = 1$, on a $s = \varphi$, donc $a = \rho$; donc $\Sigma' = \int s d\varphi = \frac{\varphi^2}{2}$, $\Sigma'' = \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3}$ &c et par conséquent $A' = \frac{\rho^2}{2}$, $A'' = \frac{\rho^3}{2 \cdot 3}$ &c donc

$$\begin{aligned} a &= \rho & a' &= \frac{a\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{2 \cdot 3} \\ b &= a\rho - \frac{\rho^2}{2} & b' &= a'\rho - \frac{a\rho^3}{2 \cdot 3} + \frac{\rho^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ & & & \&c \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} a &= \rho & a'' &= \frac{16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \rho^5 \\ b &= \frac{\rho^2}{2} & b'' &= \frac{61}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \rho^6 \\ a' &= \frac{2}{2 \cdot 3} \rho^3 & a''' &= \frac{272}{2 \cdot 3 \cdots 7} \rho^7 \\ b' &= \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} \rho^4 & & \&c. \end{aligned}$$

f. 125v Donc égalant successivement ces valeurs on aura

[†]contin

⁸⁸Voir la note 59.

^{††}Rature au contenu illisible.

$a = b$	donne	$\rho = 2$	trop grande
$b = a'$		$\rho = \frac{3}{2}$	trop petite
$a' = b'$		$\rho = \frac{8}{5}$	trop grande
$b' = a''$		$\rho = \frac{25}{16}$	trop petite
&c		&c	

(voyez la page 107 du tome IV des oeuvres de M. Bernoulli).

11. Pour apprecier maintenant l'exactitude de ces differentes approximations, nous remarquerons que par les formules de l'art. 4⁸⁹ on a (à cause de $s = \varphi$) $X' = 1 - \cos \varphi = 1$ (en faisant $\varphi = \rho$), $X''' = -\frac{1}{3}$, $X^v = \frac{1}{5}$ &c donc on aura dans le cas present en general f. 126r

$$a^v = \frac{2}{\rho} \left(1 + \frac{1}{3^{2v+2}} + \frac{1}{5^{2v+2}} + \&c \right).$$

De meme par les formules de l'art. 5⁹⁰ on aura (à cause de $\sigma = \psi$)

$$Y' = \int \sin \psi \cdot \psi d\psi = -\psi \cos \psi + \int \cos \psi d\psi = -\psi \cos \psi + \sin \psi = 1,$$

en faisant $\psi = \rho$; de meme

$$Y''' = - \int \sin 3\psi \cdot \psi d\psi = \frac{\psi \cos 3\psi}{3} - \frac{1}{3} \int \cos 3\psi d\psi = \frac{\psi \cos 3\psi}{3} - \frac{\sin 3\psi}{3^2} = \frac{1}{3^2}$$

lorsque $\psi = \rho$; et ainsi de suite; donc[†] en general

$$b^v = \frac{2}{\rho} \left(1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c \right).$$

Supposons maintenant que les valeurs de a^v , et de b^v tirées des formules de l'art. prec. soient representées par f. 126v

$$a^v = P^v \rho^{2v+1}, \quad b^v = Q^v \rho^{2v+2}$$

P^v , et Q^v etant des coeficiens numeriques; et la comparaison des quantités a^v , et b^v donnera⁹¹

$$\rho = \frac{P^v}{Q^v}.$$

⁸⁹Il s'agit en fait des articles 4 et 5.

⁹⁰Il s'agit en fait de l'article 6.

[†]on aura

⁹¹Lagrange va observer que $\frac{E_{2v+1}}{(2v+1)!} / \frac{E_{2v+2}}{(2v+2)!} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (ce qui découle de $E_n \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} n!$, voir par exemple [9, éq. (33)]).

Or par les formules precedentes on a

$$P^v \rho^{2v+1} = \frac{2}{\rho} \left(1 + \frac{1}{3^{2v+2}} + \frac{1}{5^{2v+2}} + \&c \right),$$

$$Q^v \rho^{2v+2} = \frac{2}{\rho} \left(1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c \right)$$

donc divisant l'une de ces expressions par l'autre il viendra

$$\frac{Q^v}{P^v} \rho = \frac{1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c}{1 + \frac{1}{3^{2v+2}} + \frac{1}{5^{2v+2}} + \&c}$$

f. 127r d'où l'on tire que

$$\rho = \frac{P^v}{Q^v} \frac{1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c}{1 + \frac{1}{3^{2v+2}} + \frac{1}{5^{2v+2}} + \&c}.$$

Donc pour[†] corriger la valeur de ρ tirée de la comparaison des quantités a^v , et b^v ^{††} il faudra la multiplier encore par

$$\frac{1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c}{1 + \frac{1}{3^{2v+2}} + \frac{1}{5^{2v+2}} + \&c}$$

f. 127v et comme[‡] cette quantité est évidemment < 1 il est clair que la valeur $\frac{P^v}{Q^v}$ ^{‡‡} sera plus grande que la veritable; on voit aussi que plus v sera grand plus la quantité dont il s'agit approchera de l'unité, et par consequent aussi la valeur $\frac{P^v}{Q^v}$ approchera de la veritable valeur de ρ .

Si on compare maintenant les quantités b^v et a^{v+1} , on aura $\rho = \frac{Q^v}{P^{v+1}}$. Or

$$P^{v+1} \rho^{2v+3} = \frac{2}{\rho} \left(1 + \frac{1}{3^{2v+4}} + \frac{1}{5^{2v+4}} + \&c \right),$$

$$Q^v \rho^{2v+2} = \frac{2}{\rho} \left(1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c \right)$$

donc

$$\frac{P^{v+1} \rho}{Q^v} = \frac{1 + \frac{1}{3^{2v+4}} + \frac{1}{5^{2v+4}} + \&c}{1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c}$$

d'où

$$\rho = \frac{Q^v}{P^{v+1}} \frac{1 + \frac{1}{3^{2v+4}} + \frac{1}{5^{2v+4}} + \&c}{1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c}.$$

f. 128r Donc pour corriger la valeur de ρ tirée de la comparaison des quantités b^v et a^{v+1} , il

[†] que

^{††} devienne exacte

[‡] donc puisque

^{‡‡} Ratures au contenu illisible.

faudra la multiplier par

$$\frac{1 + \frac{1}{3^{2v+4}} + \frac{1}{5^{2v+4}} + \&c}{1 - \frac{1}{3^{2v+3}} + \frac{1}{5^{2v+3}} - \&c}.$$

Cette quantité est évidemment > 1 ; donc la valeur $\frac{Q^v}{P^{v+1}}$ sera moindre[†] que la vraie valeur de ρ ; mais plus v sera grand, plus aussi la quantité dont il s'agit approchera d'être = 1; et par consequent la valeur $\frac{Q^v}{P^{v+1}}$ approchera aussi de la véritable valeur de ρ .

12. Si l'amplitude ρ de l'arc de courbe AB au lieu d'être de 90° degrés, comme nous l'avons supposé avec M. Bernoulli, avoit une autre valeur quelconque, alors il faudroit faire quelque changement aux formules que nous venons de trouver. f. 128v

Et d'abord pour ce qui est de celles de l'art. 3, elles demeureroient les memes; mais dans celles de l'art. 4 il faudroit remarquer

1°. Que $\cos \rho x$ est en general (en nommant D l'angle de 90° degrés)⁹²

$$\left(1 - \frac{\rho^2 x^2}{D^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2 x^2}{9D^2}\right) \left(1 - \frac{\rho^2 x^2}{25D^2}\right) \dots\dots;$$

de sorte qu'il faudra mettre $\frac{\rho x}{D}$ à la place de x .

2°. Qu'à cause que ρ n'est plus = 90° , on aura en général⁹³ f. 129r

$$\alpha = \frac{2X'}{\rho \sin \rho}, \quad \beta = \frac{2X'''}{3\rho \sin 3\rho}, \quad \gamma = \frac{2X^v}{5\rho \sin 5\rho}, \quad \&c.$$

D'où il s'ensuit qu'en considerant les memes expressions de X' , X''' , X^v &c on aura dans le cas present

$$a^v = \frac{2\rho^{2v}}{\rho D^{2v}} \left(\frac{X'}{\sin \rho} + \frac{X'''}{3^{2v+1} \sin 3\rho} + \frac{X^v}{5^{2v+1} \sin 5\rho} + \&c \right).$$

3°. Qu'on aura aussi en général comme dans l'art. 5

$$X = \cos x\varphi \int \cos x\varphi ds + \sin x\varphi \int \sin x\varphi ds;$$

[†] plus grande

⁹²Lagrange note maintenant $D = \pi/2$, suppose $\rho \neq \pi/2$ et substitue ρx dans l'expression $\cos x =$

$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x}{D(2n-1)}\right)^2\right]$.

⁹³Voir la note 69.

d'où^{††}, en faisant $\varphi = \rho, x = 1, 3, 5 \&c$,

$$\begin{aligned} X' &= \cos \rho \int \cos \varphi ds + \sin \rho \int \sin \varphi ds \\ X''' &= \cos 3\rho \int \cos 3\varphi ds + \sin 3\rho \int \sin 3\varphi ds \\ X^v &= \cos 5\rho \int \cos 5\varphi ds + \sin 5\rho \int \sin 5\varphi ds \\ &\&c. \end{aligned}$$

f. 129v 4°. De meme dans les formules de l'art. 6 on auroit à la place des valeurs de b^v , et de $Y', Y''', \&c$ que nous avons trouvées, celles-ci

$$b^v = \frac{2\rho^{2v}}{\rho D^{2v}} \left(\frac{Y'}{\sin \rho} + \frac{Y'''}{3^{2v+1} \sin 3\rho} + \frac{Y^v}{5^{2v+1} \sin 5\rho} + \&c \right)$$

et

$$\begin{aligned} Y' &= \cos \rho \int \cos \psi ds + \sin \rho \int \sin \psi ds \\ Y''' &= \cos 3\rho \int \cos 3\psi ds + \sin 3\rho \int \sin 3\psi ds \\ Y^v &= \cos 5\rho \int \cos 5\psi ds + \sin 5\rho \int \sin 5\psi ds \\ &\&c. \end{aligned}$$

f. 130r 5°. Les expressions de s^n et de t^n de l'art. 7 deviendroient donc dans le cas présent

$$\begin{aligned} s^n &= \frac{2X'}{\rho \sin \rho} \left(\frac{\rho^{2n-2} \varphi^2}{2D^{2n-2}} - \frac{\rho^{2n-4} \varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 D^{2n-4}} + \&c \pm \frac{\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \cdots 2n} \right) \\ &+ \frac{2X'''}{3\rho \sin 3\rho} \left(\frac{\rho^{2n-2} \varphi^2}{2(3D)^{2n-2}} - \frac{\rho^{2n-4} \varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 (3D)^{2n-4}} + \&c \pm \frac{\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \cdots 2n} \right) \\ &+ \frac{2X^v}{5\rho \sin 5\rho} \left(\frac{\rho^{2n-2} \varphi^2}{2(5D)^{2n-2}} - \frac{\rho^{2n-4} \varphi^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 (5D)^{2n-4}} + \&c \pm \frac{\varphi^{2n}}{2 \cdot 3 \cdots 2n} \right) \\ &+ \&c \mp \Sigma^n \end{aligned}$$

f. 130v et⁹⁴

^{††}et de la

⁹⁴Lagrange écrit X' partout. Nous avons corrigé.

$$\begin{aligned}
 t^n &= \frac{2X'}{\rho \sin \rho} \left(\frac{\rho^{2n} \varphi}{D^{2n}} - \frac{\rho^{2n-2} \varphi^3}{2 \cdot 3 D^{2n-2}} + \&c \mp \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n+1} \right) \\
 &+ \frac{2X'''}{3\rho \sin 3\rho} \left(\frac{\rho^{2n} \varphi}{(3D)^{2n}} - \frac{\rho^{2n-2} \varphi^3}{2 \cdot 3 (3D)^{2n-2}} + \&c \mp \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n+1} \right) \\
 &+ \frac{2X^v}{5\rho \sin 5\rho} \left(\frac{\rho^{2n} \varphi}{(5D)^{2n}} - \frac{\rho^{2n-2} \varphi^3}{2 \cdot 3 (5D)^{2n-2}} + \&c \mp \frac{\varphi^{2n+1}}{2 \cdot 3 \dots 2n+1} \right) \\
 &+ \&c \pm \Sigma^{2n+1}
 \end{aligned}$$

et par des procedés semblables a ceux[†] du meme article 6, se reduiroient ensuite a celles-ci (en faisant $\pi = \frac{\rho}{D}$)

f. 131r

$$\begin{aligned}
 s^n &= \frac{2}{\rho} \left(\frac{X'}{\sin \rho} \left((1 - \cos \frac{\varphi}{\pi}) \pi^{2n} + \frac{\Phi'}{\pi^2} \right) + \frac{X'''}{\sin 3\rho} \left(\frac{1 - \cos \frac{3\varphi}{\pi}}{3^{2n+1}} \pi^{2n} + \frac{\Phi'''}{\pi^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{X^v}{\sin 5\rho} \left(\frac{1 - \cos \frac{5\varphi}{\pi}}{5^{2n+1}} \pi^{2n} + \frac{\Phi^v}{\pi^2} \right) + \&c \right) \mp \Sigma^{2n} \\
 t^n &= \frac{2}{\rho} \left(\frac{X'}{\sin \rho} \left(\sin \frac{\varphi}{\pi} \pi^{2n+1} + \frac{\Psi'}{\pi} \right) + \frac{X'''}{\sin 3\rho} \left(\frac{\sin \frac{3\varphi}{\pi}}{3^{2n+2}} \pi^{2n+1} + \frac{\Psi'''}{\pi} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{X^v}{\sin 5\rho} \left(\frac{\sin \frac{5\varphi}{\pi}}{5^{2n+2}} \pi^{2n+1} + \frac{\Psi^v}{\pi} \right) + \&c \right) \pm \Sigma^{2n}
 \end{aligned}$$

dans lesquelles je suppose en général^{††}

f. 131v

$$\begin{aligned}
 \Phi^p &= \frac{\sin \frac{p\varphi}{\pi} \int \varphi^{2n+1} \sin \frac{p\varphi}{\pi} d\varphi + \cos \frac{p\varphi}{\pi} \int \varphi^{2n+1} \cos \frac{p\varphi}{\pi} d\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \cdot 2n+1}, \\
 \Psi^p &= \frac{\cos \frac{p\varphi}{\pi} \int \varphi^{2n+1} \sin \frac{p\varphi}{\pi} d\varphi - \sin \frac{p\varphi}{\pi} \int \varphi^{2n+1} \cos \frac{p\varphi}{\pi} d\varphi}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \cdot 2n+1}.
 \end{aligned}$$

13. Maintenant il est facile de prouver[†] par des raisonnemens analogues à ceux de l'art. 8 qu'en supposant $n = \infty$ les expressions de s^n , et de t^n se reduiront necessairement a celles-ci

$$s^n = \frac{2X' \pi^{2n}}{\rho \sin \rho} \left(1 - \cos \frac{\varphi}{\pi} \right), \quad t^n = \frac{2X' \pi^{2n+1}}{\rho \sin \rho} \sin \frac{\varphi}{\pi}$$

desorte que les courbes $I Z$ et $Z X$ de l'art. 8 seront exprimées dans le cas présent par les équations

f. 132r

[†] lesquelles étant traitées comme celles

^{††} en supposant en général

[†] Ratures au contenu illisible.

$$w = \frac{2X'\rho^{2n-1}}{D^{2n}\sin\rho} \left(1 - \cos \frac{D\varphi}{\rho}\right), \quad z = \frac{2X'\rho^{2n}}{D^{2n+1}\sin\rho} \sin \frac{D\varphi}{\rho}.$$

Or ces equations expriment toujours des cicloides decrites par la rotation d'un cercle sur la peripherie d'un autre cercle immobile. En effet en nommant R le rayon du cercle immobile, r celui du cercle mobile, s l'arc de cicloide dont l'amplitude est φ , on aura pour l'equation de la cicloide

$$s = \frac{4r(r+R)}{R} \sin \frac{R\varphi}{2r+R}$$

f. 132v si l'arc s est pris depuis le sommet de la cicloide ; ou

$$s = \frac{4r(r+R)}{R} \left(1 - \cos \frac{R\varphi}{2r+R}\right)$$

si l'arc s est pris depuis le point qui est a 90° d'amplitude du sommet.

Comparant donc ces formules avec les precedentes on aura

$$\frac{4r(r+R)}{R} = \frac{2X'\rho^{2n-1}}{D^{2n}\sin\rho}, \quad \frac{R}{2r+R} = \frac{D}{\rho};$$

d'ou en faisant pour abreger $\frac{\rho}{D} = \lambda$, on tire

$$r = \frac{X'\lambda^{2n+1}}{(1+\lambda)\rho\sin\rho}, \quad R = \frac{2X'\lambda^{2n+2}}{(1-\lambda^2)\rho\sin\rho}.$$

Ainsi on connoitra les rayons des cercles generateurs.

f. 133r Au reste en supposant $n = \infty$, il est clair que λ^{2n} sera une quantité infiniment petite ou infiniment grande suivant que λ sera $<$ ou $>$ 1, c'est a dire suivant que l'angle ρ que forment les perpendiculaires menées aux extremités de la premiere courbe sera plus petit ou plus grand que $\rho' = 90^\circ$. Donc[†] dans le premier cas les rayons des cercles generateurs seront infiniment petits, et dans le second ils seront infiniment grands ; d'où il est aisé de conclure que les dernieres courbes resultantes d'un nombre infini de developpemens se reduiront dans le premier cas à un point, et dans le second a des lignes droites. Ainsi il n'y a à proprement parler que le cas où l'angle dont il s'agit est droit dans lequel les developpées⁹⁵ se transforment en cicloides.

f. 133v

(Reçu le 4 novembre 2019)

[†]D'où il s'ensuit que

⁹⁵On les appelle aujourd'hui «développantes».