Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 66 (2020)

Heft: 3-4

Artikel: Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray)

Autor: Colliot-Thélène, Jean-Louis

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-919585

L'Enseignement Mathématique (2) 66 (2020), 447–487 DOI 10.4171/LEM/66-3/4-8

Zéro-cycles sur les surfaces de del Pezzo (Variations sur un thème de Daniel Coray)

Jean-Louis Colliot-Thélène

Résumé. Soit X une surface projective, lisse, géométriquement rationnelle sur un corps de caractéristique zéro. On lui associe deux entiers $N(X)$ et $M(X)$, fonctions simples du carré de la classe canonique. On établit les propriétés suivantes.

(a) Si le pgcd des degrés des points fermés sur X est 1, alors il existe des points fermés dont les degrés sont au plus égaux à $N(X)$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble.

(b) Si X possède un point rationnel, alors tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à $M(X)$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, et les points fermés de degré au plus égal à $M(X)$ engendrent le groupe de Chow des zéro-cycles de X.

Le résultat (a) généralise un théorème de Daniel Coray sur les surfaces cubiques (1974). Une combinaison de théorèmes de Bertini et d'utilisation de corps fertiles rend ici ses arguments plus flexibles. On établit ensuite les résultats par considération des différents types birationnels de surfaces géométriquement rationnelles : surfaces de del Pezzo et surfaces fibrées en coniques (ces dernières déjà étudiées avec D. Coray en 1979).

Un dernier paragraphe discute l'existence de points fermés de degré 3 non alignés sur une surface cubique sans point rationnel. On la relie à la question de la densité des points rationnels sur une surface de del Pezzo de degré 1.

Abstract. Let X be a smooth, projective, geometrically rational surface over a field of characteristic zero. To any such surface one associates two integers $N(X)$ and $M(X)$ which are simple functions of the square of the canonical class. We prove:

(a) If the gcd of the degrees of closed points on X is 1, then there exist closed points on X the degrees of which are coprime to one another as a whole and are less than or equal to $N(X)$.

(b) If X has a rational point, then any zero-cycle on X of degree at least equal to $M(X)$ is rationally equivalent to an effective cycle. Effective zero-cycles of degree less than or equal to $M(X)$ generate the Chow group of X.

Result (a) extends a theorem on cubic surfaces obtained by Daniel Coray in his thesis (1974). Combining Bertini theorems and large fields, we introduce some flexibility in his method. The results (a) and (b) then follow from a case by case analysis of the various birational equivalence classes of geometrically rational surfaces: del Pezzo surfaces and conic bundle surfaces (the latter type had been handled with D. Coray in 1979).

In a last section, for smooth cubic surfaces without a rational point, we relate the question whether there exists a degree 3 point which is not on a line to the question whether rational points are dense on a del Pezzo surface of degree 1.

Mathematics Subject Classification (2020). 14G05, 14J26, 14C99.

Keywords. Zero-cycles, rational points, rational surfaces, del Pezzo surfaces.

1. Introduction

Soient k un corps et X une k-variété algébrique, par quoi l'on entend un k-schéma séparé de type fini sur k. Donnons quelques rappels sur les zéro-cycles et l'équivalence rationnelle [Ful, Chap. I]. Un zéro-cycle sur X est une combinaison linéaire à coefficients entiers de points fermés. À tout tel zéro-cycle $z = \sum_P n_P P$, avec P point fermé et $n_P \in \mathbb{Z}$ nul sauf pour un nombre fini de points fermés P, on associe son degré

$$\deg_k(z) := \sum_P n_P[k(P) : k] \in \mathbb{Z},$$

où $k(P)$ est le corps résiduel d'un point fermé P, et $[k(P) : k]$ est le degré de cette extension finie de corps. Le groupe abélien libre $Z_0(X)$ des zéro-cycles contient le sous-groupe des zéro-cycles rationnellement équivalents à zéro. Celui-ci est par définition engendré par les zéro-cycles de la forme $p_*(\mathrm{div}_C(f))$, où C est une courbe sur k, normale, intègre, de corps des fonctions rationnelles $k(C)$, où $p : C \to X$ est un k-morphisme propre, où $f \in k(C)^*$ est une fonction rationnelle non nulle sur C, où $\mathrm{div}_C(f)) \in Z_0(C)$ est son diviseur sur C, qui est un zéro-cycle sur C, et où $p_* : Z_0(C) \to Z_0(X)$ est l'image directe par morphisme propre. Le quotient de $Z_0(X)$ par le sous-groupe des zéro-cycles rationnellement équivalents à zéro est appelé groupe de Chow des zéro-cycles sur X et est noté $CH_0(X)$. Lorsque X est propre sur k, l'application $\deg_k : Z_0(X) \to \mathbb{Z}$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle (puisque le degré du diviseur d'une fonction rationnelle sur une courbe propre, normale, intègre, est nul). On a donc dans ce cas une application induite $\deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$. On note alors $A_0(X)$ le noyau de cette application.

Un zéro-cycle $\sum_P n_P P$ est dit effectif si l'on a $n_P \geq 0$ pour tout P. Il y a identification entre l'ensemble $X(k)$ des points k-rationnels de X et l'ensemble des zéro-cycles effectifs de degré 1 de X.

Si X est une courbe C projective, lisse, géométriquement connexe de genre g sur le corps k, l'inégalité de Riemann pour la courbe C montre que l'on a les propriétés suivantes:

(i) Tout zéro-cycle de C de degré au moins égal à g est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

(ii) Si C possède un zéro-cycle de degré 1, alors la courbe C possède un zéro-cycle effectif de degré g et un zéro-cycle effectif de degré $g+1$.

(iii) Si $g \geq 1$ et C possède un point k-rationnel P_0, le groupe de Chow $CH_0(X)$ est engendré par les points fermés P de degré $\deg_k(P) \leq g$. En effet, pour tout zéro-cycle z, le zéro-cycle $z + (g - \deg_k(z))P_0$ est de degré g.

(iv) Si C est de genre 0 ou 1 et possède un zéro-cycle de degré 1, alors $C(k) \neq \emptyset$.

On peut se demander dans quelle mesure ces belles propriétés des zéro-cycles sur les courbes s'étendent aux zéro-cycles sur les variétés de dimension quelconque.

Pour les variétés projectives, lisses, connexes sur un corps algébriquement clos de degré de transcendance infini sur le corps premier, en particulier $k = \mathbb{C}$ le corps des complexes, une propriété comme (i) impose de sévères restrictions à la géométrie de la variété considérée. Ceci a fait l'objet de travaux bien connus de Mumford et de Bloch. De manière générale, pour $X/\mathbb{C}$ une telle variété, s'il existe un entier $d(X) > 0$ tel que tout zéro-cycle sur X de degré au moins $d(X)$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, alors pour tout $i \geq 2$ les groupes de cohomologie cohérente $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ sont nuls (Bloch et Srinivas [BS]). Pour $X/\mathbb{C}$ une surface projective et lisse, c'est une conjecture de Bloch qu'inversement la condition $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ implique l'existence d'un entier $d = d(X)$ comme ci-dessus.

Sur un corps k quelconque, il est alors naturel de se limiter aux k-variétés X projectives, lisses, géométriquement connexes qui vérifient: il existe un entier $d_{geom}(X)$ tel que, sur *tout* corps algébriquement clos Ω contenant k, tout zéro-cycle de degré au moins $d_{geom}(X)$ sur $X \times_k \Omega$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Parmi celles-ci, on trouve les variétés géométriquement rationnellement connexes, au sens de Kollár, Miyaoka et Mori. Pour ces variétés, on a $A_0(X_\Omega) = 0$, et donc $d_{geom}(X) = 1$ convient.

Une classe bien étudiée de telles variétés est celle des modèles projectifs et lisses d'espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes. En ce qui concerne l'analogue de la question (iv) ci-dessus, à savoir si l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 implique celle d'un point rationnel, pour les compactifications lisses d'espaces principaux homogènes de groupes algébriques linéaires connexes, ceci a été établi dans de nombreux cas (Serre, Sansuc, Bayer–Lenstra), mais des contre-exemples pour les espaces homogènes généraux ont été donnés par Florence et par Parimala. L'énoncé historique concerne les quadriques : une quadrique qui possède un point dans une extension de degré impair possède un point rationnel. Il fut conjecturé par Witt (1937), démontré par Artin (non publié, 1937) et par Springer [Spr].

En dimension 2, la classe des variétés (séparablement) rationnellement connexes coïncide avec celle des k-surfaces géométriquement rationnelles, pour lesquelles on dispose de la classification k-birationnelle de Enriques, Manin, Iskovskikh, Mori : tout telle surface est k-birationnelle soit à une surface fibrée en coniques sur une conique, soit à une surface de del Pezzo. Dans cet article, nous étudions systématiquement les énoncés de type (i), (ii), (iii) pour les surfaces de del Pezzo. En combinaison avec l'étude des zéro-cycles sur les surfaces fibrées en coniques faite avec Coray [CTC], ceci établit les théorèmes suivants, analogues des énoncés (i), (ii), (iii) ci-dessus pour les courbes.[1]

Théorème A (Théorème 6.1). *Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, sur un corps k de caractéristique zéro. Soit K_X la classe canonique de X. Soit*

$$N(X) = \max\big(10, \lfloor 4 - (K_X.K_X)/2 \rfloor\big).$$

Si X possède un zéro-cycle de degré 1, alors X possède des points fermés dont les degrés sont inférieurs ou égaux à $N(X)$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Théorème B (Théorème 6.2). *Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, sur un corps k de caractéristique zéro. Soit K_X la classe canonique de X. Supposons que X possède un point k-rationnel. Soit*

$$M(X) = \max\big(904, \lfloor 3 - (K_X.K_X)/2 \rfloor\big).$$

Tout zéro-cycle de degré au moins $M(X)$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. En particulier, le groupe de Chow des zéro-cycles est engendré par les points fermés de degré au plus $M(X)$.

Ceci pose deux questions :

[1] L'analogue de l'énoncé (iv) est connu, et rappelé dans la démonstration du théorème 6.1 : pour une k-surface X projective, lisse, géométriquement rationnelle avec $(K_X.K_X) \geq 4$, si X possède un zéro-cycle de degré 1, alors X possède un point rationnel.

(1) Peut-on établir ces énoncés, avec des entiers $N(X)$ et $M(X)$ ne dépendant que de la géométrie de X sur une clôture algébrique du corps de base k, sans utiliser la classification k-birationnelle des surfaces géométriquement rationnelles et une analyse cas par cas ?

(2) A-t-on des analogues de ces énoncés pour les variétés rationnellement connexes de dimension supérieure ?

Le point de départ de cet article est la thèse de Daniel Coray (Cambridge, UK, 1974) [Cor1]. Daniel Coray y montra que si une surface cubique lisse X définie sur un corps k parfait possède un point rationnel dans une extension finie de corps K/k de degré premier à 3, alors elle possède un point rationnel dans une extension de corps K/k de degré soit 1, soit 4, soit 10. Voici le principe de sa démonstration. On considère un point fermé P de degré premier à 3 aussi petit que possible, on fait passer par ce point et par un point de degré 3 une surface de $\mathbf{P}^3_k$ de degré aussi petit que possible, pour que le genre arithmétique p_a de la courbe intersection Γ soit aussi petit que posssible. Si cette courbe est lisse et géométriquement connexe de genre $g = p_a$, on applique le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ à un zéro-cycle de degré au moins égal à g, premier à 3, et de degré aussi petit que possible. Dans les bons cas, on établit ainsi l'existence sur Γ et donc sur X d'un zéro-cycle effectif, et donc d'un point fermé, de degré premier à 3 plus petit que celui que l'on avait au début, et on recommence le procédé. Le processus a ses limites : on n'arrive pas à résoudre les cas 4 et 10, dont la possibilité à ce jour n'est pas exclue.

La méthode fut ensuite appliquée par Coray [Cor2] aux surfaces de del Pezzo de degré 4, et une variante fut appliquée par Coray et moi [CTC] aux surfaces fibrées en coniques sur la droite projective.

Une difficulté technique dans ces articles est que les courbes obtenues dans un système linéaire donné ne sont pas a priori lisses ni même géométriquement irréductibles : on doit donc considérer et discuter les dégénérescences possibles.

Voici maintenant le contenu détaillé de l'article.

Au § 2, on donne un argument nouveau et général, combinant théorème de Bertini, déformation et spécialisation, qui dans ce type d'argument permet de ne considérer que le cas des courbes lisses. La souplesse obtenue nous permet de développer l'argument de Coray dans plusieurs directions.[2]

Au § 3.1 on reprend l'argument de Coray [Cor1] pour les surfaces cubiques.

Au § 3.2, on montre que si une surface cubique lisse possède un point rationnel, alors le groupe de Chow des zéro-cycles est engendré par les points

[2] B. Poonen m'a très récemment fait remarquer que l'utilisation des corps fertiles et en particulier des corps de séries formelles $k((t))$ pourrait souvent être remplacée par une utilisation du lemme de Lang-Nishimura ([CTCS, Lemme 3.1.1], [Poo, Thm. 3.6.11]) comme c'est fait dans [Poo, Lemma 9.4.8]. Les deux types d'arguments sont en fait très proches.

rationnels et les points fermés de degré 3, et que tout zéro-cycle de degré au moins 10 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Au § 4.1, on établit pour les surfaces de del Pezzo de degré 2 l'analogue du résultat de Coray pour les surfaces de del Pezzo de degré 2. On montre ici que s'il y a un point dans une extension finie de corps de degré impair, alors il y a un point dans une extension de degré 1, 3 ou 7. Le degré minimal impair 3 ne peut être exclu ([KM], voir la remarque 4.3).

Au § 4.2, on montre que si une surface de del Pezzo de degré 2 possède un point rationnel, alors tout zéro-cycle de degré 0 est rationnellement équivalent à la différence de deux zéro-cycles effectifs de degré 6, et que tout zéro-cycle de degré au moins 43 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Au § 5, on montre que sur une surface de del Pezzo de degré 1 tout zéro-cycle de degré 0 est rationnellement équivalent à la différence de deux zéro-cycles effectifs de degré 21, et que tout zéro-cycle de degré au moins 904 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Au § 6, on note que ces divers résultats, combinés avec [CTC], achèvent la démonstration des théorèmes A et B mentionnés ci-dessus.

Au § 7, logiquement indépendant du reste de l'article, on revient aux surfaces cubiques. On s'intéresse à une question soulevée par Qixiao Ma [Ma] : sur une surface cubique lisse sans point rationnel, existe-t-il un point fermé de degré 3 non découpé par une droite ? On relie ce problème à la question (ouverte) de la densité des points rationnels sur les surfaces de del Pezzo de degré 1.

Pour ne pas alourdir ce texte, on se limite aux corps de caractéristique nulle. On laisse au lecteur le soin de voir ce qui subsiste sur un corps quelconque. Des résultats dans cette direction sont obtenus dans [Cor1] et [Ma].

On utilise librement dans cet article la théorie de l'intersection sur les surfaces projectives lisses [Ser, Mum], la théorie des surfaces cubiques et plus généralement des surfaces de del Pezzo comme on peut la trouver dans les livres [Man2] et [Kol1], dans [Man1] et [Isk], et dans le rapport [VA]. On utilise aussi des résultats sur les variétés rationnellement connexes, établis par les techniques de déformation de Kollár, Miyaoka et Mori [Kol1, Kol2].

Daniel Coray, qui fut professeur à l'Université de Genève, et fut aussi directeur de publication de la revue l'Enseignement Mathématique, nous a quittés en 2015. C'était un esprit fin et original. Les démonstrations de l'article [CTCS], où un substitut du principe de Hasse fut établi pour la première fois pour une classe de variétés ne se ramenant pas par transformations birationnelles à des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires, en gardent la trace. À ce sujet on pourra aussi consulter ses *Notes de Géométrie et d'Arithmétique*, récemment traduites [Cor3]. Je suis heureux de pouvoir dédier cet article à sa mémoire.

2. Bertini et corps fertiles

2.1. Corps fertiles et R-densité. Un corps F est dit fertile (terminologie due à Moret-Bailly; en anglais on dit « large field ») s'il satisfait la propriété suivante: si une F-variété X intègre possède un F-point lisse, alors l'ensemble $X(F)$ de ses points F-rationnels est dense dans X pour la topologie de Zariski. On consultera [Pop] pour un rapport récent sur le sujet. Une extension finie d'un corps fertile est fertile. Pour tout corps k, le corps $F = k((t))$ des séries formelles sur k est fertile.

Soient k un corps et X une k-variété propre. La relation de R-équivalence sur $X(k)$ est par définition engendrée par la relation élémentaire suivante: deux k-points $A, B \in X(k)$ sont élémentairement liés s'il existe un k-morphisme $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ tel que A et B sont dans $f(\mathbf{P}^1(k))$. Si deux k-points P et Q sont R-équivalents, alors le zéro-cycle $P - Q$ est rationnellement équivalent à zéro sur X.

Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. On dira dans cet article que la k-variété X satisfait la *propriété de densité* si, pour toute extension finie de corps L/k telle que $X(L) \neq \emptyset$, l'ensemble $X(L)$ est dense dans X_L pour la topologie de Zariski. Sur un corps k fertile, toute k-variété lisse géométriquement connexe X satisfait la propriété de densité.

Une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^n_k$ pour $n \geq 3$ est k-unirationnelle dès qu'elle a un point rationnel (voir [Kol3]). Elle satisfait donc la propriété de densité.

On dira que la k-variété X satisfait la *propriété de R-densité* si, pour toute extension finie de corps L/k et tout $P \in X(L)$, les points $Q \in X(L)$ qui sont R-équivalents à P sont denses dans X_L pour la topologie de Zariski. Donnons deux classes de telles variétés.

Proposition 2.1. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Toute k-hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^n_k$, avec $n \geq 3$, satisfait la propriété de R-densité.*

Démonstration. On se ramène au cas $X(k) \neq \emptyset$. Comme X est alors k-unirationnelle [Kol3], il existe un ouvert non vide $V \subset \mathbf{P}^{n-1}_k$ et un k-morphisme génériquement fini dominant $f : V \to X$. Comme $f(V(k))$ est dense dans X pour la topologie de Zariski, il existe $A \in f(V(k))$ distinct de P tel que la droite par A et P découpe exactement trois points rationnels distincts, A, B, P sur X. La symétrie t_B par rapport à B est bien définie en A et satisfait $t_B(A) = P$. Quitte à remplacer V par un ouvert non vide W, $t_B \circ f$ définit un k-morphisme $g : W \to X$ qui est dominant et satisfait $P \in g(W(k))$. Comme W est un ouvert de $\mathbf{P}^{n-1}_k$, tout point de $g(W(k)) \subset X(k)$ est R-équivalent à P sur X. $\square$

L'énoncé suivant est dû à J. Kollár [Kol2, Thm. 1.4, Cor. 1.5, Rem. 1.10].

Théorème 2.2. *Soit k un corps fertile de caractéristique zéro. Si X est une k-variété projective et lisse géométriquement rationnellement connexe, alors elle satisfait la propriété de R-densité.*

Démonstration. Soient k un corps fertile de caractéristique zéro et X une k-variété projective et lisse géométriquement rationnellement connexe. Soit $P \in X(k)$. Kollár montre d'abord qu'il existe un k-morphisme $f : \mathbf{P}^1_k \to X$ tel que le fibré vectoriel f^*T_X soit ample sur $\mathbf{P}^1_k$ et que l'on ait deux k-points A, B de $\mathbf{P}^1_k$ avec $f(A) = P$ et $Q := f(B) \neq P$.

Il montre ensuite (point 4.2 de [Kol2]) qu'il existe une k-variété V qui est un ouvert du schéma $\mathrm{Hom}(\mathbf{P}^1_k, X, B \mapsto Q)$ tel que le morphisme d'évaluation

$$W = (\mathbf{P}^1_k \setminus B) \times_k V \to X$$

donné par $(t, g) \mapsto g(t)$ soit lisse.

Le k-point P est dans l'image de $W(k)$ par cette application, et tous les k-points de $f(W(k))$ sont R-équivalents sur X, via cette application, via le point $Q = g(B)$. □

Etant donnés une variété quasiprojective lisse intègre X sur le corps k (de caractéristique zéro) et un entier naturel $m \geq 1$, on note $\mathrm{Sym}^m X$ le quotient de X^m par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$. Il y a une bijection naturelle entre les k-points de $\mathrm{Sym}^m X$ et les zéro-cycles effectifs sur X de degré m. Le groupe $\mathfrak{S}_m$ agit librement sur le complémentaire dans X^m des diagonales partielles. Le quotient de ce complémentaire par $\mathfrak{S}_m$ est un ouvert lisse de $\mathrm{Sym}^m X$ qu'on notera $\mathrm{Sym}^m_{sep} X$. Les k-points de $\mathrm{Sym}^m_{sep} X$ correspondent aux zéro-cycles effectifs de la forme $\sum_j P_j$ avec P_j des points fermés distincts sur X (un tel zéro-cycle effectif, sans multiplicités, sera appelé séparable) dont les corps résiduels $k(P_j)$ satisfont $\sum_j [k(P_j) : k] = m$. On trouvera une étude générale détaillée de cette correspondance dans [Ryd].

Proposition 2.3. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective et lisse, géométriquement connexe. Soient $P_1, \dots, P_t$ des points fermés de degrés respectifs $s_1, \dots, s_t$ sur k et soit $z = P_1 + \cdots + P_t$ le zéro-cycle associé sur X, qui correspond aussi à un k-point de $W = \mathrm{Sym}^{s_1}_{sep} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t}_{sep} X$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des k-points de W, de zéro-cycle associé $z_1 + \cdots + z_t$ tels que pour chaque i le zéro-cycle effectif z_i, de degré s_i, soit rationnellement équivalent à P_i sur X. Si X satisfait la propriété de R-densité, alors $\mathcal{E} \subset W(k)$ est dense dans W pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. Il suffit de le montrer dans le cas $t = 1$. Soit donc $s > 0$ un entier et P un point fermé de degré s sur X, de corps résiduel L. Le point P définit un point de $X(L)$. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. La projection $\pi : X_L \to X$ induit une application π_* de $X(L)$ dans l'ensemble des cycles effectifs de degré s sur X. Cette application peut aussi être décrite de la manière suivante. Soit $P \in X(L)$ et $\{(P_1, \ldots, P_s)\}$ l'ensemble de ses images dans $X^s(\overline{k})$ par les divers plongement de L dans $\overline{k}$. L'image de $(P_1, \ldots, P_s) \in X^s(\overline{k})$ dans $\mathrm{Sym}^s X(\overline{k})$ est invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Ceci définit donc une application $X(L) \to \mathrm{Sym}^s X(k)$, ensemble qui coïncide avec l'ensemble des zéro-cycles effectifs de degré s sur X.

Si deux points P, Q de $X(L)$ sont R-équivalents sur X_L, alors les zéro-cycles $\pi_*(P)$ et $\pi_*(Q)$ sont rationnellement équivalents sur X. Sous l'hypothèse que X satisfait la propriété de R-densité, l'ensemble des points de $X(L)$ qui sont R-équivalents à P sur X_L est dense dans X_L pour la topologie de Zariski. Ceci implique que l'ensemble $\mathcal{E}$ des k-points de $\mathrm{Sym}^s X(k)$ correspondant à des zéro-cycles effectifs rationnellement équivalents à P, vus comme zéro-cycles de degré s sur X, est dense dans $\mathrm{Sym}^s X$ pour la topologie de Zariski. □

Pour la propriété plus faible de densité, on a le résultat suivant, dont la démonstration est identique à celle de la proposition 2.3.

Proposition 2.4. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective et lisse, géométriquement connexe. Soient $P_1, \ldots, P_t$ des points fermés de degrés respectifs $s_1, \ldots, s_t$ sur k et soit $z = P_1 + \cdots + P_t$ le zéro-cycle associé sur X, qui correspond aussi à un k-point de $W = \mathrm{Sym}^{s_1}_{sep} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t}_{sep} X$. Si X satisfait la propriété de densité, l'ensemble $\mathcal{E}$ des k-points de W, de zéro-cycle associé $z_1 + \cdots + z_t$ avec les z_i zéro-cycles effectifs de degré s_i, est dense dans W pour la topologie de Zariski.*

2.2. Théorème de Bertini et variantes. Rappelons l'une des versions des théorèmes de Bertini.

Théorème 2.5. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2 et engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Il existe un ouvert non vide de l'espace projectif dual de $\mathbf{P}^n_k$ tel que, pour tout hyperplan h de $\mathbf{P}^n_k$ correspondant à un point de cet ouvert, la k-variété $X_h = f^{-1}(h) \subset X$ soit projective, lisse, géométriquement connexe.*

Référence: Jouanolou [Jou, Chap. I, Théorème 6.3]. Sur un corps algébriquement clos: Hartshorne [Har, Cor. III.10.9 et Ex. III.11.3]

Lemme 2.6. *Soit k un corps. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme dont l'image engendre l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Soit $r \leq n+1$ un entier. Il existe un ouvert de Zariski non vide de X^r dont les points géométriques sont les r-uples $(P_1, \dots, P_r) \in X^r$ dont les images sont des points projectivement indépendants dans $\mathbf{P}^n$.*

Démonstration. C'est clair. □

Proposition 2.7. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Soit $r \leq n$ un entier. Il existe un ouvert non vide $U \subset X^r$ tel que, pour tout corps L contenant k et pour tout L-point $(P_1, \dots, P_r) \in U(L)$, il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_L$ tel que l'image réciproque $X_h = f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-variété lisse et géométriquement intègre contenant les points $\{P_1, \dots, P_r\}$.*

Démonstration. Soit d la dimension de X. Notons $\mathbf{P}^*$ le projectif des hyperplans de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n$. On note indifféremment h un point de $\mathbf{P}^*$ ou l'hyperplan de $\mathbf{P}$ qu'il définit. Pour $h \in \mathbf{P}^*$, on note $X_h = f^{-1}(h)$. Par hypothèse, chaque X_h est de dimension $d-1$. Par le théorème 2.5, il existe un ouvert non vide $W_0 \subset \mathbf{P}^*$ tel que pour tout $h \in W_0$, la variété X_h soit lisse et géométriquement connexe.

Soit $Z \subset X^r \times \mathbf{P}^*$ le fermé dont les points géométriques sont les $(P_1, \dots, P_r; h)$ avec $h \in \mathbf{P}^*$ et $P_i \in f^{-1}(h)$. Soient $p : Z \to \mathbf{P}^*$ et $q : Z \to X^r$ les deux projections.

Soit $U_1 \subset X^r$ un ouvert donné par le lemme 2.6. La restriction $V_1 = q^{-1}(U_1) \to U_1$ de $q : Z \to X^r$ au-dessus de U_1 est une fibration en espaces projectifs de dimension $N - r$. La fibre au-dessus d'un point $(P_1, \dots, P_r)$ consiste en les hyperplans de $\mathbf{P}^n$ qui contiennent $(P_1, \dots, P_r)$. Cette fibration est localement scindée pour la topologie de Zariski, localement c'est un espace projectif. La variété V_1 est donc lisse, géométriquement intègre, de dimension $rd + N - r$. Au-dessus de tout point $h \in \mathbf{P}^*$, la fibre de la projection $Z \to \mathbf{P}^*$ est le produit $(X_h)^r$, qui est de dimension $r(d-1)$. Si l'image de $V_1 \subset Z$ via la projection $p : Z \to \mathbf{P}^*$ n'était pas Zariski-dense dans $\mathbf{P}^*$, alors la dimension de V_1 serait au plus $r(d-1) + N - 1$. Ainsi le morphisme composé $V_1 \subset Z \to \mathbf{P}^*$ est dominant. Soit $W_1 \subset \mathbf{P}^*$ un ouvert non vide contenu dans son image. Soit $W = W_0 \cap W_1 \subset \mathbf{P}^*$. Soit $V = p^{-1}(W) \cap V_1 \subset Z$. Soit $U := q(V) \subset X^r$. C'est un ouvert de $U_1 \subset X^r$, puisque $q : V_1 \to U_1$ est un fibré projectif, en particulier est lisse. Comme $q : V_1 \to U_1$ est un fibré projectif localement scindé pour la topologie de Zariski, et que le corps de base k est infini, pour tout corps L contenant k, la flèche induite $V(L) \to U(L)$ est surjective.

Pour tout point $h \in W \subset \mathbf{P}^*$, l'image réciproque V_h via $V \to W$ est non vide, et c'est un ouvert de $p^{-1}(h) \subset X^r$. Par ailleurs $p^{-1}(h) = (X_h)^r$, qui est lisse et géométriquement connexe car on a $W \subset W_0$.

On a bien montré: Pour tout L-point $M = (P_1, \ldots, P_r)$ de U, il existe un L-hyperplan h de $\mathbf{P}^n_L$, contenant chacun des $f(P_i)$, et tel que $f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-hypersurface lisse et géométriquement intègre. □

La proposition 2.7 admet la généralisation suivante.

Proposition 2.8. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit X une k-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un k-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$. Soient $s_1, \ldots, s_t$ des entiers naturels tels que $\sum_i s_i \leq n$. Il existe un ouvert lisse non vide*

$$U \subset \mathrm{Sym}^{s_1}_{sep} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t}_{sep} X$$

tel que, pour tout corps L contenant k et tout L-point de U, correspondant à une famille de zéro-cycles effectifs séparables z_i sur X_L, avec z_i de degré s_i, il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_L$ tel que l'image réciproque $X_h = f^{-1}(h) \subset X_L$ soit une L-variété lisse et géométriquement intègre contenant les points du support du zéro-cycle $\sum_i z_i$.

Démonstration. On utilise la proposition 2.7 et les notations de sa démonstration. On introduit le fermé

$$Z_1 \subset \mathrm{Sym}^{s_1} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t} X \times \mathbf{P}^*$$

qui est l'image schématique de $Z \subset X^r \times \mathbf{P}^*$ par le morphisme fini

$$X^r \times \mathbf{P}^* \to \mathrm{Sym}^{s_1} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t} X \times \mathbf{P}^*.$$

La projection $Z \to X^r$ se quotiente par l'action du groupe fini $G = \mathfrak{S}_{s_1} \times \ldots \mathfrak{S}_{s_t}$, donnant la projection $Z_1 \to \mathrm{Sym}^{s_1} X \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{s_t} X$. On peut supposer que l'ouvert $U_1 \subset X^r$ dans la proposition précédente est contenu dans le complémentaire des diagonales partielles de X^r. On a $V_1 \subset Z$. Le morphisme $V_1 \to U_1$ définit un fibré projectif localement trivial sur U_1 pour la topologie de Zariski, et cette projection est compatible avec l'action fidèle de G sur V_1 et U_1. Il en résulte que le quotient $V_1/G \to U_1/G$ est un fibré projectif localement trivial pour la topologie de Zariski sur U_1/G. Soit $V' \subset V_1/G$ l'ouvert qui est l'image de l'ouvert $V \subset V_1$ par la projection $V_1 \to V_1/G$, puis $U' \subset U_1/G$ l'ouvert image de V' par le morphisme $V_1/G \to U_1/G$. Il résulte de ce qui précède que, pour tout corps L contenant k, la flèche induite $V'(L) \to U'(L)$ est surjective. Tout point géométrique de $\mathbf{P}^*$ qui est dans l'image de $V' \subset Z_1$ par la projection

$Z_1 \to \mathbf{P}^*$ est dans l'image de V, et donc correspond à un hyperplan dont l'intersection avec X est lisse et connexe. L'ouvert U' convient pour l'énoncé de la proposition. □

Théorème 2.9. *Soit F un corps de caractéristique zéro. Soit X une F-variété projective, lisse, géométriquement connexe. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n_F$ un F-morphisme d'image de dimension au moins 2, engendrant l'espace projectif $\mathbf{P}^n_F$. Soient $P_1, \dots, P_t$ des points fermés de X de degrés respectifs s_i sur k, tels que la somme des s_i soit au plus égale à n.*

(a) *Si X satisfait la propriété de densité, par exemple si le corps F est fertile, alors il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_F$ défini sur F tel que $X_h = f^{-1}(h) \subset X$ soit lisse, géométriquement intègre, et contienne des zéro-cycles effectifs $z_1, \dots, z_t$ de degrés respectifs $s_1, \dots, s_t$.*

(b) *Si la variété X satisfait la propriété de R-densité, par exemple si F est fertile et X est géométriquement rationnellement connexe, alors il existe un hyperplan $h \subset \mathbf{P}^n_F$ défini sur F tel que $X_h = f^{-1}(h) \subset X$ soit lisse, géométriquement intègre, et contienne des zéro-cycles effectifs $z_1, \dots, z_t$ de degrés respectifs $s_1, \dots, s_t$, chaque zéro-cycle z_i étant rationnellement équivalent à P_i sur X.*

Démonstration. Le point (a) est obtenu en combinant les propositions 2.4 et 2.8, et en utilisant la définition des corps fertiles.

Le point (b) est obtenu en combinant les propositions 2.3 et 2.8, et le théorème 2.2 pour les variétés rationnellement connexes sur un corps fertile. □

2.3. Générisation et spécialisation. On a l'énoncé bien connu suivant.

Lemme 2.10. *Soit R un anneau de valuation discrète excellent, F son corps des fractions et k son corps résiduel. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma propre. Si la F-variété $\mathcal{X} \times_R F$ possède un point fermé P de degré d, alors il existe un zéro-cycle effectif z de degré d sur la k-variété $\mathcal{X} \times_R k$.*

Démonstration. La fermeture intégrale de R dans l'extension $F(P)/F$ est un anneau de Dedekind S semi-local, fini et plat sur R, de degré d. Comme le R-schéma $\mathcal{X}$ est propre, l'adhérence du point $P \in X(F)$ dans $\mathcal{X}$ est un schéma fini et plat de degré d. La fibre de ce point au-dessus de $\mathrm{Spec}(k) \subset \mathrm{Spec}(R)$ est un sous k-schéma de dimension zéro de $\mathcal{X} \times_R k$, dont le zéro-cycle associé est de degré d. □

Proposition 2.11. *Soient k un corps et $F = k((t))$ le corps des séries formelles sur k. Soit X une k-variété propre.*

(a) *Le pgcd des degrés des points fermés a la même valeur sur X et sur X_F.*

(b) *Pour tout entier $r \geq 1$, le plus petit degré d'un point fermé de degré premier à r, qui est aussi le plus petit degré d'un zéro-cycle effectif de degré premier à r, a la même valeur sur X et sur X_F.*

(c) *Soit I un ensemble d'entiers naturels. Si le groupe de Chow des zéro-cycles sur X_F est engendré par les classes de cycles effectifs de degré $d \in I$, alors il en est de même sur X.*

(d) *Soit $d \geq 0$ un entier. Si tout zéro-cycle sur X_F de degré au moins d est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, alors il en de même sur X.*

Démonstration. Si $P \in X$ est un point fermé de X, alors $P \times_k F$ est un point fermé de X_F de même degré. Si M est un point fermé de X_F de degré d, d'après le lemme 2.10, il existe un zéro-cycle sur X de degré d, et si d est premier à r, il existe sur X un point fermé de degré premier à r et au plus égal à d. Les énoncés (c) et (d) sont des conséquences de l'existence et des propriétés de l'homomorphisme de spécialisation sur les groupes de Chow [Ful, §20.3]. □

3. Surfaces cubiques lisses

3.1. Surfaces cubiques avec un zéro-cycle de degré 1. Le théorème suivant est dû à Coray [Cor1]. Nous en reproduisons les différents pas, avec la simplification apportée par l'utilisation du théorème 2.9(a): il n'y a plus de discussion des cas possibles où les courbes utilisées dans la démonstration sont réductibles ou singulières.

Théorème 3.1 (Coray). *Soit k un corps de caractéristique zéro. Si une k-surface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^3_k$ contient un zéro-cycle de degré 1, alors elle possède un point fermé de degré 1, ou 4, ou 10.*

Démonstration. L'énoncé peut se reformuler ainsi: si la k-surface cubique lisse possède un point fermé de degré d premier à 3, alors le degré minimal d'un tel point est 1, ou 4, ou 10. Notons que ce degré minimal est aussi le degré minimal d'un zéro-cycle effectif de degré premier à 3.

On va systématiquement appliquer le théorème 2.9(a). On peut le faire soit en invoquant le fait que la propriété de densité vaut pour les surfaces cubiques lisses sur k car elles sont k-unirationnelles dès qu'elles ont un k-point (Segre, [Kol3]), soit en utilisant la la proposition 2.11 qui permet, pour le théorème à démontrer, de supposer le corps k fertile. On note K le faisceau canonique sur X. Le système linéaire complet $|-K|$ associé au faisceau inversible $-K$ définit le plongement de X dans $\mathbf{P}^3_k$. Pour tout entier $n > 0$, le système linéaire $|-nK|$ définit un plongement dans un espace projectif, d'image de dimension 2, engendrant cet espace projectif. Pour un fibré inversible $\mathcal{L}$, on note $h^i(X, \mathcal{L})$, ou $h^i(\mathcal{L})$ quand le contexte est clair, la dimension sur k du groupe de cohomologie cohérente $H^i(X, \mathcal{L})$.

Pour la surface cubique lisse X comme pour toute surface projective et lisse géométriquement rationnelle, on a $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, et donc $\chi(X, \mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) + h^2(\mathcal{O}_X) = 1$. Soit $n \geq 1$.

Par dualité de Serre [AK, Chap. IV, Prop. 4.1] on a $h^2(-nK) = h^0((n+1)K)$ et $h^1(-nK) = h^1((n+1)K)$. On a $h^0((n+1)K) = 0$ car $-K$ est ample.

On a aussi $h^1((n+1)K) = 0$ par le théorème d'annulation de Kodaira, puisque $-K$ est ample.

Pour $n \geq 1$, le théorème de Riemann-Roch sur la surface X ([Ser, Chap. IV, §8], [Mum, Lecture 12, Prop. 3]) donne donc

$$h^0(-nK) = 3n(n+1)/2 + 1.$$

Si Γ est une courbe projective, lisse, géométriquement connexe dans le système linéaire $|-nK|$, on a la formule

$$g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = 3n(n-1)/2 + 1.$$

Une telle courbe contient un zéro-cycle de degré $3n = (-K.-nK)$, découpé par un plan de $\mathbf{P}^3_k$.

Soit $d > 0$ le degré minimum d'un zéro-cycle effectif de degré premier à 3 sur X. C'est donc aussi le degré minimum d'un point fermé de degré premier à 3 sur X. Si $d = 1$, on a fini. Supposons $d \geq 2$. Si la surface cubique possède un point sur une extension quadratique de k, une construction bien connue montre qu'elle possède un point rationnel. On se limite donc dorénavant au cas $d \geq 4$. La surface X contient un point fermé de degré 3, découpé par une droite quelconque de $\mathbf{P}^3_k$.

Il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que

$$g = 3n(n-1)/2 + 1 \leq d < 3n(n+1)/2 + 1.$$

Comme on a $d \geq 4$, on a $n \geq 2$.

Supposons d'abord $g = 3n(n-1)/2+1 < d \leq 3n(n+1)/2-3$. Comme d est premier à 3 et $d+3 \leq 3n(n+1)/2$, le théorème 2.9(a) assure l'existence d'une courbe Γ projective, lisse, géométriquement connexe dans le système linéaire $|-nK|$, contenant la réunion d'un zéro-cycle effectif de degré d et d'un zéro-cycle effectif de degré 3, donc contenant un zéro-cycle de degré 1, et donc aussi un zéro-cycle de degré $g = 3n(n-1)/2+1$. Par le théorème de Riemann-Roch, la courbe Γ possède donc un zéro-cycle effectif de degré $3n(n-1)/2+1 < d$, ce qui contredit l'hypothèse que d est minimal.

Il reste donc les possibilités suivantes:

$$\begin{aligned} d &= 3n(n+1)/2, \\ d &= 3n(n+1)/2-1, \\ d &= 3n(n+1)/2-2, \\ d &= 3n(n-1)/2+1. \end{aligned}$$

Le cas $d = 3n(n+1)/2$ est exclu, car d est premier à 3.

Dans chacun des trois autres cas, toute courbe lisse Γ dans le système linéaire $|-nK|$ contenant un zéro-cycle de degré d contient un zéro-cycle de degré 4, car, comme on l'a déjà indiqué, elle contient un zéro-cycle de degré $3n$.

Supposons $d = 3n(n+1)/2-1$. Par le théorème 2.9(a), il existe une courbe Γ lisse géométriquement connexe dans le système linéaire $|-nK|$ contenant un zéro-cycle effectif de degré d, degré qui est congru à 2 mod. 3. Comme la courbe Γ contient un zéro-cycle de degré 4, elle contient donc aussi un zéro-cycle de degré $d-4$, degré qui est premier à 3. Comme on a $n \geq 2$, on a

$$g = 3n(n-1)/2+1 \leq 3n(n+1)/2-1-4 = d-4.$$

Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ assure alors l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré $d-4$, premier à 3, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Supposons $d = 3n(n+1)/2-2$ et n impair. Par le théorème 2.9(a), il existe une courbe Γ lisse géométriquement connexe dans le système linéaire $|-nK|$ contenant un zéro-cycle effectif de degré d, degré qui est congru à 1 mod. 3. Comme 2 est combinaison linéaire de $3n(n+1)/2-2$ et $3n$, il existe alors un zéro-cycle de degré 2 sur Γ. La courbe Γ contient donc un zéro-cycle de degré $d-2$. Comme on a $n \geq 2$, on a

$$g = 3n(n-1)/2+1 \leq 3n(n+1)/2-2-2 = d-2.$$

Par le théorème de Riemann-Roch, sur la courbe Γ, il existe un zéro-cycle effectif de degré $d-2$, qui est premier à 3. Ainsi X possède un zéro-cycle effectif de degré $d-2$ premier à 3, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Supposons donc $d = 3n(n+1)/2-2$ et n pair, donc $n \geq 2$. Par le théorème 2.9(a), il existe une courbe Γ lisse dans le système linéaire $|-nK|$ contenant un zéro-cycle effectif de degré d, degré qui est congru à 1 mod. 3.

Dans le cas $n = 2$, on a $g = 4$ et $d = 7$. Comme Γ contient un zéro-cycle de degré 4, le théorème de Riemann-Roch sur une courbe montre l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré 4 sur une telle courbe, et donc aussi sur X, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

On peut donc supposer n pair, $n \geq 4$. Dans ce cas, on a

$$g = 3n(n-1)/2 + 1 \leq 3n(n+1)/2 - 2 - 8 = d - 8.$$

Comme Γ contient un zéro-cycle de degré 4, le théorème de Riemann-Roch sur une courbe montre l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré $d-8$ sur Γ et donc sur X, et $d-8$ est congru à 2 modulo 3, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Il reste à examiner le cas $d = 3n(n-1)/2 + 1$, où l'on a $n \geq 2$ et $d \geq 4$.

On a donc une k-surface X avec un point fermé P de degré d premier à 3 minimal, au moins égal à 4. L'unique entier n tel que

$$3n(n-1)/2 + 1 \leq d < 3n(n+1)/2 + 1$$

satisfait $3n(n-1)/2 + 1 = d$.

On prend un point fermé M de degré 3 sur X découpé par une droite D définie sur k, qu'on peut choisir générale car le corps k est infini. Soit $p : Y \to X$ l'éclatement de X en le point fermé M. On note $E \subset Y$ le diviseur exceptionnel et K le faisceau canonique sur X.

Le système linéaire $|p^*(-K) - E|$ définit un morphisme $Y \to D = \mathbf{P}^1_k$, dont les fibres sont les sections de X par les plans contenant D. On a un plongement $Y \subset \mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^3_k$ dont la projection sur le premier facteur est définie par le système linéaire $|p^*(-K) - E|$ et la projection sur le second facteur est définie sur le second facteur par $|p^*(-K)|$. Il s'en suit que pour tout couple d'entiers $a \geq 1, b \geq 1$ le faisceau inversible $a(p^*(-K) - E) + bp^*(-K)$ est très ample. En particulier, pour $n \geq 3$, le faisceau $p^*(-nK) - 2E$ est très ample. Le fait que ces faisceaux inversibles soient très amples peut aussi s'établir en utilisant [Rei, Thm. 1].

On considère sur Y les systèmes linéaires $|p^*(-nK) - 2E|$ pour $n \geq 1$. Ceci correspond aux sections de X par des surfaces de degré $n \geq 3$ dans $\mathbf{P}^3$, avec une singularité au point fermé M, qui est de degré 3. Imposer une telle singularité correspond à 9 conditions linéaires.

Lemme 3.2. *Soit $n \geq 3$. On a $h^0(Y, p^*(-nK) - 2E) = 3n(n+1)/2 - 8$, le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ définit un plongement de la surface Y dans un espace projectif de dimension $3n(n+1)/2 - 9$. Toute courbe géométriquement connexe et lisse Γ dans le système linéaire associé satisfait $g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = 3n(n-1)/2 - 2$.*

Démonstration. Le faisceau canonique K_Y sur Y est $p^*(K)+E$. Par dualité de Serre, on a

$$\begin{aligned} h^2\big(p^*(-nK)-2E\big) &= h^0\big(p^*(K)+E+p^*(nK)+2E\big) \\ &= h^0\Big(p^*\big((n+1)K\big)+3E\Big) \end{aligned}$$

et

$$h^1\big(p^*(-nK)-2E\big) = h^1\Big(p^*\big((n+1)K\big)+3E\Big).$$

L'opposé de $p^*((n+1)K)+3E$ est $p^*(-(n+1)K)-3E$ qui est la somme de $3(p^*(-K)-E)$ et de $p^*(-mK)$ avec $m \geq 1$, et donc est très ample. Ceci implique d'une part $h^0(p^*((n+1)K)+3E)=0$, d'autre part d'après le théorème d'annulation de Kodaira, $h^1(p^*((n+1)K)+3E)=0$. En utilisant le théorème de Riemann-Roch sur la surface Y, ceci donne

$$h^0\big(Y, p^*(-nK)-2E\big) = 3n(n+1)/2-8.$$

La formule $p_a(\Gamma)=(\Gamma.\Gamma+K_Y)/2+1$ donne le calcul du genre de Γ. □

Pour appliquer le théorème 2.9(a), on a besoin de l'inégalité

$$3n(n-1)/2+1 = d \leq 3n(n+1)/2-9$$

soit $n \geq 20/6$ et donc $n>3$. On se restreint donc maintenant à $n \geq 4$. Comme on a $d=3n(n-1)/2+1$, ceci équivaut à ignorer les cas $d=1$, $d=4$ et $d=10$.

Le théorème 2.9(a) assure l'existence sur Y d'une k-courbe Γ lisse et géométriquement connexe sur Y, de genre $g=3n(n-1)/2-2$, contenant un zéro-cycle effectif de degré $d=3n(n-1)/2+1$.

La courbe Γ contient aussi un zéro-cycle de degré $3n$, découpé par l'image réciproque d'une section plane de $X \subset \mathbf{P}^3_k$. La courbe Γ possède donc un zéro-cycle de degré 2. Elle contient donc un zéro-cycle de degré $d-2=3n(n-1)/2-1$, de degré premier à 3, et satisfaisant $d-2 \geq g$. Le théorème de Riemann-Roch sur une courbe assure qu'il existe sur Γ, et donc sur Y, et donc sur X, un zéro-cycle effectif de degré $d-2$, premier à 3, ce qui contredit l'hypothèse d minimal.

On voit donc que l'on a soit $d=1$, soit $d=4$, soit $d=10$. □

3.2. Surfaces cubiques avec un point rationnel.

Théorème 3.3. *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse possédant un point rationnel.*

(a) *Soit $Q \in X(k)$ un point rationnel. Tout zéro-cycle effectif de degré au moins 3 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif $z_1 + rQ$ avec $r \geq 0$ et z_1 effectif de degré au plus 3.*

(b) *Tout zéro-cycle de degré positif ou nul est rationnellement équivalent à une différence $z_1 - z_2$ avec z_1 effectif et z_2 efffectif de degré au plus 3.*

(c) *Tout zéro-cycle de degré zéro est rationnellement équivalent à la différence de deux cycles effectifs de degré 3.*

(d) *Tout zéro-cycle de degré au moins 3 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif ou à la différence d'un zéro-cycle effectif et d'un point fermé de degré 3.*

(e) *Le groupe de Chow des zéro-cycles sur X est engendré par les classes des points rationnels et des points fermés de degré 3.*

(f) *Tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à 10 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.*

Démonstration. On va systématiquement appliquer le théorème 2.9(b).

On peut le faire car la propriété de R-densité vaut pour les surfaces cubiques lisses sur tout corps k de caractéristique zéro (Proposition 2.1).

On pourrait aussi observer que d'après la proposition 2.11, pour le théorème à démontrer, on peut supposer le corps k fertile, ensuite invoquer le fait bien connu qu'une surface cubique lisse est géométriquement rationnelle et donc géométriquement rationnellement connexe, et enfin appliquer le théorème 2.2. Cette méthode sera utile dans l'étude des surfaces de del Pezzo de degré 2 et de degré 1.

Soit z un zéro-cycle effectif de degré $d \geq 1$. Soit n le plus petit entier tel que $d + 2 \leq 3n(n+1)/2 + 1$. On a donc

$$3n(n-1)/2 + 1 < d + 2$$

soit encore

$$3n(n-1)/2 \leq d.$$

D'après le théorème 2.9(b), quitte à remplacer z par un zéro-cycle effectif rationnellement équivalent encore noté z et Q par un point rationnel rationnellement équivalent encore noté Q, on peut supposer qu'il existe une courbe lisse géométriquement connexe Γ dans le système linéaire $|-nK|$ contenant le zéro-cycle z et le point rationnel Q.

On a $g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = 3n(n-1)/2 + 1$. Si l'on a

$$d - 1 \geq 3n(n-1)/2 + 1,$$

alors le zéro-cycle $z - Q$ est rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X, à un zéro-cycle effectif de degré $d - 1$.

La condition est satisfaite sauf si

$$3n(n-1)/2 \leq d \leq 3n(n-1)/2 + 1.$$

Considérons le cas $d = 3n(n-1)/2 + 1$. Ici $p_a(\Gamma) = d$. Dans ce cas, on fixe un autre point rationnel $R \in X(k)$, distinct de Q, non dans le support de z, et non situé sur une des droites de X, et on exige

$$d + 1 + 3 + 1 \leq 3n(n+1)/2 + 1.$$

Ceci est possible si

$$3n(n-1)/2 + 6 \leq 3n(n+1)/2 + 1$$

soit encore $n \geq 2$.

On considère l'éclatement $p : Y \to X$ en le point R, la courbe exceptionnelle $E \subset Y$, et le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ sur Y. La surface Y est une surface de del Pezzo de degré 2. Le faisceau anticanonique sur Y est donné par $p^*(-K) - E$. Il est ample, son double $p^*(-2K) - 2E$ est très ample. Le système linéaire $|p^*(-K)|$ sur Y correspond au morphisme $Y \to X$, ceci implique que pour tous entiers $a \geq 0$ et $b \geq 1$, le faisceau inversible $ap^*(-K) + b(p^*(-K) - E)$ est ample, et que le faisceau inversible $ap^*(-K) + 2b(p^*(-K) - E)$ est très ample. On peut aussi établir ces divers énoncés de très-amplitude par une application de [Rei, Thm. 1].

Sur la surface Y, le théorème de Riemann-Roch pour le faisceau

$$L = p^*(-nK) - 2E = -nK_Y + (n-2)E,$$

le théorème de dualité de Serre et le théorème d'annulation de Kodaira donnent alors, pour $n \geq 2$,

$$h^0(Y, p^*(-nK) - 2E) = 3n(n+1)/2 - 2.$$

Pour $n \geq 2$, le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ définit donc un plongement de la surface Y dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$ avec $N = 3n(n+1)/2 - 3$, espace projectif qu'elle engendre. Comme on a $d + 1 = 3n(n-1)/2 + 2 \leq 3n(n+1)/2 - 3$, le théorème 2.9(b) assure l'existence dans le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ d'une courbe $\Gamma \subset Y$ projective, lisse et géométriquement intègre, et qui contient un zéro-cycle effectif z_1 rationnellement équivalent à $p^*(z)$ sur Y et un point rationnel Q_1 rationnellement équivalent au point $p^*(Q)$. Le genre de cette courbe est $3n(n-1)/2$. Le zéro-cycle $z_1 - Q_1$ est de degré $3n(n-1)/2$. Il est donc rationnellement équivalent, sur Γ, et donc sur Y, à un zéro-cycle effectif de degré $d-1$. Le zéro-cycle $p^*(z) - p^*(Q)$ sur Y est donc rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, et il en est donc de même de son image directe $z - Q$ sur X.

Considérons le cas $d = 3n(n-1)/2$ et $p_a = d+1$. On s'intéresse au cas $d \geq 4$ et donc $n \geq 3$.

Dans ce cas on va fixer un couple de points rationnels R et S suffisamment général, et imposer un point double en chacun de ces points, ce qui impose 6 conditions linéaires pour le système linéaire $|-nK|$. Voici comment faire cela formellement.

Soit $p : Y \to X$ l'éclaté de X en R et S, et soient $E_R \subset Y$, resp. $E_S \subset Y$ les courbes exceptionnelles. La surface Y est une surface de del Pezzo de degré 1.

Sur cette surface, le faisceau inversible $-K_Y = p^*(-K) - E_R - E_S$ est ample et le faisceau inversible $-3K_Y$ est très ample [Koll, Chap. III, Prop. 3.4].

Pour $n \geq 3$, le faisceau inversible

$$p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S = -nK_Y + (n-2)E_R + (n-2)E_S$$

sur Y est très ample, comme on voit en utilisant [Rei, Thm. 1].

En utilisant le théorème de Riemann-Roch pour le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S$ sur Y, la dualité de Serre et le théorème d'annulation de Kodaira, pour $n \geq 3$ on obtient

$$h^0\big(Y, p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S\big) = 3n(n+1)/2 - 5.$$

Pour $n \geq 3$, le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S|$ définit un plongement de Y dans $\mathbf{P}^N$ avec $N = 3n(n+1)/2 - 6$, dont l'image engendre projectivement $\mathbf{P}^N$.

On a

$$d + 1 + 1 \leq 3n(n+1)/2 - 5$$

c'est-à-dire

$$3n(n-1)/2 \leq 3n(n+1)/2 - 7,$$

puisque l'on a $n \geq 3$.

D'après le théorème 2.9(b), il existe un zéro-cycle effectif z' sur Y rationnellement équivalent à $p^*(z)$ sur Y, un point rationnel $Q' \in Y(k)$ rationnellement équivalent à $p^*(Q)$ sur Y et une courbe $\Gamma \subset Y$ géométriquement intègre et lisse sur Y dans le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S|$ qui contient le support de z' et le point Q'. Le genre de cette courbe est $d-1$, et le zéro-cycle $z' - Q'$

est donc rationnellement équivalent sur Γ à un zéro-cycle effectif, il en est donc de même pour $z - Q$ sur X.

En conclusion, tout zéro-cycle z effectif de degré d au moins égal à 4 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle $z_1 + rQ$, avec z_1 effectif de degré au plus 3.

Ceci établit le point (a). On notera que le choix du point rationnel Q est arbitraire. Les points (b) et (c) sont des conséquences évidentes de (a).

Il y a une classe standard ℓ dans $CH_0(X)$ de degré 3, celle découpée par une droite définie sur k quelconque mais non située sur la surface X. Comme X possède des points rationnels, et que ces points sont denses pour la topologie de Zariski, on peut trouver une telle droite qui découpe sur X trois points rationnels distincts. Si P est un point fermé de degré 2 non situé sur une droite de la surface, alors la droite qu'elle définit découpe sur X une somme $P + p$ avec p point rationnel, et $P + p$ est dans la classe ℓ, donc équivalent à la somme de trois points rationnels alignés. Si P est situé sur une droite D de la surface, alors P est rationnellement équivalent sur D donc sur X à $2Q$ pour tout point rationnel Q de la droite. En résumé, tout point fermé P de degré 2 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle $a+b+c-d$ avec a, b, c, d points rationnels. Les résultats (d) et (e) s'obtiennent alors formellement à partir de (a).

Démontrons (f). D'après la proposition 2.11, on peut supposer k fertile. Le plus petit entier d pour lequel il existe un entier naturel n avec $3n(n-1)/2+1 \leq d-3$ et $d + 3 + 1 \leq 3n(n + 1)/2 + 1$ est $d = 13$, qui correspond à $n = 3$.

Considérons un zéro-cycle $z - P$ avec z effectif de degré $d = 13$ et P un point fermé de degré 3. Le théorème 2.9(b) montre l'existence d'un zéro-cycle effectif z' rationnellement équivalent à z, d'un zéro-cycle effectif P' de degré 3 rationnellement équivalent à P, et d'une courbe lisse géométriquement intègre $\Gamma \subset X$ dans le système linéaire $|-3K|$ de genre $g = 10$ contenant le support de z' et celui de Q'. Le théorème de Riemann-Roch sur Γ assure alors l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré 10 rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X, à $z - P$.

Soit z un zéro-cycle quelconque sur X de degré au moins 10. D'après (d), soit il est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif, soit il est rationnellement équivalent à une différence $z_1 - P$ avec P point fermé de degré 3 et z_1 zéro-cycle effectif de degré au moins 13. D'après (a), le zéro-cycle z_1 est rationnellement équivalent à $z_2 + rQ$ avec Q point rationnel, $r \geq 0$, et z_2 zéro-cycle effectif de degré 13. Ainsi z est rationnellement équivalent à $rQ + z_1 - P$ avec z_1 effectif de degré 13. Et on a vu ci-dessus que, pour un tel z_1, le zéro-cycle $z_1 - P$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. □

Remarque 3.4. Dans [CTC], pour une surface fibrée en coniques relativement minimale au-dessus de la droite $\mathbf{P}^1_k$, notant r le nombre de fibres géométriques singulières de la fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$, nous montrons que tout zéro-cycle sur X de degré au moins $\max(0, \lfloor r/2 \rfloor - 1)$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. Une autre démonstration, plus conceptuelle, fut plus tard obtenue par P. Salberger [Sa]. La démonstration de [CTC] requiert des discussions sur la décomposition possible des courbes obtenues dans un système linéaire. Il n'est pas clair si on pourrait utiliser la méthode du § 2 pour simplifier cette démonstration.

Remarque 3.5. L'analogue du théorème 3.3 est connu pour les surfaces de del Pezzo X de degré 4 avec un point rationnel. Dans ce cas on a mieux. Par éclatement d'un k-point non situé sur les droites de X, on obtient une surface cubique Y fibrée en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, avec 5 fibres géométriques dégénérées. Le théorème de [CTC] donne alors que tout zéro-cycle sur Y de degré au moins 1 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. Ceci vaut donc aussi pour une surface de del Pezzo X de degré 4 possédant un point rationnel (l'existence d'un tel point suffit pour que les point rationnels soient denses pour la topologie de Zariski sur X).

4. Surfaces de del Pezzo de degré 2

4.1. Surfaces de del Pezzo de degré 2 avec un zéro-cycle de degré 1. On suit la méthode de Coray pour les surfaces cubiques [Cor1], avec la flexibilité donnée par le théorème 2.9(a).

Théorème 4.1. *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-surface de del Pezzo de degré 2. Si X possède un zéro-cycle de degré 1, elle possède un point fermé de degré* 1, *ou* 3, *ou* 7.

Démonstration. Une telle surface X possède des points dans des extensions quadratiques du corps de base k, puisque c'est un revêtement double de $\mathbf{P}^2_k$, donné par le système linéaire associé à $-K$. Soit Q un point de degré 2 sur X. Supposons donné un point fermé de degré d impair. On peut supposer d minimal avec cette propriété. Si $d = 1$, on a un point rationnel. Supposons donc $d \geq 3$.

D'après la proposition 2.11, on peut supposer le corps k fertile. Les seuls faisceaux inversibles évidents sur X sont les faisceaux $-nK$. Ils sont amples pour $n \geq 1$, et très amples pour $n \geq 2$, par exemple par [Rei, Thm. 1]. Soit $n \geq 2$. On a

$$h^2(nK) = h^0\big((1+n)K\big) = 0,$$

car le faisceau inversible $-K$ est ample. Comme $-K$ est ample, on a

$$h^1(nK) = h^1\big((1+n)K\big) = 0$$

d'après le théorème d'annulation de Kodaira. Le théorème de Riemann-Roch sur la surface X donne alors

$$h^0(-nK) = \big(-nK.(-nK - K)\big)/2 + 1 = n^2 + n + 1.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, le faisceau inversible $-nK$ est ample et ses sections définissent un morphisme $X \to \mathbf{P}_k^{n^2+n}$ d'image de dimension au moins 2, engendrant projectivement $\mathbf{P}_k^{n^2+n}$.

Pour Γ une courbe projective et lisse dans le sytème linéaire $|-nK|$, on a

$$g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = (-nK. -nK + K)/2 + 1 = n^2 - n + 1.$$

Une telle courbe Γ contient un zéro-cycle (effectif) de degré $(-nK).(-K) = 2n$ obtenu par intersection avec l'image réciproque d'une droite de $\mathbf{P}_k^2$.

Notons $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$. Soit $n \geq 1$ l'unique entier tel que

$$g = n^2 - n + 1 \leq d < n^2 + n + 1.$$

Supposons d'abord

$$g = n^2 - n + 1 < d \leq n^2 + n - 2.$$

Comme on a $d + 2 \leq n^2 + n$, le théorème 2.9(a) garantit l'existence d'une courbe Γ projective, lisse, géométriquement connexe dans le système linéaire $|-nK|$, possédant un zéro-cycle effectif de degré d et un point de degré 2. Comme d est impair, on n'a pas $d = n^2 - n + 2$, donc on a $n^2 - n + 3 \leq d$ et $d - 2 \geq g$. Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ assure l'existence d'un zéro-cycle effectif de degré $d - 2$ sur Γ, donc sur X, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse d minimal.

On ne peut avoir $d = n^2 + n$, car d est impair. Il reste donc à considérer les cas $d = n^2 + n - 1$ et $d = n^2 - n + 1 = g$.

Considérons le cas $d = n^2 + n - 1$. Le théorème 2.9(a) établit l'existence d'une courbe Γ projective, lisse, géométriquement connexe sur k de genre $g = n^2 - n + 1$ contenant un zéro-cycle effectif de degré $d = n^2 + n - 1$. Comme on a remarqué ci-dessus, cette courbe contient aussi un zéro-cycle de degré $2n$. Comme $n^2 + n - 1$ et $2n$ sont premiers entre eux, cette courbe possède un zéro-cycle de degré 1. Par le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Γ, elle possède un zéro-cycle effectif de degré $n^2 - n + 1$. On a $n^2 - n + 1 < n^2 + n - 1$ si et seulement si $n > 1$, i.e. $d \geq 5$. Si donc d *n'est pas égal à* 3, on trouve sur Γ et donc sur X un zéro-cycle effectif de degré impair plus petit que d, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse d minimal.

Il reste à considérer le cas $g = n^2 - n + 1 = d$. On a un point fermé de degré $d \geq 3$. Comme k est fertile, on peut choisir un point k-rationnel général m dans $\mathbf{P}^2_k$ et son image réciproque M par le morphisme $X \to \mathbf{P}^2_k$. C'est un point fermé de degré 2. On considère $p : Y \to X$ l'éclaté de X en le point M, on note $E \subset Y$ le diviseur exceptionnel, et on considère sur Y le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$. Ses sections correspondent aux courbes du système linéaire $|-nK|$ sur X qui ont un point double en le point fermé M, ce qui impose 6 conditions linéaires. On a donc $h^0(Y, p^*(-nK) - 2E) \geq n^2 + n - 5$.

Lemme 4.2. *Pour $n \geq 3$, le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ est très ample, et l'on a $h^0(Y, p^*(-nK) - 2E) = n^2 + n - 5$.*

Démonstration. Soit $D \simeq \mathbf{P}^1_k$ la droite paramétrant les droites de $\mathbf{P}^2_k$ passant par m. À tout point de X non au-dessus de m on associe sa projection dans $\mathbf{P}^2_k$ puis le point de D correspondant à la droite joignant cette projection à m. L'application rationnelle de X vers D ainsi définie s'étend en un morphisme $Y \to D$ dont le système linéaire associé est donné par le faisceau inversible $p^*(-K) - E$. On sait que le faisceau inversible $-2K$ sur X est très ample, définissant un plongement $X \subset \mathbf{P}^N$. On a un plongement

$$Y \hookrightarrow (\mathbf{P}^1 \times X) \hookrightarrow (\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^N)$$

défini par $p^*(-K) - E$ pour la projection vers $\mathbf{P}^1$ et par $p^*(-2K)$ pour la projection vers $X \subset \mathbf{P}^N$. Il s'en suit que pour tout couple d'entiers $a \geq 1, b \geq 1$ le faisceau inversible $a(p^*(-K) - E) + bp^*(-2K)$ est très ample.

En particulier, pour $n = 4$, le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ est très ample sur Y, et comme $p^*(-K)$ correspond à un morphisme $Y \to X \to \mathbf{P}^2_k$, ceci implique que pour tout $n \geq 4$, le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ est très ample sur Y.

Procédant comme dans le lemme 3.2, pour $n \geq 4$, on montre

$$h^1\big(Y, p^*(-nK) - 2E\big) = 0, \quad h^1\big(Y, p^*(-nK) - 2E\big) = 0,$$

puis $h^0(Y, p^*(-nK) - 2E) = n^2 + n - 5$. □

Si l'on a $d \leq n^2 + n - 6$, c'est-à-dire $n^2 - n + 1 \leq n^2 + n - 6$, c'est-à-dire $n > 3$, c'est-à-dire si *on exclut* $d = 3$ *et* $d = 7$, le théorème 2.9(a) assure l'existence d'une courbe Γ géométriquement connexe et lisse dans le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ sur Y contenant un zéro-cycle effectif de degré $d = n^2 - n + 1$. Cette courbe satisfait $g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = n^2 - n - 1$. Elle contient un zéro-cycle de degré $2n$. Comme $d = n^2 - n + 1$ et $2n$ sont premiers entre eux, Γ contient un zéro-cycle de degré 1. Par le théorème de Riemann-Roch sur Γ, elle contient un zéro-cycle effectif de degré $n^2 - n - 1$, impair et strictement plus petit que $d = n^2 - n + 1$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse d minimal.

N'ont donc été exclus de ce processus de descente des degrés impairs que les degrés 1, 3, ou 7. □

Remarque 4.3. Comme annoncé dans [KM, Remark19], pour une surface de del Pezzo de degré 2, on ne peut exclure la possibilité d'existence d'un point de degré 3 en l'absence de point rationnel. Je détaille ici l'argument qui m'a été indiqué par J. Kollár. Sur un corps k convenable de caractéristique zéro, on peut trouver dans $\mathbf{P}^2_k$ une conique lisse $C(u,v,w) = 0$ et une quartique lisse $Q(u,v,w) = 0$ dont l'intersection consiste en la réunion d'un point fermé de corps résiduel K degré 3 sur k et d'un point fermé de corps résiduel L de degré 5 sur k. En particulier cette intersection ne contient pas de point rationnel.

Soit $F = k(t)$ le corps des fonctions rationnelles en une variable. La quartique de $\mathbf{P}^2_F$ définie par $aC(u,v,w)^2 - tQ(u,v,w) = 0$ est lisse, car elle se spécialise en $t = \infty$ en une quartique lisse. On considère la surface de del Pezzo X de degré 2 sur F définie par l'équation multihomogène

$$z^2 - aC(u,v,w)^2 + tQ(u,v,w) = 0.$$

Supposons qu'elle ait un point sur F. Par congruences modulo t, on voit que l'on devrait avoir une solution non triviale pour $C(u,v,w) = 0 = Q(u,v,w)$ dans k, ce qui n'est pas. Ainsi $X(F) = \emptyset$. Il est par contre clair que X possède un point sur l'extension cubique $K(t)/F$ et un point sur l'extension quintique $L(t)/F$, avec $C(u,v,w) = 0 = Q(u,v,w)$ et $z = 0$.

On peut aussi faire des variantes avec $F = k((t))$ le corps des séries formelles. Dans la situation parallèle des surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}^1_F$ avec 6 fibres géométriques dégénérées, des exemples analogues avec F un corps p-adique avaient été construits dans [CTC, §5].

4.2. Surfaces de del Pezzo de degré 2 avec un point rationnel.

Théorème 4.4. *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une surface de del Pezzo de degré 2 sur k possédant un point rationnel.*

(a) *Soit $Q \in X(k)$ un point rationnel. Tout zéro-cycle effectif de degré au moins 6 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif $z_1 + rQ$ avec $r \geq 0$ et z_1 effectif de degré au plus 6.*

(b) *Tout zéro-cycle de degré positif ou nul est rationnellement équivalent à une différence* $z_1 - z_2$ *avec* z_1 *effectif et* z_2 *efffectif de degré au plus 6.*

(c) *Tout zéro-cycle de degré zéro est rationnellement équivalent à la différence de deux cycles effectifs de degré 6.*

(d) *Tout zéro-cycle de degré au moins égal à 43 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.*

Démonstration. On va systématiquement appliquer le théorème 2.9(b). À la différence du cas des surfaces cubiques lisses (Théorème 3.3), en présence d'un k-point sur la surface de del Pezzo de degré 2, la k-unirationalité et la propriété de densité ne sont pas connues dans tous les cas [Man2, STVA]. En outre, pour ces surfaces, on n'a pas étudié la propriété de R-densité. On va donc utiliser ici la proposition 2.11, qui permet de supposer le corps k fertile, et le théorème 2.2.

Soit $n \geq 1$. On a $h^0(-nK) = n^2 + n + 1$, et si Γ est une courbe géométriquement connexe lisse dans le système linéaire $|-nK|$, alors $g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = n^2 - n + 1$. Pour tout $n \geq 1$, le système linéaire $|-nK|$ définit un morphisme de X dans un espace projectif d'image de dimension au moins 2. Pour $n \geq 2$, c'est un plongement.

Soit z un zéro-cycle effectif de degré $d \geq 1$. Soit n le plus petit entier tel que $d + 2 \leq n^2 + n + 1$. On a $n^2 - n \leq d$.

D'après le théorème 2.9(b), quitte à remplacer le zéro-cycle effectif z par un zéro-cycle effectif rationnellement équivalent encore noté z et Q par un point rationnel rationnellement équivalent encore noté Q, comme on a $h^0(-nK) \geq d+2$, on peut supposer qu'il existe une courbe lisse géométriquement connexe Γ dans le système linéaire $|-nK|$ contenant le zéro-cycle z et le point rationnel Q.

Si l'on a $n^2 - n + 1 \leq d - 1$, alors le zéro-cycle $z - Q$ est rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X, à un zéro-cycle effectif de degré $d - 1$.

La condition est satisfaite sauf si

$$n^2 - n \leq d \leq n^2 + n + 1.$$

Considérons le cas $d = n^2 - n + 1$. Ici $p_a(\Gamma) = d$. Dans ce cas, on fixe un autre point rationnel $R \in X(k)$, distinct de Q, non dans le support de z, et situé ni sur une des courbes exceptionnelles de X ni sur le lieu de ramification du revêtement double $X \to \mathbf{P}^2_k$ défini par le système linéaire $|-K|$. Quitte à remplacer par des cycles effectifs rationnellement équivalents, on cherche une courbe Γ géométriquement intègre dans le système linéaire $|-nK|$ contenant le point Q, le support de z, et possédant un k-point double en R, pour faire baisser le genre géométrique de 1. On veut donc

$$d + 1 + 3 + 1 \leq n^2 + n + 1,$$

avec $d = n^2 - n + 1$, soit $n > 2$ et $d > 3$.

Voici comment faire cela précisément. On considère l'éclatement $p : Y \to X$ en le point R, la courbe exceptionnelle $E \subset Y$, et le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ sur Y. La surface Y est une surface de del Pezzo de degré 1. D'après le lemme 4.2, pour tout couple d'entiers $a \geq 1, b \geq 1$ le faisceau inversible $a(p^*(-K) - E) + bp^*(-2K)$ est très ample sur Y. Ainsi pour tout $n \geq 3$, le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ est très ample sur Y. On applique ensuite le théorème 2.9(b) à Y, au plongement de Y défini par $p^*(-nK) - 2E$ au point $Q_1 = p^{-1}(Q)$ et au zéro-cycle effectif $z_1 = p^*(z)$. On trouve ainsi une courbe $\Gamma_1 \subset Y$ géométriquement connexe, lisse, et contenant un k-point Q_2 rationnellement équivalent à Q_1 sur Y et un zéro-cycle effectif z_2 rationnellement équivalent à z_1 sur Y. En utilisant le théorème de Riemann-Roch sur Y, on montre $p_a(\Gamma_1) = n^2 - n = d - 1$. Par Riemann-Roch sur la courbe Γ_1, on trouve un zéro-cycle effectif z_3 rationnellement équivalent sur Γ_1 à $z_2 - Q_2$, donc rationnellement équivalent à $z_1 - Q_1$ sur Y. Alors le zéro-cycle effectif $p_*(z_3)$ de degré $d - 1$ est rationnellement équivalent à $z - Q$ sur X.

Considérons le cas $d = n^2 - n$. On a $p_a(\Gamma) = d + 1$. Dans ce cas, choisissons un couple de k-points étrangers au support de z, à Q, aux courbes exceptionnelles de première espèce sur X et au lieu de ramification.

Quitte à remplacer Q et z par des cycles effectifs rationnellement équivalents, on cherche une courbe Γ géométriquement intègre dans le système linéaire $|-nK|$ contenant le point Q, le support de z, et sur laquelle les points R et S sont doubles, afin de faire baisser le genre géométrique de 2. Il faut pour cela

$$d + 1 + 6 + 1 \leq n^2 + n + 1,$$

avec $d = n^2 - n$. On doit donc avoir $n > 3$ et $d > 6$.

Voici comment faire cela précisément. Choisissons le couple R, S stable par l'involution associée au revêtement double $X \to \mathbf{P}^2_k$ défini par $|-K|$.

On considère l'éclatement $p : Y \to X$ en ces points R et S, les courbes exceptionnelles $E_R, E_S \subset Y$ introduites par l'éclatement, et le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S$ sur Y. D'après le lemme 4.2, pour $n \geq 3$, ce faisceau inversible est très ample sur Y.

On applique ensuite le théorème 2.9(b) à Y, au plongement de Y défini par $p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S$ au point $Q_1 = p^{-1}(Q)$ et au zéro-cycle effectif $z_1 = p^*(z)$. On trouve ainsi une courbe $\Gamma_1 \subset Y$ géométriquement connexe, lisse, et contenant un k-point Q_2 rationnellement équivalent à Q_1 sur Y et un zéro-cycle effectif z_2 rationnellement équivalent à z_1 sur Y. En utilisant le théorème de Riemann-Roch sur Y, on montre $p_a(\Gamma_1) = n^2 - n - 1 = d - 1$. Par Riemann-Roch sur la courbe Γ_1, on trouve un zéro-cycle effectif z_3 rationnellement équivalent sur Γ_1 à $z_2 - Q_2$, donc rationnellement équivalent à $z_1 - Q_1$ sur Y. Alors le zéro-cycle effectif $p_*(z_3)$ de degré $d-1$ est rationnellement équivalent à $z - Q$ sur X.

Ceci établit (a). Les énoncés (b) et (c) sont des conséquences immédiates.

Montrons (d). Soit z un zéro-cycle quelconque de degré $d \geq 0$. D'après (b), il est rationnellement équivalent à $z_1 - z_2$ avec z_1 effectif et z_2 effectif de degré 6.

Le plus petit entier d pour lequel on a $n^2 - n + 1 \leq d - 6$ et $d + 6 + 1 \leq n^2 + n + 1$ est $d = 49$, avec $n = 7$. On considère d'abord le cas où le zéro-cycle effectif z_1 est degré $d = 49$. On utilise l'hypothèse k fertile et le théorème 2.9(b). Quitte à remplacer les zéro-cycles effectifs z_1 et z_2 par des zéro-cycles effectifs rationnellement équivalents, dans le système linéaire $|-7K|$ qui vérifie $h^0(-7K) = n^2 + n + 1 = 57 > 49 + 6 + 1$ on trouve une courbe Γ géométriquement irréductible et lisse de genre $n^2 - n + 1 = 43$ qui contient les supports de z_1 et z_2. Le zéro-cycle $z_1 - z_2$ de degré 43 est rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X à un zéro-cycle effectif.

Ceci implique que tout zéro-cycle $z_1 - z_2$ sur X avec z_1 effectif de degré $d \geq 49$ et z_2 effectif de degré 6 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Ainsi tout zéro-cycle z sur X de degré au moins égal à 43 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. □

Remarque 4.5. La démonstration établit que pour $Q \in X(k)$ donné, tout zéro-cycle effectif de degré $d \geq 1$ sur X est rationnellement équivalent à $z_1 + Q$ avec z_1 zéro-cycle effectif, si $d \notin \{1, 2, 3, 6\}$.

5. Surfaces de del Pezzo de degré 1

Théorème 5.1. *Soit X/k une surface de del Pezzo de degré 1.*

(a) *Soit $Q \in X(k)$ un point rationnel. Tout zéro-cycle effectif de degré au moins 21 sur X est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif $z_1 + rQ$ avec $r \geq 0$ et z_1 effectif de degré au plus 21.*

(b) *Tout zéro-cycle de degré positif ou nul est rationnellement équivalent à une différence $z_1 - z_2$ avec z_1 effectif et z_2 effectif de degré au plus 21.*

(c) *Tout zéro-cycle de degré zéro est rationnellement équivalent à la différence de deux cycles effectifs de degré 21.*

(d) *Tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à 904 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.*

Démonstration. On va systématiquement appliquer le théorème 2.9(b). On dispose ici automatiquement d'un k-point P, le point fixe du système linéaire $|-K|$, qui satisfait $h^0(-K) = 2$. Pour tout $n \geq 2$, le système linéaire $|-nK|$ est sans point base [Koll, Chap. III, Prop. 3.4], et son image est de dimension 2. Pour tout $n \geq 3$, le faisceau inversible $-nK$ est très ample.

On ne connaît en général pas la k-unirationalité, la propriété de densité, et encore moins la propriété de R-densité. On va donc utiliser la proposition 2.11, qui permet de supposer le corps k fertile, et le théorème 2.2.

Soit $n \geq 1$. On a $h^0(-nK) = n(n+1)/2 + 1$, et si Γ est une courbe géométriquement connexe lisse dans le système linéaire $|-nK|$, alors $g(\Gamma) = p_a(\Gamma) = n(n-1)/2 + 1$.

Soit z un zéro-cycle effectif de degré $d \geq 2$. Soit n le plus petit entier tel que $d + 2 \leq n(n+1)/2 + 1$. On a $n(n-1)/2 \leq d$ et $n \geq 2$.

D'après le théorème 2.9(b), sous l'hypothèse $d + 2 \leq n(n+1)/2 + 1$ et $n \geq 3$, quitte à remplacer le zéro-cycle effectif z par un zéro-cycle effectif rationnellement équivalent encore noté z, étranger à P, et Q par un point rationnel rationnellement équivalent encore noté Q, étranger aux précédents, on peut supposer qu'il existe une courbe lisse géométriquement connexe Γ dans le système linéaire $|-nK|$ contenant le zéro-cycle z et le point rationnel Q.

Si l'on a $n(n-1)/2 + 1 \leq d - 1$, alors le zéro-cycle $z - Q$ est rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X, à un zéro-cycle effectif de degré $d - 1$.

La condition est satisfaite sauf si

$$n(n-1)/2 \leq d \leq n(n-1)/2 + 1.$$

Considérons le cas $d = n(n-1)/2 + 1$. Ici $p_a(\Gamma) = d$. Quitte à remplacer z et Q par des cycles effectifs rationnellement équivalents, on cherche une courbe Γ géométriquement intègre dans le système linéaire $|-nK|$ contenant Q, le support de z, et possédant un k-point double en un point rationnel P étranger aux précédents, pour faire baisser le genre géométrique de 1. On veut donc

$$d + 1 + 3 + 1 \leq n(n-1)/2 + 1,$$

avec $d = n(n-1)/2 + 1$, soit $n > 4$ et $d > 7$. On considère l'éclatement $p : Y \to X$ en précisément le point P point fixe du système linéaire anticanonique, la courbe exceptionnelle $E \subset Y$, et le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ sur Y.

Le système linéaire $|p^*(-K) - E|$ sur Y définit un morphisme $Y \to \mathbf{P}^1_k$ correspondant au pinceau de courbes de genre arithmétique 1 définies par $-K$ sur X, surface de del Pezzo de degré 1. Sur X, tout système linéaire $|-nK|$ avec $n \geq 2$ définit un morphisme dans un espace projectif, d'image de dimension 2. On conclut que sur Y, les sections de tout faisceau inversible de la forme $p^*(-nK) + m(p^*(-K) - E)$ avec $n \geq 2$ et $m \geq 1$ définissent un morphisme de Y dans un espace projectif d'image de dimension 2. Ainsi, pour $n \geq 3$, les sections du faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E$ définissent un morphisme de Y dans un espace projectif d'image de dimension 2.

Comme le groupe des sections de $-nK$ sur X ayant un point double en P s'injecte dans le groupe des sections de $p^*(-nK) - 2E$ sur Y, on a, sous l'hypothèse $n > 4$ ou encore $d > 7$,

$$h^0\big(Y, p^*(-nK) - 2E\big) \geq n(n-1)/2 + 1 - 3 \geq d + 2.$$

Par ailleurs le genre de toute courbe géométriquement connexe lisse dans le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E)|$ est égal à $(n^2 - n)/2 = d - 1$.

D'après le théorème 2.9(b), sous l'hypothèse $n \geq 3$, quitte à remplacer le zéro-cycle effectif $p^*(z)$ par un zéro-cycle effectif rationnellement équivalent z_1, étranger à $p^*(Q)$, et $p^*(Q)$ par un point rationnel $Q_1 \in Y(k)$ rationnellement équivalent, il existe une courbe lisse géométriquement connexe Γ dans le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ contenant le zéro-cycle z_1 et le point rationnel Q_1. Cette courbe est de genre $d-1$. On trouve donc sur elle un zéro-cycle effectif de degré $d-1$ rationnellement équivalent à $z_1 - Q_1$. L'image directe sur X donne un zéro-cycle effectif de degré $d-1$ rationnellement équivalent à $z - Q$.

Considérons le cas $d = n(n-1)/2$. Ici $p_a(\Gamma) = d + 1$. Dans ce cas, on va fixer deux autres points rationnels $R, S \in X(k)$, distincts de Q. Quitte à remplacer par des cycles effectifs rationnellement équivalents, on cherche une courbe Γ géométriquement intègre dans le système linéaire $|-nK|$ contenant les point Q, le support de z, et sur laquelle les points R et S sont doubles, pour faire baisser le genre géométrique de 2. Il faut pour cela

$$d + 1 + 6 + 1 \leq n(n+1)/2 + 1,$$

avec $d = n(n-1)/2$. On doit donc avoir $n > 6$ et $d > 15$.

On considère l'éclatement $p : Y \to X$ en les points R et S, les courbes exceptionnelles $E_R, E_S \subset Y$, et le faisceau inversible $p^*(-nK) - 2E_R - 2E_S$ sur Y.

Lemme 5.2. *Soient k un corps et X une k-variété projective. Soit $f : X \to \mathbf{P}^n$ un k-morphisme, $Z \subset \mathbf{P}^n_k$ son image schématique. Soit $Y \to X$ l'éclaté de X en un k-point lisse $m \in X(k)$, et soit $E \subset Y$ le diviseur exceptionnel. Si $f : X \to Z$ est étale dans un voisinage de m, alors le système linéaire $|f^*(O_{\mathbf{P}^n}(1)) \otimes O_Y(-E)|$ sur Y est sans point base.*

Démonstration. Pour établir cela, on peut supposer k algébriquement clos. Il suffit alors d'utiliser le fait qu'au point m le morphisme f sépare les points infiniment voisins. □

Sur la surface de del Pezzo X de degré 1, le système linéaire $|-2K|$ définit un morphisme $f : X \to \mathbf{P}^3_k$ d'image de dimension 2. Comme on a supposé $\mathrm{car}(k) = 0$, ce morphisme est génériquement étale. Soit $S \in X(k)$ un point où f est étale. Soit $g_S : X_S \to X$ l'éclatement au point S et $E_S \subset X_S$ la courbe exceptionnelle. D'après le lemme 5.2, le système linéaire $|g_S^*(-2K) - E_S|$ est sans point base et définit un morphisme surjectif $X_S \to \mathbf{P}^2_k$. Tout multiple de $g_S^*(-2K) - E_S \in \mathrm{Pic}(X_S)$ est sans point base et définit un morphisme d'image de dimension 2.

Pour le point R annoncé plus haut on va choisir le point P qui est le point base du système linéaire $|-K|$ sur X. Soit $g_P : X_P \to X$ l'éclaté de X en P et $E_P \subset X_P$ la courbe exceptionnelle.

On a vu ci-dessus que $g_P^*(-K) - E_P$ définit un morphisme $X_P \to \mathbf{P}^1$. Tout multiple de $g_P^*(-K) - E_P$ définit donc un morphisme.

Rappelons que pour $n \geq 2$, le système linéaire $|-nK|$ sur X est sans point base.

Soit Y le produit fibré X_P et X_S au-dessus de X. C'est l'éclaté $p : Y \to X$ de X en P et S. On note encore E_P et E_S les diviseurs exceptionnels dans Y. Toute combinaison linéaire à coefficients entiers (a, b, c)

$$a\big(p^*(-2K) - E_S\big) + b\big(p^*(-K) - E_P\big) + c\big(p^*(-K)\big)$$

avec $a \geq 0, b \geq 0$ et $c = 0$ ou $c \geq 2$ définit un système linéaire sans point base sur Y, d'image de dimension 2. Ainsi pour $n = 6$ et pour $n \geq 8$, le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E_S - 2E_P|$ définit un système linéaire sans point base sur Y, d'image de dimension 2.

D'après le théorème 2.9(b), sous l'hypothèse $n \geq 8$, quitte à remplacer le zéro-cycle effectif $p^*(z)$ par un zéro-cycle effectif rationnellement équivalent z_1, étranger à $p^*(Q)$, et $p^*(Q)$ par un point rationnel $Q_1 \in Y(k)$ rationnellement équivalent, il existe une courbe lisse géométriquement connexe Γ_1 dans le système linéaire $|p^*(-nK) - 2E|$ contenant le zéro-cycle z_1 et le point rationnel Q_1. Cette courbe est de genre $d - 1$. On trouve donc sur elle un zéro-cycle effectif de degré $d-1$ rationnellement équivalent à $z_1 - Q_1$. L'image directe sur X donne un zéro-cycle effectif de degré $d-1$ rationnellement équivalent à $z-Q$.

La condition $n > 7$ équivaut ici à $d = n(n-1)/2 > 21$.

Ceci établit (a). Les énoncés (b) et (c) sont des conséquences immédiates.

Montrons (d). Soit z un zéro-cycle quelconque de degré $d \geq 0$. D'après (b), il est rationnellement équivalent à $z_1 - z_2$ avec z_1 effectif et z_2 effectif de degré 21.

Le plus petit entier d pour lequel on a $n(n-1)/2 + 1 \leq d - 21$ et $d + 21 + 1 \leq n(n+1)/2 + 1$ est $d = 925$, avec $n = 43$.

On considère d'abord le cas où le zéro-cycle effectif z_1 est degré $d = 925$. On utilise l'hypothèse k fertile et le théorème 2.9(b). Quitte à remplacer les zéro-cycles effectifs z_1 et z_2 par des zéro-cycles effectifs rationnellement équivalents, dans le système linéaire $|-43K|$ qui vérifie $h^0(-43K) = n(n+1)/2 + 1 = 947$ on trouve une courbe Γ géométriquement irréductible et lisse de genre $n(n-1)/2 + 1 = 904$ qui contient les supports de z_1 et z_2. Le zéro-cycle $z_1 - z_2$ de degré 904 est rationnellement équivalent sur Γ, donc sur X à un zéro-cycle effectif.

Ceci implique que tout zéro-cycle $z_1 - z_2$ sur X avec z_1 effectif de degré $d \geq 925$ et z_2 effectif de degré 21 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.

Ainsi tout zéro-cycle z sur X de degré au moins égal à 904 est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. □

Remarque 5.3. La démonstration établit que, pour $Q \in X(k)$ donné, tout zéro-cycle effectif de degré $d \geq 1$ sur X est rationnellement équivalent à $z_1 + Q$ avec z_1 zéro-cycle effectif, si l'on a $d \notin \{1, 2, 3, 4, 6, 10, 15, 21\}$. Il est très vraisemblable que l'on pourrait éliminer le cas $d = 21$. Ce serait le cas si avec les notations de la démonstration ci-dessus on savait que le système linéaire $|p^*(-7K) - 2E_S - 2E_P|$ sur Y est sans point base.

Si l'on pouvait éliminer le cas $d = 21$, alors au point (d) on pourrait remplacer 904 par 466.

6. Surfaces géométriquement rationnelles

Soient k un corps et X une k-surface projective et lisse géométriquement rationnelle. Le théorème d'Enriques-Manin-Iskovskikh [Isk] et Mori dit qu'une telle surface k-minimale est k-isomorphe soit à une surface projective et lisse fibrée en coniques (génériquement lisses) relativement minimale au-dessus d'une conique lisse, soit à une surface (lisse) de del Pezzo. Une surface de del Pezzo X est une surface dont le faisceau anticanonique $-K$ est ample.

Pour une surface fibrée en coniques relativement minimale $X \to C$ au-dessus d'une conique lisse, les fibres générales sont des coniques lisses. Les fibres singulières X_P sont formées de deux droites conjuguées se rencontrant transversalement au-dessus d'un point fermé séparable P.

Théorème 6.1. *Soient k un corps de caractéristique zéro et X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle. Il existe un entier $N(X)$, qui ne dépend que de la géométrie de X sur une clôture algébrique de k, tel que si X possède un zéro-cycle de degré 1, alors X possède des points fermés dont les degrés sont inférieurs ou égaux à $N(X)$ et sont premiers entre eux dans leur ensemble. Notant K_X la classe canonique de X, on peut prendre*

$$N(X) = \max\bigl(10, \lfloor 4 - (K_X.K_X)/2 \rfloor\bigr).$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas d'une surface de del Pezzo. Soit $d = (K.K)$ son degré. Une telle surface possède un zéro-cycle effectif de degré d. On a $1 \leq d \leq 9$. Supposons que X possède un zéro-cycle de degré 1. Pour $d \geq 5$, c'est un résultat classique qu'alors X possède un point rationnel : pour $d = 5, 7$ il existe toujours un point rationnel [Man1, VA]. Pour $d = 8$, l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 implique que toute classe dans le groupe de Picard géométrique invariante sous l'action du groupe de Galois de k est dans l'image du groupe de Picard de X. La moitié de la classe anticanonique de X définit alors un plongement de X dans $\mathbf{P}^3_k$ dont l'image est une quadrique. On se ramène ainsi à l'énoncé pour les quadriques de $\mathbf{P}^3_k$, pour lesquelles le résultat est un cas particulier du théorème de Springer [Spr] pour les quadriques quelconques. Pour $d = 9$, X est une surface de Severi–Brauer. Le cas $d = 6$ est plus subtil. On peut l'établir en utilisant le théorème de Manin [Man2, Chap. IV, Thm. 30.3.1] que X contient un ouvert qui est un espace principal homogène sous un k-tore.

Pour $d = 4$, l'existence d'un point rationnel fut établie par Coray [Cor2]. On laisse au lecteur le soin de simplifier [Cor2] suivant la méthode de cet article. Pour $d = 4$, X est une intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$. Par des méthodes élémentaires, M. Amer (non publié) et A. Brumer [Bru] montrèrent ensuite que, pour tout entier naturel m, toute intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}^m_k$ qui possède un point dans une extension de k de degré impair possède un point rationnel.

Dans tous ces cas, on peut prendre $N(X) = 1$.

Pour $d = 3$, le théorème de Coray [Cor1] repris au paragraphe 3.1 ci-dessus donne un point dans une extension de degré 1, 4 ou 10 et dans une extension de degré 1 ou 3. On peut prendre $N(X) = 10$.

Pour $d = 2$, le théorème 4.1 donne un point dans une extension de degré 1, 3 ou 7 et dans une extension de degré 1 ou 2. On peut prendre $N(X) = 7$.

Toute surface de del Pezzo de degré 1 possède un point rationnel canonique, le point fixe du système linéaire anticanonique. Ici $N(X) = 1$.

On vérifie facilement que si $Y \to X$ est un k-morphisme birationnel de k-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes, si X satisfait la propriété ci-dessus avec $N(X)$, alors Y satisfait la propriété avec $N(Y) = N(X)$. Par ailleurs, si $Y \to X$ est un k-morphisme birationnel de surfaces projectives et lisses, qui géométriquement est obtenu par éclatements successifs de s points, alors $(K_Y.K_Y) = (K_X.K_X) - s$. Si donc on peut prendre pour $N(X)$ la fonction de K_X indiquée à la fin du théorème, alors on peut prendre pour $N(Y)$ cette fonction de K_Y.

Soit donc désormais X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, k-minimale, possédant un zéro-cycle de degré 1. On a déjà établi l'énoncé avec $N(X) = 10$ pour les surfaces de del Pezzo. Considérons maintenant le cas d'une surface X fibrée en coniques relativement minimale au-dessus d'une conique C lisse. Comme X, la courbe C possède un zéro-cycle de degré 1, et donc $C \simeq \mathbf{P}^1_k$. La surface X possède donc un point fermé de degré 1 ou 2. Si on note r le nombre de fibres géométriques singulières de la fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$, on a $r = 8 - (K.K)$. D'après [CTC, Thm. B], si X possède un point fermé de degré impair, alors X possède un point fermé de degré impair au plus égal à $\max(1, \lfloor r/2 \rfloor)$, valeur que l'on prend pour $N(X)$. □

Théorème 6.2. *Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement rationnelle, sur un corps k de caractéristique zéro. Supposons que X possède un point k-rationnel. Soit K_X la classe canonique de X. Il existe un entier $M(X)$, qui ne dépend que de la géométrie de X sur une clôture algébrique de k, tel que tout zéro-cycle de degré au moins $M(X)$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. En particulier, le groupe de Chow des zéro-cycles est engendré par les points fermés de degré au plus $M(X)$. Notant K_X la classe canonique de X, on peut prendre*

$$M(X) = \max\big(904, \lfloor 3 - (K_X.K_X)/2 \rfloor\big).$$

Démonstration. On vérifie que si $X \to Y$ est un k-morphisme birationnel de k-surfaces projectives et lisses géométriquement connexes, et s'il existe un tel entier $M(Y)$ avec la propriété ci-dessus pour Y, alors on a la même propriété pour X avec $M(X) = M(Y)$. Par ailleurs la fonction de $(K_X.K_X)$ indiquée dans le théorème est non décroissante par éclatement. On peut donc supposer la surface X k-minimale.

Pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, relativement minimales avec r fibres géométriques singulières, d'après [CTC, Thm. B] on peut prendre $M(X) = \max(0, \lfloor r/2 \rfloor - 1)$.

On sait que toute k-surface de del Pezzo de degré au moins égal à 5 avec un point rationnel est k-birationnelle à un espace projectif [Man1, VA]. Dans ce cas, on peut donc prendre $M(X) = 0$. Pour les surfaces de del Pezzo dont le degré est 4, on peut prendre $M(X) = 1$: par éclatement d'un k-point non situé sur les 16 droites, on se ramène à un fibré en coniques avec $r \leq 5$ fibres géométriques singulières, et on peut appliquer le résultat général ci-dessus. Pour les surfaces de del Pezzo de degré 3, le théorème 3.3 donne $M(X) = 10$. Pour les surfaces de del Pezzo de degré 2, le théorème 4.4 donne $M(X) = 43$. Pour les surfaces de del Pezzo de degré 1, le théorème 5.1 donne $M(X) = 904$. □

Remarque 6.3. Il resterait à éliminer l'hypothèse d'existence d'un point rationnel dans le théorème 6.2, ce qui impliquerait le théorème 6.1 avec l'estimation sans doute trop grossière $N(X) = M(X) + 1$.

7. Surfaces cubiques sans point rationnel

Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse. Comme rappelé plus haut, si la surface cubique lisse X possède un point rationnel, alors elle est k-unirationnelle et l'ensemble $X(k)$ de ses points k-rationnels est dense dans X pour la topologie de Zariski. Il est donc facile de trouver 3 points rationnels sur X qui ne sont pas alignés dans $\mathbf{P}^3_k$. Le théorème suivant est une réponse partielle à la question posée à la fin de l'introduction du récent article [Ma].

Théorème 7.1. *Soit $X \subset \mathbf{P}^3_k$ une surface cubique lisse sur un corps k de caractéristique nulle, sans point rationnel. Si tout point fermé de degré 3 sur X est découpé par une droite de $\mathbf{P}^3_k$, alors à toute droite générale de $\mathbf{P}^3_k$ on peut associer une surface de del Pezzo de degré 1 sur k dont les points k-rationnels ne sont pas denses pour la topologie de Zariski, et donc qui en particulier n'est pas k-unirationnelle.*

Un point de degré 3 découpé par une droite sera dit “aligné”.

Démonstration. Comme $X(k) = \emptyset$, on n'a pas non plus de point quadratique sur X. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. On note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Soit $D \subset \mathbf{P}^3_k$ une droite qui ne rencontre aucune des 27 droites de $\overline{X}$.

Le pinceau $L \simeq \mathbf{P}^1_k$ des plans de $\mathbf{P}^3_{\overline{k}}$ contenant D découpe donc sur $\overline{X}$ soit une cubique lisse, soit une cubique avec une unique singularité.

Soit $Q = X \cap D$. C'est un point fermé de degré 3, qui sur $\overline{k}$ correspond à 3 points dont aucun n'est situé sur une droite de $\overline{X}$. Soit $q = Y \to X$ l'éclaté de X en P. Soit $R \subset Y$ le diviseur exceptionnel. Sur $\overline{k}$, ceci donne naissance à trois courbes R_i, chacune isomorphe à une droite projective sur $\overline{k}$. La famille des plans passant par L définit un morphisme $p : Y \to L$ dont les fibres sont précisément les cubiques mentionnées ci-dessus. En particulier la fibration $Y \times_k \overline{k} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ est relativement minimale.

Sur $\overline{k}$, le morphisme p admet une section, car le diviseur exceptionnel $q^{-1}(P)$ se découpe en trois courbes isomorphes à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ que p applique isomorphiquement sur $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$.

Chaque fibre $Y_m = p^{-1}(m)$ au-dessus d'un k-point $m \in L(k)$ contient le point fermé Q. Supposons Y_m lisse. Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe Y_m, qui est de genre 1, montre qu'un point fermé $Q \in Y_m$ qui est de degré 3 est aligné sur $Y_m \subset X$ si et seulement si le diviseur $Q - P$, qui est de degré zéro, a une classe nulle dans $\mathrm{Pic}(Y_m)$.

Si donc il existe une classe de degré 3 dans $\mathrm{Pic}(Y_m)$ qui est distincte de la classe de Q, alors il existe sur Y_m, et donc sur X, un point fermé de degré 3 non aligné.

Soit $F = k(L)$, resp. $E = \overline{k}(L)$ le corps des fonctions rationnelles sur L, resp. sur $L_{\overline{k}}$. Soit Y_η/F la fibre générique de p. Soit W_η/F la jacobienne de la courbe Y_η. C'est une courbe elliptique sur F. Soit $W \to \mathbf{P}^1_k$ le modèle propre régulier minimal de W_η/F (existence : [Sha, Chap. 7]; unicité : [Sha, Chap. 8]).

Je dis qu'alors $W_{\overline{k}} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ est le modèle propre régulier minimal de la E-courbe elliptique $W_\eta \times_F E$. La minimalité est le point non évident. Faute d'avoir trouvé une référence dans la littérature, je donne une démonstration. Supposons que $W_{\overline{k}}$ contienne une courbe exceptionnelle de première espèce D_1, donc lisse de genre zéro et satisfaisant $(D_1.D_1) = -1$, contenue dans une fibre. Supposons que cette courbe admet une conjuguée D_2 sous Galois qui la rencontre, et donc est contenue dans la même fibre géométrique. Alors

$$(D_1 + D_2)^2 = (D_1)^2 + (D_2)^2 + 2(D_1.D_2) = -2 + 2(D_1.D_2) \geq 0,$$

donc, vu les propriétés de la forme d'intersection sur une fibre, qui est semi-définie négative [Sha, Chap. 6, p. 91], on a $(D_1 + D_2)^2 = 0$, et $D_1 + D_2$ est un multiple rationnel de la fibre contenant D_1 et D_2. Cette fibre contient une composante de multiplicité 1, comme on voit par intersection avec la section nulle de $W_{\overline{k}} \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$. Ainsi la fibre est $D_1 + D_2$, et l'on a $(D_1.D_2) = 1$. Mais ceci n'est pas possible, car le genre géométrique des fibres serait zéro. On voit donc que les divers conjugués de D_1 sont dans des fibres distinctes. Mais alors leur somme définit un diviseur sur la k-variété W que le critère de Castelnuovo [Sha, Chap. 6, p. 102] permet de contracter, contredisant le fait que $W \to \mathbf{P}^1_k$ est minimal.

Comme $Y_\eta \times_F E$ possède les points E-rationnels correspondant aux courbes R_i, le choix d'une de ces courbes R_i définit un E-isomorphisme de courbes: $W_\eta \times_F E \simeq Y_\eta \times_F E$. Vu l'unicité des modèles réguliers propres minimaux pour les courbes lisses de genre au moins 1 [Sha, Chap. 8], on voit qu'il existe un $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$-isomorphisme $W \times_k \overline{k} \to Y \times_k \overline{k}$ induisant l'isomorphisme donné sur les fibres génériques.

Ainsi la $\overline{k}$-variété $W \times_k \overline{k}$ est isomorphe à l'éclaté d'une surface cubique lisse en 3 $\overline{k}$-points alignés. Ceci montre déjà que W est une k-surface projective et lisse géométriquement rationnelle dont le faisceau canonique K satisfait $(K.K) = 0$.

La section nulle M de $W \to L$ correspond sur $\overline{k}$ à l'éclatement d'un $\overline{k}$-point de $\overline{X}$ non situé sur une droite de $\overline{X}$, elle satisfait $(M.M) = -1$. On peut donc la contracter. On obtient une surface W' qui est l'éclatée de la surface $\overline{X}$ en deux $\overline{k}$-points non situés sur les 27 droites, et dont le faisceau canonique satisfait $(K.K) = 1$. Pourvu que l'on ait pris la droite D initiale dans un ouvert de Zariski non vide convenable de la grassmannienne des droites de $\mathbf{P}^3_k$, la surface W' est géométriquement l'éclatée de la surface cubique en un couple général de points de $\overline{X}$, et donc est une surface de del Pezzo de degré 1.

Soit $m \in L(k)$ un point à fibre Y_m lisse. La jacobienne de Y_m est la fibre W_m de $W \to L$ en m.

On a la suite exacte bien connue faisant intervenir groupes de Picard et groupes de Brauer:

$$0 \to \mathrm{Pic}(Y_m) \to \mathrm{Pic}(\overline{Y}_m)^G \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(Y_m).$$

Comme Y_m possède un point dans une extension de degré 3 de k, cette suite induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(Y_m) \to \mathrm{Pic}(\overline{Y}_m)^G \to \mathrm{Br}(k)[3]$$

où $A[n]$ désigne le sous-groupe de n-torsion d'un groupe abélien A. Sur les classes de degré zéro, cette suite exacte induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(Y_m) \to \mathrm{Pic}^0(\overline{Y}_m)^G \to \mathrm{Br}(k)[3].$$

Le groupe $\mathrm{Pic}^0(\overline{Y}_m)^G$ est le groupe $W_m(k)$ des k-points de la k-courbe elliptique W_m. Si la flèche induite $W_m(k) \to \mathrm{Br}(k)[3]$ a un noyau non trivial, alors on a $\mathrm{Pic}^0(Y_m) \neq 0$. Si z est un élément non nul dans $\mathrm{Pic}^0(Y_m)$, alors la classe $Q + z$ est une classe de degré 3, rationnellement équivalente à un zéro-cycle effectif de degré 3 par le théorème de Riemann-Roch sur Y_m, définissant un point fermé de degré 3 non rationnellement équivalent à Q sur Y_m, et donc non aligné.

La flèche $W_m(k) \to \mathrm{Br}(k)[3]$ a un noyau non trivial si $W_m(k) \neq W_m(k)[3]$.

Si pour aucun $m \in L(k)$ à fibre lisse cette condition n'est satisfaite, les k-points de W sont contenus dans la réunion des fibres singulières de $W \to \mathbf{P}^1_k$ et du fermé de W qui sur l'ouvert de lissité correspond au schéma défini par la 3-torsion. En particulier, les k-points ne sont pas denses pour la topologie de Zariski sur W, qui est une surface de del Pezzo de degré 1. □

Remarque 7.2. Si le corps k est fertile, par exemple si k est un corps p-adique, alors pour toute surface de del Pezzo de degré 1, l'ensemble $W(k)$, qui est non vide, est dense pour la topologie de Zariski. Dans ce cas on a donc des points fermés de degré 3 non alignés sur toute k-surface cubique lisse.

Ceci est en fait facile à voir directement. Soit $U \subset \mathrm{Gr}(1, \mathbf{P}^3_k)$ l'ouvert formé des droites qui rencontrent X géométriquement en trois point distincts. Soit $V \subset \mathrm{Sym}^3 X$ l'ouvert lisse, intègre, correspondant aux ensembles de 3 points géométriques distincts. On a un k-plongement fermé de U, de dimension 4, dans V, de dimension 6, identifiant $U(\overline{k})$ avec les triplets de points géométriques distincts alignés. L'image de $U(k)$ dans $V(k)$ définit des k-points, lisses, de U. Ainsi $V(k)$ est non vide, et donc, si k est fertile, les points de $V(k)$ sont denses pour la topologie de Zariski sur V, et il en existe hors de U.

Remarque 7.3. C'est une question ouverte si pour toute surface de del Pezzo de degré 1 sur un corps k de caractéristique zéro, les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. On consultera [SvL] pour des résultats partiels. Plus généralement, c'est aussi une question ouverte si, pour une famille lisse non géométriquement isotriviale $W \to \mathbf{P}^1_k$ de fibre générique une courbe elliptique, les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. Ces problèmes sont ouverts déjà pour k le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels.

Remarque 7.4. Soit $k = \mathbb{Q}$. Soient p, q deux nombres premiers distincts, et distincts de 3. Soit $C \subset \mathbf{P}^2_{\mathbb{Q}}$ la cubique lisse sur $\mathbb{Q}$ définie par l'équation

$$x^3 + pqy^3 + q^2z^3 = 0.$$

On a $C(\mathbb{Q}_q) = \emptyset$, donc $C(\mathbb{Q}) = \emptyset$. La courbe jacobienne J de C est donnée par

$$x^3 + y^3 + pz^3 = 0.$$

Si p est congru à 5 modulo 9, on sait [Mor, Chap. 15, Thm. 3] que l'on a $J(\mathbb{Q}) = 0$. Comme on a $\mathrm{Pic}^0(C) \subset J(\mathbb{Q})$, ceci implique $\mathrm{Pic}^0(C) = 0$. En utilisant le théorème de Riemann-Roch sur la courbe C, on en déduit que tout point fermé de degré 3 sur C est aligné. Ceci répond à une question de C. Shramov.

La démonstration du théorème suivant est entièrement parallèle à celle du théorème 7.1 et est laissée au lecteur.

Théorème 7.5. *Soit X une surface del Pezzo de degré 2 sur un corps k de caractéristique nulle, sans point rationnel. Si tout point fermé de degré 2 sur X est image réciproque d'un point rationnel de $\mathbf{P}^2_k$ via le morphisme anticanonique $X \to \mathbf{P}^2_k$, alors il existe une surface de del Pezzo de degré 1 sur k dont les points k-rationnels ne sont pas denses pour la topologie de Zariski, et donc qui en particulier n'est pas k-unirationnelle.*

Références

[AK] A. Altman et S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck Duality Theory*. LNM 146, Springer Verlag (1970). Zbl 0215.37201 MR 0274461

[BS] S. Bloch and V. Srinivas, Correspondences and algebraic cycles. *American Journal of Mathematics* **105** (1983), 1235–1253. Zbl 0525.14003 MR 0714776

[Bru] A. Brumer, Remarques sur les couples de formes quadratiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **286** (1978), A679–A681. Zbl 0392.10021 MR 0498374

[CTC] J.-L. Colliot-Thélène et D. F. Coray, L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques. *Compositio Math.* **39** (1979), 301–332. Zbl 0386.14003 MR 0550646

[CTCS] J.-L. Colliot-Thélène, D. F. Coray et J.-J. Sansuc, Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles. *J. reine angew. Math.* **320** (1980), 150–191. Zbl 0434.14019 MR 0592151

[Cor1] D. F. Coray, Algebraic points on cubic hypersurfaces. *Acta Arith.* **30** (1976), 267–296. Zbl 0294.14012 MR 0429731

[Cor2] —— Points algébriques sur les surfaces de del Pezzo. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **284** (1977), A1531–A1534. Zbl 0357.14013 MR 0441980

[Cor3] —— *Notes on Geometry and Arithmetic* (traduction de Notes de géométrie et d'arithmétique, Genève 2015). Springer Universitext (2020). Zbl 07188890

[Ful] W. Fulton, *Intersection Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag (1984). Zbl 0541.14005 MR 1644323

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. GTM 52, Springer Verlag (1977). Zbl 0367.14001 MR 0463157

[Isk] V. A. Iskovskikh, Modèles minimaux des surfaces rationnelles sur les corps arbitraires (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), 19–43, 237.

[Jou] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*. Progress in Mathematics vol. 42, Birkhäuser (1983). Zbl 0519.14002 MR 0725671

[Kol1] J. Kollár, *Rational Curves on Algebraic Varieties*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 32, Springer (1986). Zbl 0877.14012 MR 1440180

[Kol2] —— Rationally connected varieties over local fields. *Annals of Math.* **150** (1999) 357–367. Zbl 0976.14016 MR 1715330

[Kol3] —— Unirationality of cubic hypersurfaces. *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), 467–476. Zbl 1077.14556 MR 1956057

[KM] J. Kollár et M. Mella, Quadratic families of elliptic curves and unirationality of degree 1 conic bundles. *Amer. J. Math.* **139** (2017), 915–936. Zbl 1388.14096 MR 3689320

[Ma] Q. Ma, Closed points on cubic hypersurfaces. *Michigan Math. J. Advanced Publication* (2021), 1–12.

[Man1] Yu. I. Manin, Surfaces rationnelles sur les corps parfaits (en russe). *Publications Mathématiques de l'IHÉS* **30** (1966), 55–97.

[Man2] —— *Cubic Forms, Algebra, Geometry, Arithmetic.* North-Holland, Second Edition, 1986. Zbl 0582.14010 MR 0833513

[Mor] L. J. Mordell, *Diophantine Equations*. Pure and applied Mathematics, vol. 30, Academic Press, 1969. Zbl 0188.34503 MR 0249355

[Mum] D. Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*. Annals of Mathematics Studies, vol. 59, Princeton University Press, 1966. Zbl 0187.42701 MR 0209285

[Poo] B. Poonen, *Rational Points on Varieties*. Graduate Studies in Mathematics 186. Amer. Math. Soc., 2017. Zbl 1387.14004 MR 3729254

[Pop] F. Pop, Little survey on large fields – old & new. *Valuation Theory in Interaction*, 432–463, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2014. Zbl 1341.12004 MR 3329044

[Rei] I. Reider, Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces. *Ann. of Math.* (2) **127** (1988), 309–316. Zbl 0663.14010 MR 0932299

[Ryd] D. Rydh, Hilbert and Chow schemes of points, symmetric products and divided powers. In thesis : Families of cycles and the Chow scheme, Stockholm : KTH, 2008.

[Sa] P. Salberger, Class groups of orders and Chow groups of their Severi–Brauer schemes. CTH-Math-1985-15 ; in Thèse, Univ. Chalmers, Göteborg, 1985.

[Ser] J-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*. Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Nancago. Actualités scientifiques et industrielles 1264, Hermann, Paris 1959. Zbl 0097.35604 MR 0907288

[Sha] I. R. Shafarevich, Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes. Tate Institute of Fundamental Research, Bombay, 1966. Zbl 0164.51704 MR 0217068

[STVA] C. Salgado, D. Testa and A. Várilly-Alvarado. On the unirationality of del Pezzo surfaces of degree 2. *J. London Math. Soc.* (2) **90** (2014), 121–139. Zbl 1319.14016 MR 3245139

[SvL] C. Salgado et R. van Luijk, Density of rational points on del Pezzo surfaces of degree one. *Avd. in Math.* **261** (2014), 154–199. Zbl 1296.14018 MR 3213298

[Spr] T. A. Springer, Sur les formes quadratiques d'indice zéro. *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952), 1517–1519. Zbl 0046.24303 MR 0047021

[VA] A. Várilly-Alvarado, Arithmetic of del Pezzo surfaces. *Birational Geometry, Rational Curves, and Arithmetic* (F. Bogomolov, B. Hassett and Y. Tschinkel eds.) Simons Symposia 1 (2013), 293–319. Zbl 1306.14016 MR 3114932

(*Reçu le 1 juillet 2020; version révisée reçue le 27 septembre 2020*)

Jean-Louis Colliot-Thélène, Université Paris-Saclay, CNRS,
Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France

e-mail: jlct@math.u-psud.fr