Une version effective du théorème de Lindemann-Weierstrass par des méthodes d'indépendance algébrique

Autor(en): **Rov, Damien**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **59 (2013)**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515837

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 59 (2013), 287–306

UNE VERSION EFFECTIVE DU THÉORÈME DE LINDEMANN-WEIERSTRASS PAR DES MÉTHODES D'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE

par Damien ROY *)

RÉSUMÉ. On présente une nouvelle démonstration complètement effective du théorème de Lindemann-Weierstrass basée sur des méthodes d'indépendance algébrique. Quoique sensiblement moins bonne que la meilleure estimation connue à ce jour, due à A. Sert, elle améliore toutefois la meilleure estimation, due à M. Ably, obtenue par ce type de méthode. La nouveauté de l'argument réside dans la simplicité de la construction des fonctions auxiliaires. On exploite ce trait pour introduire le non-spécialiste aux méthodes d'indépendance algébrique.

ABSTRACT. We present a new completely effective proof of the Lindemann-Weierstrass theorem based on algebraic independence methods. Although it is slightly weaker than the best known estimate due to A. Sert, it improves the best estimate due to M. Ably obtained by such methods. The novelty of the proof lies in the simplicity of the construction of auxiliary functions, a fact that we exploit to introduce the non-specialist to methods of algebraic independence.

1. INTRODUCTION

Le théorème de Lindemann-Weierstrass est un des résultats les plus satisfaisants de la théorie des nombres transcendants. Il peut se formuler de manières équivalentes soit comme un énoncé d'indépendance linéaire:

> "Si $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbf{C}$ sont des nombres algébriques distincts, alors $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_N}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$."

ou bien comme un énoncé d'indépendance algébrique:

> "Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbf{C}$ sont des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$."

*) Recherche partiellement supportée par le CRSNG

La preuve originale [27], établie par K. Weierstrass en 1885, repose sur la première formulation grâce à une extension de la méthode de C. Hermite [10]. Elle emploie des systèmes d'approximants de Padé simultanés pour les fonctions $e^{\beta_1 x}, \dots, e^{\beta_N x}$. Des variations de la preuve, utilisant la même méthode tout en y apportant différentes simplifications ou des éclairages nouveaux, ont été proposées par plusieurs auteurs dont D. Hilbert et K. Mahler. L'appendice de [16] en fournit un compte-rendu exhaustif. On pourra consulter les chapitres 1 de [3] ou de [18] pour une démonstration très succincte du théorème ou encore [25] pour une présentation motivée de la méthode d'Hermite.

En 1929, C. L. Siegel a initié une vaste généralisation de ces recherches en introduisant sa théorie des E-fonctions, complétée par A. B. Shidlovskiĭ dans une série de travaux à partir de 1954. Cette théorie et certains des résultats auxquels elle conduit sont exposés dans [16, ch. 4–7], [18, ch. 2] et [3, ch. 11]. Néanmoins, il s'agit encore, à la base, de méthodes d'indépendance linéaire.

La première démonstration du théorème de Lindemann-Weierstrass basée sur la seconde formulation, utilisant donc des méthodes d'indépendance algébrique, a été présentée en 1980 par G. V. Chudnovsky dans [8] pour au plus trois nombres (i.e. pour $t \leq 3$). Par une adaptation de cette méthode il obtient aussi un analogue de ce théorème pour la fonction $\wp$ de Weierstrass associée à une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ avec multiplication complexe, mais avec la même limitation, levée par la suite par P. Philippon [19] et G. Wüstholz [28].

Le but de ce travail est de donner une nouvelle démonstration simple du théorème de Lindemann-Weierstrass, à l'aide de méthodes d'indépendance algébrique, sous une forme quantitative améliorant celle obtenue par M. Ably en 1994 par des méthodes semblables [1]. Notre résultat principal, ci-dessous, est toutefois moins précis que la meilleure estimation pleinement explicite, due à A. Sert [24].

THÉORÈME 1.1. *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbf{C}$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Soit c un majorant des valeurs absolues de tous leurs conjugués, soit $q \in \mathbf{N}$ un entier positif tel que $q\alpha_1, \dots, q\alpha_t$ soient des entiers algébriques, et soit d le degré de $\mathbf{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ sur $\mathbf{Q}$. Pour toute paire d'entiers positifs D et H et tout polynôme non nul $P \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_t]$ de degré au plus D à coefficients entiers en valeur absolue au plus H, on a*

$$|P(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_t})| \geq H^{-3dS^t} \exp\left(-(cqS)^{18S^t}\right),$$

où $S = 6dt(t!)D$.

La borne inférieure donnée par le théorème est une *mesure d'indépendance algébrique*. Elle implique l'indépendance algébrique de $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t}$ sur $\mathbf{Q}$. Le premier résultat de ce type revient à Mahler [15] en 1931. En s'appuyant sur la méthode d'Hermite, il démontre, avec les notations ci-dessus, l'existence de quantités $c_1 = c_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ et $H_0 = H_0(D, \alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, non explicitées, telles que $|P(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t})| \geq H^{-c_1 D^t}$ si $H \geq H_0$. En 1977, Yu. V. Nesterenko démontre une version quantitative du théorème de Siegel-Shidlovskiĭ. Dans la situation présente, son résultat [17, thm. 4] fournit $c_1 = (4d)^t(td^2 + d + 1)$ et montre qu'on peut prendre $H_0 = \exp(\exp(c_2 D^{2t} \log(D+1)))$ pour une constante $c_2 = c_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ non explicitée. Le résultat d'Ably mentionné plus tôt fait moins bien au niveau de la constante c_1 mais améliore la dépendance de H_0 en fonction du majorant D du degré de P. Sans entrer dans les détails, disons simplement que, dans les notations du théorème ci-dessus, la minoration qu'il obtient revient à prendre S de l'ordre de $d^t 2^{4t^2} D$. Quant à la mesure obtenue par Sert, elle revient plutôt à prendre S de l'ordre de dtD. Pour y parvenir, ce dernier utilise la remarquable méthode des déterminants d'interpolation de M. Laurent. Il obtient d'abord une version quantitative de la première forme du théorème de Lindemann-Weierstrass, donc une mesure d'indépendance linéaire, puis, par spécialisation, il en déduit une mesure d'indépendance algébrique. Dans ce contexte, mentionnons qu'à la suite du travail de Sert, D. Bertrand a utilisé à son tour la méthode des déterminants d'interpolation pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Siegel-Shidlovskiĭ [4] qui, pour reprendre les mots de son auteur, jette un pont entre les démonstrations originales de ce théorème et celle plus récente obtenue par Y. André [2] généralisant l'approche déployée par J.-P. Bézivin et P. Robba dans leur preuve adélique du théorème de Lindemann-Weierstrass (version linéaire) [5]. Quoique les démonstrations de [2] et de [5] ne semblent pas conduire aisément à des énoncés quantitatifs, il est probable que la preuve du théorème de Lindemann-Weierstrass que donne D. Bertrand dans [4, § 5] puisse quant à elle mener à une nouvelle mesure d'indépendance algébrique des exponentielles de nombres algébriques.

Sur un plan plus spéculatif, on note que le théorème de Lindemann-Weierstrass fournit une démontration indirecte des conjectures de [23] pour les familles de nombres de la forme $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t})$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ algébriques sur $\mathbf{Q}$. Cependant, il est possible qu'une démonstration directe puisse conduire à d'autres mesures d'indépendance algébrique comme on en connaît dans le cas d'un seul nombre. Par exemple, P. L. Cisjouw [9] a obtenu en 1974 la mesure $|P(e^{\alpha_1})| \geq \exp(-c_3 D^2(D + \log H))$ avec $c_3 = c_3(\alpha_1)$ qui, pour les petites valeurs de H, est plus précise que les mesures décrites ci-dessus.

Au niveau des outils, la preuve du théorème 1.1 utilise seulement la notion de *hauteur de Weil* d'un point algébrique et quelques propriétés fondamentales du résultant de polynômes en plusieurs variables rappelées aux paragraphes 3 et 4. Dans ses grandes lignes, le schéma de démonstration est classique. Le but est de prendre le résultant de l'homogénéisé ${}^hP$ de P avec des polynômes homogènes $Q_1, \ldots, Q_t$ à coefficients dans $K = \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, construits de telle sorte que leurs valeurs absolues au point $\mathbf{u} = (1, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t})$ soient petites et que ${}^hP, Q_1, \ldots, Q_t$ n'aient pas de zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$. Alors le résultant de ces polynômes n'est pas nul et, sous des conditions appropriées, cela conduit à une minoration pour la valeur absolue de ${}^hP(\mathbf{u}) = P(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t})$. Pour atteindre ce but, notre premier pas réside en la construction d'une fonction analytique particulièrement simple, décrite au paragraphe suivant. Ses valeurs fournissent une famille $\mathcal{F}$ de polynômes homogènes de degré S, à coefficients dans K, dont on montre au paragraphe 5 qu'ils n'ont pas de zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$. On en tire $Q_1, \ldots, Q_t$, et on conclut, au paragraphe 6, avec la preuve d'une version légèrement plus générale du théorème 1.1.

2. Fonction auxiliaire

On utilise le résultat d'interpolation suivant qui remonte à Lagrange. Pour tout sous-ensemble fini E de $\mathbf{C}$ de cardinalité $N \geq 1$, tout entier $T \geq 1$, et toute famille de nombres complexes $u_{\alpha,j}$ indexée par les couples (α, j) avec $\alpha \in E$ et $j \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, il existe un et un seul polynôme $p(x)$ de $\mathbf{C}[x]$ de degré $< NT$ tel que

$$p^{(j)}(\alpha) = u_{\alpha,j} \qquad (\alpha \in E,\ 0 \leq j < T),$$

où $p^{(j)}$ désigne la j-ième dérivée de p. En particulier, si f est une fonction holomorphe définie sur un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant E, on peut choisir p de telle sorte que

$$p^{(j)}(\alpha) = f^{(j)}(\alpha) \qquad (\alpha \in E,\ 0 \leq j < T).$$

Alors la différence $f(x) - p(x)$ s'annule avec multiplicité au moins T en chaque point de E.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, c et q comme dans l'énoncé du théorème 1.1. Pour notre objet, nous employons un ensemble E qui dépend d'un paramètre entier $S \geq 1$, et qui est contenu dans le sous-groupe de $\mathbf{C}$ engendré par les coordonnées du point $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$. En posant, pour chaque $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_t) \in \mathbf{Z}^t$,

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha} = m_1\alpha_1 + \cdots + m_t\alpha_t \quad \text{et} \quad |\mathbf{m}| = |m_1| + \cdots + |m_t|,$$

l'ensemble en question est

$$E = \{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}\,;\, \mathbf{m} \in \Sigma(S)\} \quad \text{où} \quad \Sigma(S) = \{\mathbf{m} \in \mathbf{N}^t\,;\, |\mathbf{m}| < S\}\,. \tag{2.1}$$

Nous nous proposons d'étudier la fonction

$$g(x) = e^x - p(x)$$

où $p(x)$ est le polynôme d'interpolation construit comme ci-dessus pour le choix de $f(x) = e^x$. Cette fonction auxiliaire dépend donc de deux paramètres entiers $S, T \geq 1$. On verra que, pour des choix appropriés de ceux-ci, les dérivées de $g(x)$ aux points $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ avec $\mathbf{m} \in \Sigma(S+1)$ sont si petites que cela interdit toute relation de dépendance algébrique entre $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t}$. Cela conduira à la mesure d'indépendance algébrique présentée dans l'introduction.

Pour établir qu'une telle fonction est petite en de pareils points, on pense d'abord à employer un lemme de Schwarz. Or, cela ne fonctionne pas ici, puisque la majoration que l'on possède pour le degré du polynôme $p(x)$ est essentiellement égale au nombre de zéros $T|\Sigma(S)|$ que $g(x)$ acquiert, compte tenu des multiplicités. Nous allons donc procéder autrement.

Pour $S, T \geq 1$ fixés, on pose $N = |\Sigma(S)|$. Alors E contient N points en vertu de l'hypothèse d'indépendance linéaire de $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$. Pour chaque $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^t$ avec $|\mathbf{m}| < S$ et chaque $j \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$, on désigne par $A_{\mathbf{m},j}(x)$ le polynôme de $\mathbf{C}[x]$ de degré $< NT$ qui satisfait

$$A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{n} = \mathbf{m} \text{ et } \ell = j\,, \\ 0 & \text{sinon}\,, \end{cases} \tag{2.2}$$

pour tout $\mathbf{n} \in \Sigma(S)$ et tout $\ell \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. On note aussi $\mathbf{C}\{x\}$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ qu'on identifie au sous-anneau de $\mathbf{C}[[x]]$ des séries convergentes sur tout $\mathbf{C}$. La fonction exponentielle e^x est un élément de cet anneau et la fonction auxiliaire $g(x)$ introduite ci-dessus est son image sous l'application linéaire $\varphi\colon \mathbf{C}\{x\} \to \mathbf{C}\{x\}$ donnée par

$$\varphi(f(x)) = f(x) - \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \Sigma(S) \\ 0 \leq j < T}} f^{(j)}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}) A_{\mathbf{m},j}(x)\,. \tag{2.3}$$

Le noyau de φ étant le sous-espace $\mathbf{C}[x]_{<NT}$ des polynômes de degré $< NT$, on en déduit le résultat suivant où, pour $j \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{R}$, on pose $k^{(j)} = k(k-1)\ldots(k-j+1)$.

PROPOSITION 2.1. *Pour toute série entière* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbf{C}\{x\}$, *on a*

$$\varphi(f(x)) = \sum_{k=NT}^{\infty} c_k \varphi(x^k) = \sum_{k=NT}^{\infty} c_k \left(x^k - \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\Sigma(S)\\ 0\le j<T}} k^{(j)} (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{k-j} A_{\mathbf{m},j}(x) \right),$$

les séries de droite convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$.

Démonstration. On sait que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k k^{(j)} x^{k-j},$$

la convergence de cette série étant uniforme sur tout compact. On en déduit, par réarrangement des termes,

$$\varphi(f(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k - \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\Sigma(S)\\ 0\le j<T}} \left(\sum_{k=j}^{\infty} c_k k^{(j)} (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{k-j} \right) A_{\mathbf{m},j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(x^k).$$

La conclusion suit puisque $\varphi(x^k) = 0$ pour $k < NT$. $\square$

Puisque la convergence est uniforme sur tout compact, on peut dériver termes à termes la série qui représente $\varphi(f(x))$. Pour notre fonction auxiliaire, on en déduit les formules suivantes dont la première découle de la définition et la seconde de la proposition.

COROLLAIRE 2.2. *La fonction auxiliaire* $g(x) = \varphi(e^x) = e^x - \sum e^{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\alpha}} A_{\mathbf{m},j}(x)$ *satisfait*

$$\begin{aligned} g^{(\ell)}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}) &= e^{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}} - \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\Sigma(S)\\ 0\le j<T}} e^{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\alpha}} A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \sum_{k=NT}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(k^{(\ell)} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{k-\ell} - \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\Sigma(S)\\ 0\le j<T}} k^{(j)} (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{k-j} A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}) \right) \end{aligned}$$

pour tout $\ell \in \mathbf{N}$ *et tout* $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^t$.

Comme les polynômes $A_{\mathbf{m},j}(x)$ sont à coefficients dans $\mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, la première formule montre que les nombres $g^{(\ell)}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})$ appartiennent au corps $\mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t})$. La seconde permet de majorer leurs valeurs absolues grâce au fait que $k!$ croît très rapidement en fonction de k. C'est

fondamentalement le même phénomène qui est à la base de la méthode d'Hermite. En pratique, on prendra $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1)$ et $\ell \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Les deux paragraphes suivants sont un rappel d'outils qui permettront d'exploiter ces données.

3. Hauteur

Soit $K \subset \mathbf{C}$ une extension algébrique de $\mathbf{Q}$ de degré fini d, soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, et soit $N_{K/\mathbf{Q}}$ la norme de K sur $\mathbf{Q}$. Pour chaque entier $n \geq 1$ et chaque point non nul $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n) \in K^{n+1}$, on désigne par $N_{K/\mathbf{Q}}(\mathbf{u})$ la norme de l'idéal fractionnaire de K engendré par $u_0, \ldots, u_n$ en tant que $\mathcal{O}_K$-module. Pour chaque plongement σ de K dans $\mathbf{C}$, on désigne aussi par $\mathbf{u}^\sigma$ le point $(\sigma(u_0), \ldots, \sigma(u_n)) \in \mathbf{C}^{n+1}$ et par $\|\mathbf{u}^\sigma\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\sigma(u_i)|$ sa norme du maximum. Enfin, on pose

$$H_\infty(\mathbf{u}) = \prod_\sigma \|\mathbf{u}^\sigma\|^{1/d}, \quad H_{\mathrm{fin}}(\mathbf{u}) = N_{K/\mathbf{Q}}(\mathbf{u})^{-1/d} \quad \text{et} \quad H(\mathbf{u}) = H_\infty(\mathbf{u}) H_{\mathrm{fin}}(\mathbf{u}),$$

le produit de gauche portant sur les d plongements distincts σ de K dans $\mathbf{C}$. Le nombre $H(\mathbf{u})$ s'appelle la *hauteur de Weil absolue* de $\mathbf{u}$. Elle satisfait $H(\mathbf{u}) \geq 1$ et $H(\lambda \mathbf{u}) = H(\mathbf{u})$ pour tout $\lambda \in K^*$. De plus, si L est un sous-corps de K contenant les coordonnées de $\mathbf{u}$, alors la hauteur de $\mathbf{u}$ est la même calculée sur K ou sur L. On renvoie le lecteur à [26, §3.2] pour une définition alternative de la hauteur en termes de produit de hauteurs locales et pour un traitement plus complet de ses propriétés.

On définit la *hauteur* $H(P)$ d'un polynôme non nul P à coefficients dans K comme étant la hauteur du vecteur de ses coordonnées dans un ordre quelconque. En particulier, si P est à coefficients dans $\mathbf{Z}$, alors $H(P) = \mathrm{cont}(P)^{-1}\|P\|$, où $\mathrm{cont}(P)$ désigne le contenu de P, c'est-à-dire le pgcd de ses coefficients. Par ailleurs, on définit la *longueur* $L(P)$ d'un polynôme P à coefficients dans $\mathbf{C}$ comme la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Ces notions nous seront utiles à travers le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soient $\mathbf{U}_i = (U_{i,1}, \ldots, U_{i,n_i})$ pour $i = 0, \ldots, t$, des familles indépendantes d'indéterminées sur K, et soit $R \in \mathbf{Z}[\mathbf{U}_0, \ldots, \mathbf{U}_t]$ un polynôme multi-homogène de multi-degré $(N_0, \ldots, N_t)$ en ces familles d'indéterminées. Supposons que, pour $i = 0, \ldots, t$, il existe $\mathbf{u}_i \in K^{n_i}$ et $\epsilon_i \in \mathbf{C}^{n_i}$ tels que*

$$R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t) \neq 0 \qquad \textit{et} \qquad R(\mathbf{u}_0 + \epsilon_0, \ldots, \mathbf{u}_t + \epsilon_t) = 0.$$

Alors on a

$$1 \leq 2^{N_0+\cdots+N_t} L(R)^d H(\mathbf{u}_0)^{dN_0} \cdots H(\mathbf{u}_t)^{dN_t} \max\left(\frac{\|\epsilon_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|}, \ldots, \frac{\|\epsilon_t\|}{\|\mathbf{u}_t\|}\right).$$

On peut considérer cette dernière inégalité comme une minoration de la distance du point $(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t)$ au plus proche zéro complexe de R.

Démonstration. Pour $i = 0, \ldots, t$, désignons par $\mathfrak{A}_i$ l'idéal fractionnaire de K engendré par les coordonnées de $\mathbf{u}_i$. Comme R est multi-homogène de multi-degré $(N_0, \ldots, N_t)$, le nombre $R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t)$ est un élément non nul de $\mathfrak{A}_0^{N_0} \cdots \mathfrak{A}_t^{N_t}$ et par suite

$$\begin{aligned}(3.1)\quad |N_{K/\mathbf{Q}}(R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t))| &\geq N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{A}_0^{N_0} \cdots \mathfrak{A}_t^{N_t}) \\ &= H_{\mathrm{fin}}(\mathbf{u}_0)^{-dN_0} \cdots H_{\mathrm{fin}}(\mathbf{u}_t)^{-dN_t}.\end{aligned}$$

Pour tout plongement $\sigma\colon K \to \mathbf{C}$, on a aussi

$$|\sigma(R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t))| = |R(\mathbf{u}_0^\sigma, \ldots, \mathbf{u}_t^\sigma)| \leq L(R)\|\mathbf{u}_0^\sigma\|^{N_0} \cdots \|\mathbf{u}_t^\sigma\|^{N_t}.$$

Pour le plongement donné par l'inclusion de K dans $\mathbf{C}$, on utilise plutôt l'estimation

$$\begin{aligned}|R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t)| &= |R(\mathbf{u}_0 + \epsilon_0, \ldots, \mathbf{u}_t + \epsilon_t) - R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t)| \\ &\leq 2^{N_0+\cdots+N_t} L(R)\|\mathbf{u}_0\|^{N_0} \cdots \|\mathbf{u}_t\|^{N_t} \max\left(\frac{\|\epsilon_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|}, \ldots, \frac{\|\epsilon_t\|}{\|\mathbf{u}_t\|}\right)\end{aligned}$$

qui se vérifie aisément en se ramenant d'abord au cas où R est un monôme puis, par homogénéité, au cas où $\|\mathbf{u}_0\| = \cdots = \|\mathbf{u}_t\| = 1$ (comme on a alors $|R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t)| \leq L(R)$, on peut, pour ce dernier calcul, supposer que $\|\epsilon_0\|, \ldots, \|\epsilon_t\| \leq 1$). On en déduit que

$$|N_{K/\mathbf{Q}}(R(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_t))| \leq 2^{N_0+\cdots+N_t} L(R)^d H_\infty(\mathbf{u}_0)^{dN_0} \cdots H_\infty(\mathbf{u}_t)^{dN_t} \max_{0 \leq i \leq t} \frac{\|\epsilon_i\|}{\|\mathbf{u}_i\|},$$

et la conclusion suit en combinant cette estimation avec (3.1). □

4. Résultant

L'introduction du résultant comme outil de la théorie des nombres transcendants est relativement récente. Quoique E. Borel ait été le premier à l'utiliser pour des polynômes en une variable en 1899 [6], c'est seulement à partir de 1949 que, grâce au critère de Gel'fond, son emploi s'est systématisé.

Pour les polynômes en plusieurs variables, il faut encore attendre les travaux de G. V. Chudnovsky autour de 1974, puis l'introduction de la théorie de l'élimination par Yu. V. Nesterenko [17] en 1977. De nos jours, ces efforts culminent avec le critère de P. Philippon [20] de 1986 qui, pour les questions d'indépendance algébrique, fournit une généralisation quasi-optimale du critère de Gel'fond (voir l'introduction de [20] pour un bref historique des travaux antérieurs). Des raffinements de ce critère dûs à E. M. Jabbouri [11] et à C. Jadot [12] permettent d'en déduire des mesures d'indépendance algébrique mais, dans le travail présent, nous n'aurons besoin que des propriétés les plus simples du résultant de polynômes homogènes en plusieurs variables.

Pour rappeler ces propriétés, on travaille avec l'anneau de polynômes $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]$ où $\underline{\mathbf{X}} = (X_0, \ldots, X_t)$ est une famille de $t+1$ indéterminées et, pour chaque entier $D \geq 0$, on désigne par $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_D$ sa partie homogène de degré D, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]$ engendré sur $\mathbf{C}$ par les monômes de degré total D.

PROPOSITION 4.1. *Pour chaque suite de $t+1$ entiers positifs $\mathbf{D} = (D_0, \ldots, D_t)$, il existe une application polynomiale*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{D}} \colon \mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_0} \times \cdots \times \mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_t} \longrightarrow \mathbf{C}\,,$$

appelée résultant en degré $\mathbf{D}$, *qui possède les propriétés suivantes :*

(1) *ses zéros sont les suites de polynômes $(Q_0, \ldots, Q_t) \in \mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_0} \times \cdots \times \mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_t}$ qui admettent au moins un zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$;*

(2) *pour chaque $i = 0, \ldots, t$, elle est homogène de degré $D_0 \cdots D_t / D_i$ en son argument d'indice i, c'est-à-dire que*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{D}}(Q_0, \ldots, \lambda Q_i, \ldots, Q_t) = \lambda^{D_0 \cdots D_t / D_i} \mathrm{Res}_{\mathbf{D}}(Q_0, \ldots, Q_t)$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $(Q_0, \ldots, Q_t) \in \mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_0} \times \cdots \times \mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_t}$;

(3) *le polynôme qui la représente dans la base des $(t+1)$-uplets de monômes du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_0} \times \cdots \times \mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_t}$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et irréductible sur $\mathbf{Z}$;*

(4) *le polynôme en question est de longueur au plus $(t+1)^{3(t+1)D_0 \cdots D_t}$.*

En vertu du théorème des zéros d'Hilbert, les propriétés (1) et (3) caractérisent $\mathrm{Res}_{\mathbf{D}}$ à multiplication près par ± 1. Les propriétés (2) et (4) viennent donc simplement préciser sa nature en majorant son degré et la taille de ses coefficients dans la base des $(t+1)$-uplets de monômes. Ces estimations sont cruciales pour les applications en indépendance algébrique comme l'exemple que nous allons traiter ici l'illustrera.

En degré $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, le résultant est un objet familier. C'est simplement le déterminant de $t+1$ formes linéaires, $\det\colon (\mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_1)^{t+1} \to \mathbf{C}$. C'est une application homogène de degré 1 en chacun de ses $t+1$ arguments et son polynôme sous-jacent est de longueur $(t+1)! \leq (t+1)^{t+1}$.

L'existence d'une application polynomiale satisfaisant les conditions (1) à (3) est un résultat classique [14, Chap. I, §§7, 9, 10]. Quant à la propriété (4), de nature arithmétique, elle semble être plus récente et son extension aux variétés projectives fait l'objet de recherches actives initiées dans [22]. L'estimation que nous donnons ici est relativement grossière mais suffisante pour notre objet.

Démonstration de la propriété (4). La proposition 2.8 de [20] montre que la *mesure de Mahler* $M(\mathrm{Res}_{\mathbf{D}})$ du résultant en degré $\mathbf{D}$ (définie dans [20, §I.3]) satisfait

$$\begin{aligned}\log M(\mathrm{Res}_{\mathbf{D}}) &\leq D_0 \cdots D_t\big((t+1)\log(t+1) + \log M(\mathrm{Res}_{\mathbf{1}})\big)\\ &\leq 2(t+1)\log(t+1) D_0 \cdots D_t\,,\end{aligned}$$

la seconde estimation utilisant la majoration $M(\mathrm{Res}_{\mathbf{1}}) \leq L(\mathrm{Res}_{\mathbf{1}}) \leq (t+1)^{t+1}$ mentionnée précédemment. Grâce au lemme 1.13 de [20], on en déduit, comme dans la preuve du lemme 3.5 de [13], que

$$L(\mathrm{Res}_{\mathbf{D}}) \leq M(\mathrm{Res}_{\mathbf{D}}) \prod_{i=0}^{t} \binom{D_i + t}{t}^{D_0 \cdots D_t / D_i} \leq (t+1)^{3(t+1) D_0 \cdots D_t},$$

en utilisant l'estimation grossière $\binom{D+t}{t} \leq (t+1)^D$ valable pour tout entier $D \geq 0$. $\square$

Notons que si on applique plutôt la proposition 5.3 de [13], on obtient pour $L(\mathrm{Res}_{\mathbf{D}})$ la majoration $(t+1)^{4(t+1) D_0 \cdots D_t}$ qui est moins précise.

Soit $K \subset \mathbf{C}$ un corps de nombres de degré d, comme au paragraphe précédent. De la proposition 4.1, on ne retiendra que la conséquence suivante.

COROLLAIRE 4.2. *Soient $Q_0, \dots, Q_t$ des polynômes homogènes de $K[\underline{\mathbf{X}}]$ de degrés respectifs $D_0, \dots, D_t \geq 1$, sans zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$, et soit $(\xi_1, \dots, \xi_t) \in \mathbf{C}^t$. Pour $i = 0, \dots, t$, on pose $\delta_i := Q_i(1, \xi_1, \dots, \xi_t)$. Alors, on a*

$$1 \leq (t+1)^{4d(t+1) D_0 \cdots D_t} \left(\prod_{i=0}^{t} H(Q_i)^{d D_0 \cdots D_t / D_i} \right) \max\left(\frac{|\delta_0|}{\|Q_0\|}, \dots, \frac{|\delta_t|}{\|Q_t\|} \right).$$

Démonstration. On a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{D}}(Q_0,\dots,Q_t)\neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{D}}(Q_0-\delta_0X_0^{D_0},\dots,Q_t-\delta_tX_0^{D_t})=0$$

puisque $Q_0,\dots,Q_t$ n'ont pas de zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$ tandis que, pour $i=0,\dots,t$, les polynômes $Q_i-\delta_iX_0^{D_i}\in\mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]_{D_i}$ s'annulent tous au point $(1:\xi_1:\cdots:\xi_t)\in\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$. La conclusion suit en appliquant la proposition 3.1 avec pour R le polynôme sous-jacent à $\mathrm{Res}_{\mathbf{D}}$ et $N_i=D_0\cdots D_t/D_i$ pour $i=0,\dots,t$. $\square$

En spécialisant encore davantage, on en déduit le résultat suivant adapté spécifiquement à notre objet où, rappelons-le, $\mathcal{O}_K$ désigne l'anneau des entiers de K.

COROLLAIRE 4.3. *Soient $1\leq D\leq S$ des entiers, soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble fini de polynômes homogènes de $\mathcal{O}_K[\underline{\mathbf{X}}]$ de degré S sans zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$, soit P un polynôme homogène non nul de $K[\underline{\mathbf{X}}]$ de degré D, et soit $(\xi_1,\dots,\xi_t)\in\mathbf{C}^t$. On se donne des nombres réels positifs B et δ tels que $\|Q^\sigma\|\leq B$ et $|Q(1,\xi_1,\dots,\xi_t)|\leq\delta$ pour tout $Q\in\mathcal{F}$ et tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}$. Alors on a*

$$1\leq H(P)^{dS^t}\big((t+1)^{8S}S^{2t}B\big)^{dtDS^{t-1}}\max\left\{\frac{\delta}{B},\frac{|P(1,\xi_1,\dots,\xi_t)|}{\|P\|}\right\}.$$

Démonstration. Une construction géométrique due à W. D. Brownawell et D. W. Masser [7], reprise par le lemme 1.9 de [20], montre que, pour $i=1,\dots,t$, il existe une combinaison linéaire Q_i d'au plus DS^{i-1} éléments de $\mathcal{F}$, à coefficients entiers de valeur absolue au plus DS^{i-1}, telle que, pour $i=0,\dots,t$, la variété V_i des zéros communs de $P,Q_1,\dots,Q_i$ dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$ soit équidimensionnelle de dimension $t-i-1$ et, si $i\neq t$, de degré au plus DS^i. Pour l'établir, on procède par récurrence sur i en notant que, pour $i=0$, cette condition est remplie puisque P est non nul de degré D. Par ailleurs, si cette condition est satisfaite pour un entier i avec $0\leq i<t$ et un choix approprié de $Q_1,\dots,Q_i$, alors V_i possède au plus DS^i composantes irréductibles $W_1,\dots,W_k$ toutes de même dimension $t-i-1$. Pour chaque $j=1,\dots,k$, on choisit un point $\mathbf{w}_j$ de W_j, puis un élément F_j de $\mathcal{F}$ tel que $F_j(\mathbf{w}_j)\neq 0$. Alors il existe une combinaison linéaire $Q_{i+1}=m_1F_1+\cdots+m_kF_k$ avec $m_1,\dots,m_k$ entiers, en valeur absolue au plus DS^i, telle que $Q_{i+1}(\mathbf{w}_j)\neq 0$ pour $j=1,\dots,k$. Pour ce choix de Q_{i+1}, la variété V_{i+1} intersection de V_i et de l'hypersurface $Q_{i+1}=0$ est équidimensionnelle de dimension $t-i-2$ et, si $i+1\neq t$, de degré au plus $\deg(V_i)S\leq DS^{i+1}$ comme requis. En

particulier, pour $i = t$, cela signifie que $P, Q_1, \ldots, Q_t$ n'ont aucun zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$.

Pour tout $i = 1, \ldots, t$ et tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}$, on a

$$\|Q_i^\sigma\| \leq S^{2t}B \quad \text{et} \quad |Q_i(1, \xi_1, \ldots, \xi_t)| \leq S^{2t}\delta$$

car $D \leq S$. Comme chacun des Q_i est à coefficients dans $\mathcal{O}_K$, on en déduit

$$H(Q_i)^d \leq H_\infty(Q_i)^d = \prod_\sigma \|Q_i^\sigma\| \leq (S^{2t}B)^{d-1}\|Q_i\| \leq (S^{2t}B)^d \quad (1 \leq i \leq t).$$

Alors le corollaire 4.2 livre

$$1 \leq (t+1)^{4d(t+1)DS^t} H(P)^{dS^t} (S^{2t}B)^{dtDS^{t-1}} \max\left\{\frac{S^{2t}\delta}{S^{2t}B}, \frac{|P(1, \xi_1, \ldots, \xi_t)|}{\|P\|}\right\}$$

et la conclusion suit en majorant le premier facteur par $(t+1)^{8dtDS^t}$. $\square$

5. Lemme de zéros

On reprend les notations du paragraphe 2 avec $S, T \geq 1$ fixés. On pose aussi

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_t) \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{X}} = (X_0, \ldots, X_t)$$

où $X_0, \ldots, X_t$ sont des indéterminées sur $\mathbf{C}$. Enfin, pour tout $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_t) \in \mathbf{N}^t$ et tout $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_t) \in \mathbf{C}^t$, on définit

$$\mathbf{X}^{\mathbf{n}} = X_1^{n_1} \cdots X_t^{n_t} \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^{\mathbf{n}} = z_1^{n_1} \cdots z_t^{n_t}.$$

Alors, pour $\ell \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ et $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1)$, la première formule du corollaire 2.2 montre que

$$g^{(\ell)}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = Q_{\mathbf{n},\ell}(1, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t}) \tag{5.1}$$

où

$$Q_{\mathbf{n},\ell}(\underline{\mathbf{X}}) = X_0^{S-|\mathbf{n}|}\mathbf{X}^{\mathbf{n}} - \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \Sigma(S) \\ 0 \leq j < T}} A_{\mathbf{m},j}^{(\ell)}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}) X_0^{S-|\mathbf{m}|}\mathbf{X}^{\mathbf{m}} \tag{5.2}$$

est un polynôme homogène de $\mathbf{C}[\underline{\mathbf{X}}]$ de degré S. Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant qui nous permettra par la suite d'appliquer le corollaire 4.3.

Proposition 5.1. *Supposons $T \geq 2$. Alors les polynômes $Q_{\mathbf{n},\ell}$ avec $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1)$ et $0 \leq \ell < T$ n'ont pas de zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$.*

On pourrait démontrer un résultat de ce type en employant, pour le groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, le formidable lemme de zéros de P. Philippon [21] comme le fait M. Ably dans [1] mais il faudrait encore traiter séparément les points "à l'infini". La démonstration ci-dessous est purement élémentaire et évite cette difficulté.

Démonstration. Supposons au contraire qu'ils admettent un zéro commun $(z_0 : \cdots : z_t) \in \mathbf{P}^t(\mathbf{C})$ et posons $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_t) \in \mathbf{C}^t$. Si $z_0 = 0$, on obtient aussitôt $\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = 0$ pour tout $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1) \setminus \Sigma(S)$, mais alors $z_1 = \cdots = z_t = 0$, ce qui est impossible. Donc on doit avoir $z_0 \neq 0$, ce qui permet de supposer que $z_0 = 1$. Alors, en termes du polynôme

$$p(x) := \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \Sigma(S) \\ 0 \leq j < T}} A_{\mathbf{m},j}(x) \mathbf{z}^{\mathbf{m}} \in \mathbf{C}[x],$$

l'hypothèse devient

$$\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = p^{(\ell)}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \quad (\mathbf{n} \in \Sigma(S+1),\ 0 \leq \ell < T). \tag{5.3}$$

Pour $i = 1, \ldots, t$, on en déduit que

$$p^{(\ell)}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \alpha_i) = z_i \mathbf{z}^{\mathbf{m}} = z_i p^{(\ell)}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \quad (\mathbf{m} \in \Sigma(S),\ 0 \leq \ell < T),$$

et par suite

$$p(x + \alpha_i) = z_i p(x) \tag{5.4}$$

puisque $p(x)$ est de degré inférieur à $T\,|\Sigma(S)|$. Or, pour $\mathbf{n} = 0$, les relations (5.3) signifient que $p^{(\ell)}(0) = 1$ $(0 \leq \ell < T)$. Donc, $p(x)$ est un polynôme non nul de degré au moins $T - 1 > 0$ et par suite la relation (5.4) n'est possible que si $z_i = 1$ et $\alpha_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, t$. Comme aucun des α_i n'est nul, c'est la contradiction cherchée. $\square$

6. Estimations et conclusion

On poursuit avec les notations des paragraphes 2 et 5. Pour des entiers $S, T \geq 1$ fixés, on pose

$$F := \{\mathbf{r} \in \mathbf{Z}^t\,;\ \mathbf{r} \neq 0 \text{ et } |\mathbf{r}| < S\} \quad \text{et} \quad \Delta := (T-1)!\ q^{2T|F|+T} \prod_{\mathbf{r} \in F} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha})^{2T}.$$

Le but de ce paragraphe est, dans un premier temps, de montrer que les polynômes $\Delta Q_{\mathbf{n},\ell}$ avec $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1)$ et $0 \leq \ell < T$ sont à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ et de majorer les normes de leurs conjugués. Ensuite, on majorera leurs valeurs

absolues au point $(1, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t})$. En appliquant le corollaire 4.3, on sera alors en mesure de démontrer le théorème 1.1 sous une forme légèrement plus générale.

Auparavant, on note que tout point de F s'écrit sous la forme $(\pm m_1, \ldots, \pm m_t)$ pour un choix de $(m_1, \ldots, m_t) \in \Sigma(S) \setminus \{0\}$. Par conséquent, la cardinalité $|F|$ de F est au plus $2^t(N-1)$ où $N = |\Sigma(S)|$. Dans les calculs qui suivent, on utilisera aussi la minoration $cq \geq 1$. Celle-ci découle du fait que tout élément non nul de $\mathcal{O}_K$ possède au moins un conjugué de valeur absolue ≥ 1 combiné à l'observation que les conjugués de $q\alpha_1, \ldots, q\alpha_t \in \mathcal{O}_K$ sont tous de valeur absolue $\leq cq$.

LEMME 6.1. *Soient* $\mathbf{m} \in \Sigma(S)$, $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1)$ *et* $j, \ell \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. *Alors, les nombres* Δ *et* $\Delta A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha})$ *sont des éléments de* $\mathbf{Z}[q\boldsymbol{\alpha}] \subseteq \mathcal{O}_K$ *dont les conjugués ont leur valeur absolue majorée par*

$$B_0 := (NT)^{2T-2}(cqS)^{2^{t+1}NT}.$$

Démonstration. En posant $E' = \Sigma(S) \setminus \{\mathbf{m}\}$, le polynôme $A_{\mathbf{m},j}(x)$ s'écrit

$$A_{\mathbf{m},j}(x) = \left(\prod_{\mathbf{m}' \in E'} (x - \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\alpha})^T \right) P_{\mathbf{m},j}(x - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}),$$

où $P_{\mathbf{m},j}$ désigne le polynôme de degré inférieur à T pour lequel

$$A_{\mathbf{m},j}(x) \equiv \frac{1}{j!}(x - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha})^j \mod (x - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha})^T.$$

En remplaçant x par $x + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha}$, cette dernière condition devient

$$\left(\prod_{\mathbf{m}' \in E'} (x - (\mathbf{m}' - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\alpha})^T \right) P_{\mathbf{m},j}(x) \equiv \frac{x^j}{j!} \mod x^T.$$

Ainsi, dans l'anneau des séries formelles $\mathbf{C}[[x]]$, on a

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{m},j}(x) &\equiv \frac{x^j}{j!} \prod_{\mathbf{m}' \in E'} \left(\big((\mathbf{m} - \mathbf{m}') \cdot \boldsymbol{\alpha}\big)^{-T} \left(1 - \frac{x}{(\mathbf{m}' - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\alpha}}\right)^{-T} \right) \mod x^T \\ &\equiv \frac{x^j}{c_{\mathbf{m},j}} \prod_{\mathbf{m}' \in E'} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{((\mathbf{m}' - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\alpha})^i} \right)^T \mod x^T, \end{aligned}$$

où $c_{\mathbf{m},j} = j! \prod_{\mathbf{m}' \in E'} \big((\mathbf{m} - \mathbf{m}') \cdot \boldsymbol{\alpha}\big)^T$. En développant cette expression, on en déduit que $P_{\mathbf{m},j}(x)$ est une somme de $\binom{T|E'|+T-j-1}{T-j-1}$ produits de la forme

$$\frac{x^{i+j}}{c_{\mathbf{m},j}((\mathbf{m}'_1 - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\alpha}) \cdots ((\mathbf{m}'_i - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\alpha})},$$

où i est un entier avec $0 \leq i \leq T-j-1$ et où $\mathbf{m}'_1, \ldots, \mathbf{m}'_i$ sont des éléments de E' non nécessairement distincts. Par suite, $A_{\mathbf{m},j}(x)$ est la somme des produits

$$\frac{1}{j!}\left(\prod_{\mathbf{m}' \in E'} \frac{x - \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\alpha}}{(\mathbf{m} - \mathbf{m}') \cdot \boldsymbol{\alpha}}\right)^T \frac{(x - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\alpha})^{i+j}}{((\mathbf{m}'_1 - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\alpha}) \cdots ((\mathbf{m}'_i - \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\alpha})}$$

pour les mêmes choix de i et de $\mathbf{m}'_1, \ldots, \mathbf{m}'_i$. Puisque $\mathbf{m} - E'$ et $E' - \mathbf{m}$ sont des sous-ensembles de F, ces produits s'écrivent encore sous la forme

$$\frac{(x - \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}) \cdots (x - \mathbf{m}_k \cdot \boldsymbol{\alpha})}{j!(\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}) \cdots (\mathbf{r}_{k-j} \cdot \boldsymbol{\alpha})}, \tag{6.1}$$

où k est un entier avec $j + T|E'| \leq k < T(|E'|+1) = NT$, où $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_k$ sont des éléments de $E = \Sigma(S)$, et où $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{k-j}$ sont des éléments de F, chacun de ces derniers étant répété au plus $2T$ fois.

En vertu de ce qui précède, la dérivée $A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(x)$ est une somme de produits semblables aux produits (6.1) mais avec ℓ facteurs en moins au numérateur. De plus, le nombre de ces produits ne dépasse pas

$$(NT)^\ell \binom{T|E'| + T - j - 1}{T - j - 1} \leq \frac{(NT)^{2(T-1)}}{(T-1)!}.$$

Alors $\Delta A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha})$ est une somme d'autant de produits de la forme

$$\frac{(T-1)!}{j!} q^{2T|F|+T} (\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}) \cdots (\mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\alpha}),$$

où cette fois k désigne un entier au plus égal à $2T|F| + T$ et où $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ sont des éléments de $\mathbf{Z}^t$ de longueur $|\mathbf{r}_i| \leq S$ $(1 \leq i \leq k)$. On conclut que $\Delta A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha})$ est un élément de $\mathbf{Z}[q\boldsymbol{\alpha}]$ et que, pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}$, on a

$$\left|\left(\Delta A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha})\right)^\sigma\right| \leq (NT)^{2(T-1)} (cqS)^{2T|F|+T}.$$

Comme cette majoration s'applique aussi à $|\Delta^\sigma|$, la conclusion suit en utilisant la borne $|F| \leq 2^t(N-1)$. $\square$

PROPOSITION 6.2. *Supposons $N \geq 6$ et $NT \geq 2ecqS$. Soient $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1)$ et $\ell \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Alors, $\Delta Q_{\mathbf{n},\ell}$ est un polynôme homogène de $\mathcal{O}_K[\underline{\mathbf{X}}]$ de degré S qui satisfait, pour tout plongement σ de K dans $\mathbf{C}$,*

$$\|\Delta^\sigma Q^\sigma_{\mathbf{n},\ell}\| \leq TB_0 \quad \textit{et} \quad |\Delta Q_{\mathbf{n},\ell}(1, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_t})| \leq \left(\frac{cqS}{T}\right)^{NT} T^T B_0.$$

Démonstration. La majoration de norme ainsi que l'assertion qui la précède découlent directement du lemme précédent joint à la définition (5.2) du polynôme $Q_{\mathbf{n},\ell}$. Pour établir l'autre majoration, on utilise la seconde formule du corollaire 2.2

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\mathbf{n},\ell}(1, e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_t}) &= \Delta g^{(\ell)}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \sum_{k=NT}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\Delta k^{(\ell)}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{k-\ell} - \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\Sigma(S)\\ 0\le j<T}} k^{(j)}(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\alpha})^{k-j}\Delta A^{(\ell)}_{\mathbf{m},j}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha})\Big).\end{aligned}$$

Grâce au lemme précédent, la valeur absolue de cette quantité est majorée par

$$B_0 \sum_{k=NT}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(k^{T-1}(cS)^{k-\ell} + N\sum_{j=0}^{T-1} k^j (cS)^{k-j}\right) \le B_0 \sum_{k=NT}^{\infty} \frac{(cqS)^k}{k!} N k^T ,$$

puisque la somme porte sur $k \ge NT$, que $NT \ge 3$, et que $\max\{1, cS\} \le cqS$. Comme $k! \ge (k/e)^k$ pour tout entier $k \ge 0$, cette dernière quantité est à son tour majorée par

$$\begin{aligned} NB_0 \sum_{k=NT}^{\infty} \left(\frac{ecqS}{k}\right)^k k^T &\le NB_0 \sum_{k=NT}^{\infty} \left(\frac{ecqS}{NT}\right)^k (NT)^T \\ &\le 2NB_0 \left(\frac{ecqS}{NT}\right)^{NT} (NT)^T \qquad \text{car } NT \ge 2ecqS, \\ &\le \left(\frac{cqS}{T}\right)^{NT} T^T B_0 \qquad \text{car } N \ge 6. \qquad \square \end{aligned}$$

Si D, H et P sont comme au théorème 1.1, alors le polynôme homogène $\widetilde{P}$ de degré D associé à P est de hauteur $H(\widetilde{P}) \le H$ et satisfait par construction $\widetilde{P}(1, e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_t}) = P(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_t})$. Donc le théorème 1.1 découle du résultat suivant sur lequel nous concluons ce travail.

THÉORÈME 6.3. *Soit $D \ge 1$ un entier positif et soit P un polynôme homogène non nul de $K[\underline{\mathbf{X}}]$ de degré D. Alors, on a*

$$\rho := \frac{|P(1, e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_t})|}{\|P\|} \ge H(P)^{-3dS^t} \exp\left(-(cqS)^{18S^t}\right), \tag{6.2}$$

où $S = 6dt(t!)D$.

Démonstration. Soit T le plus petit entier positif qui satisfasse à la fois

$$T \geq (cqS)^{2^{t+2}N} \quad \text{et} \quad T^{NT} \geq H(P)^{3dS^t}, \quad \text{où} \quad N = |\Sigma(S)| = \binom{S+t-1}{t}.$$

En vertu des propositions 5.1 et 6.2, les produits $\Delta Q_{\mathbf{n},\ell}$ avec $\mathbf{n} \in \Sigma(S+1)$ et $0 \leq \ell < T$ forment une famille $\mathcal{F}$ de polynômes homogènes de $\mathcal{O}_K[\underline{\mathbf{X}}]$ de degré S sans zéro commun dans $\mathbf{P}^t(\mathbf{C})$ qui satisfont les conditions du corollaire 4.3 avec $B = TB_0$ et $\delta = (cqS/T)^{NT}T^TB_0$ où B_0 est donné par le lemme 6.1. Ce corollaire livre donc

$$1 \leq H(P)^{dS^t}\Big((t+1)^{8S}S^{2t}TB_0\Big)^{dtDS^{t-1}} \max\left\{\left(\frac{cqS}{T}\right)^{NT} T^T,\ \rho\right\}. \tag{6.3}$$

Pour les estimations subséquentes, on utilisera

$$\frac{S^t}{t!} \leq N = \frac{S(S+1)\cdots(S+t-1)}{t!} \leq \frac{(S+t)^t}{t!} \leq \frac{S^t}{t!}\left(1+\frac{1}{6t}\right)^t \leq \frac{2S^t}{t!},$$

qui impliquent plus grossièrement $6t \leq S \leq N \leq S^t$ en tenant compte du fait que, pour $t = 1$, on a $N = S$. Ainsi, en vertu du choix de S, on trouve

$$dtDS^{t-1} \leq \frac{S^t}{6t!} \leq \frac{N}{6}.$$

On va montrer que

$$H(P)^{dS^t}\Big((t+1)^{8S}S^{2t}TB_0\Big)^{N/6}\left(\frac{cqS}{T}\right)^{NT} T^T \ < \ 1. \tag{6.4}$$

Si on accepte ce résultat, l'inégalité (6.3) entraîne aussitôt

$$\rho > \left(\frac{cqS}{T}\right)^{NT} T^T \geq \left(\frac{2}{T}\right)^{NT-T} \geq (T-1)^{-N(T-1)}, \tag{6.5}$$

car $cqS \geq S \geq 2$ et $T \geq N \geq 2$. En vertu du choix de T, on a par ailleurs

$$T - 1 \leq (cqS)^{2^{t+2}N} \leq \exp\big(2^{t+2}N(cqS)\big) \quad \text{ou} \quad (T-1)^{N(T-1)} \leq H(P)^{3dS^t}.$$

Comme $H(P) \geq 1$, on en déduit

$$(T-1)^{N(T-1)} \leq H(P)^{3dS^t}\exp\Big(2^{t+2}N(cqS)N(cqS)^{2^{t+2}N}\Big). \tag{6.6}$$

Comme $2 \leq S,\ N \leq S^t$ et $S \leq cqS$, on a aussi

$$\begin{aligned}
2^{t+2}N(cqS)N(cqS)^{2^{t+2}N} &\leq (cqS)^{2^{t+2}N+3t+3} \\
&\leq (cqS)^{(2^{t+2}+t)N} && \text{car } N \geq 6, \\
&\leq (cqS)^{2(2^{t+2}+t)S^t/t!} && \text{car } N \leq 2S^t/t!, \\
&\leq (cqS)^{18S^t}.
\end{aligned}$$

En substituant cette estimation dans (6.6) puis le résultat dans (6.5), on obtient l'inégalité annoncée (6.2). Il reste donc à vérifier (6.4). Pour ce faire, on utilise d'abord $t+1 \leq S$, $N \leq S^t$ et $S \leq cqS$, donc

$$\begin{aligned}(t+1)^{8S}S^{2t}TB_0 &= (t+1)^{8S}S^{2t}T(NT)^{2T-2}(cqS)^{2^{t+1}NT}\\ &\leq T^{2T}(cqS)^{2^{t+1}NT+8S+2tT}\\ &\leq T^{2T}(cqS)^{(2^{t+1}+1)NT}\,,\end{aligned}$$

où la dernière majoration découle du fait que $8S+2tT \leq 6tT \leq NT$. Comme $N \geq 6$, on en déduit que le membre de gauche de (6.4) est strictement majoré par

$$H(P)^{dS^t}\left(T^{3T}(cqS)^{(2^{t+1}+2)NT}\right)^{N/6}T^{-NT}\,.$$

En vertu du choix de T, ce nombre est à son tour majoré par

$$T^{NT/3}(T^{4T})^{N/6}T^{-NT} = 1\,,$$

comme annoncé. □

REMERCIEMENTS. Il me fait plaisir de remercier Daniel Bertrand, Michel Laurent et le referee pour leurs suggestions des références bibliographiques [2, 4, 5, 16, 28]. Je tiens aussi à témoigner de ma reconnaissance envers Michel Waldschmidt pour son intérêt dans mes travaux, ses constants encouragements, et de si nombreuses discussions depuis près de 25 ans déjà.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABLY, M. Une version quantitative du théorème de Lindemann-Weierstrass. *Acta Arith. 67* (1994), 29–45.

[2] ANDRÉ, Y. Séries Gevrey de type arithmétique. II. Transcendance sans transcendance. *Ann. of Math. (2) 151* (2000), 741–756.

[3] BAKER, A. *Transcendental Number Theory*. Cambridge University Press, London-New York, 1975.

[4] BERTRAND, D. Le théorème de Siegel-Shidlovsky revisité. In: *Number Theory, Analysis and Geometry: In Memory of Serge Lang*, D. Goldfeld, J. Jorgenson, P. Jones, D. Ramakrishnan, K. Ribet, J. Tate, eds., 51–67. Springer, 2012.

[5] BÉZIVIN, J.-P. and P. ROBBA. A new p-adic method for proving irrationality and transcendence results. *Ann. of Math. (2) 129* (1989), 151–160.

[6] BOREL, É. Sur la nature arithmétique du nombre *e*. *C.R. Acad. Sci. Paris 128* (1899), 596–599.

[7] BROWNAWELL, W. D. and D. W. MASSER. Multiplicity estimates for analytic functions II. *Duke Math. J. 47* (1980), 273–295.

[8] CHUDNOVSKY, G. V. Algebraic independence of the values of elliptic function at algebraic points. Elliptic analogue of the Lindemann-Weierstrass theorem. *Invent. Math. 61* (1980), 267–290.

[9] CIJSOUW, P. L. Transcendence measures of certain numbers whose transcendency was proved by A. Baker. *Compositio Math. 28* (1974), 179–194.

[10] HERMITE, C. Sur la fonction exponentielle. *C.R. Acad. Sci. Paris 77* (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[11] JABBOURI, E. M. Sur un critère d'indépendance algébrique de P. Philippon. In: *Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1990,* P. Philippon, éd., 195–202. Walter de Gruyter, 1992.

[12] JADOT, C. Critères pour l'indépendance algébrique et linéaire. Thèse de doctorat, Univ. Paris VI (Pierre et Marie Curie), Paris, 1996.

[13] LAURENT, M. and D. ROY. Criteria of algebraic independence with multiplicities and approximation by hypersurfaces. *J. Reine Angew. Math. 536* (2001), 65–114.

[14] MACAULAY, F. S. *The Algebraic Theory of Modular Systems.* Cambridge Univ. Press, 1994 (première publication en 1916).

[15] MAHLER, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus I. *J. Reine Angew. Math. 166* (1931), 118–136.

[16] —— *Lectures on Transcendental Numbers.* Lecture Notes in Mathematics *546.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[17] NESTERENKO, YU. V. Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 41* (1977), 253–284; traduction anglaise: *Math. USSR Izv. 11* (1977), 239–270.

[18] —— *Algebraic Independence.* Narosa Publishing House, New Delhi, 2009.

[19] PHILIPPON, P. Variétés abéliennes et indépendance algébrique II: un analogue abélien du théorème de Lindemann-Weierstrass. *Invent. Math. 72* (1983), 389–405.

[20] —— Critères pour l'indépendance algébrique. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 64* (1986), 5–52.

[21] —— Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France 114* (1986), 355–383.

[22] —— Sur des hauteurs alternatives I. *Math. Ann. 289* (1991), 255–283.

[23] ROY, D. An arithmetic criterion for the values of the exponential function. *Acta Arith. 97* (2001), 183–194.

[24] SERT, A. Une version effective du théorème de Lindemann-Weierstrass par les déterminants d'interpolation. *J. Number Theory 76* (1999), 94–119.

[25] WALDSCHMIDT, M. Les débuts de la théorie des nombres transcendants (à l'occasion du centenaire de la transcendance de π). *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 4* (1983), 93–115.

[26] —— *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *326.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[27] WEIERSTRASS, K. Zu Lindemann's Abhandlung "Über die Ludolph'sche Zahl". *Sitzungsber. d. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. Berlin* (1885), 1067–1086.

[28] WÜSTHOLZ, G. Über das Abelsche Analogon des Lindemannschen Satzes. I. *Invent. Math. 72* (1983), 363–388.

(Reçu le 6 juin 2012)

Damien Roy

Département de Mathématiques
Université d'Ottawa
585 King Edward
Ottawa, Ontario K1N 6N5
Canada
e-mail : droy@uottawa.ca