

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 57 (2011)

**Artikel:** Actions localement libres rigides de groupes de lie nilpotents  
**Autor:** Belliard, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-283536>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ACTIONS LOCALEMENT LIBRES RIGIDES  
DE GROUPES DE LIE NILPOTENTS

par Michel BELLIART

1. INTRODUCTION

Soient  $\mathbf{G}$  un groupe de Lie nilpotent,  $\mathbf{V}$  une variété compacte, orientable et sans bord,  $\Phi$  une action *localement libre* de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{V}$ . Les orbites de  $\Phi$  sont les feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $\mathbf{V}$ . Nous supposerons que la codimension  $\dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{G})$  de ce feuilletage est égale à 1. Sous ces hypothèses, dans [GHM], il est montré ce qui suit:

**THÉORÈME.** *Il existe dans  $\mathbf{G}$  un sous-groupe  $\mathbf{N}$ , contenant le groupe dérivé de  $\mathbf{G}$ , dont les orbites dans  $\mathbf{V}$  sont compactes.*

Outre qu'il contribue à l'élucidation de la topologie de  $\mathbf{V}$  (qui, selon [GHM], fibre sur le cercle et a le type d'homotopie d'un espace homogène de groupe de Lie résoluble), ce résultat a l'intérêt de ramener au moins en partie le problème de classification des actions possibles au cas où  $\mathbf{G}$  est abélien: en effet,  $\Phi$  induit une action localement libre  $\Phi'$  du groupe abélien  $\mathbf{G}' = \mathbf{G}/\mathbf{N}$  sur la base  $\mathbf{V}'$  de la fibration de  $\mathbf{V}$  en  $\mathbf{N}$ -orbites, et on a  $\dim(\mathbf{V}') = \dim(\mathbf{G}') + 1$ . Cependant,  $\Phi'$  n'est pas une action quelconque, et on pourrait espérer qu'en un sens approprié de cette expression,  $\Phi'$  se souvient de son origine. Dans cet ordre d'idées, on montrera ici un peu plus que le résultat suivant, qui peut être considéré comme un “échantillon” du plus intéressant des trois théorèmes que contient cet article, qui seront énoncés une fois construits les objets sur lesquels ils portent:

THÉORÈME PRINCIPAL. *Il existe un groupe de Lie nilpotent non-trivial  $\mathbf{G}$ , une variété compacte  $\mathbf{V}$  de dimension  $\dim(\mathbf{G}) + 1$  et une action localement libre analytique  $\Phi$  de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{V}$  tels que pour toute action localement libre  $\Psi$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{G}$  sur  $\mathbf{V}$ , on puisse trouver un automorphisme  $\tau$  du groupe de Lie  $\mathbf{G}$  et un difféomorphisme  $\sigma$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbf{V}$  tels que*

$$\sigma(\Psi(g, p)) = \Phi(\tau(g), \sigma(p)) \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall p \in \mathbf{V}.$$

La relation précédente entre actions  $\Phi$  et  $\Psi$  du même groupe sur la même variété est une relation d'équivalence naturelle mais très forte; en ce sens, le théorème principal affirme que le groupe  $\mathbf{G}$  que nous construirons ne possède, à conjugaison près pour celle-ci, qu'une seule action localement libre sur la variété  $\mathbf{V}$  que nous construirons en même temps que lui.

La classification orbitale et topologique obtenue dans [GHM] ne laissait pas espérer un tel résultat: d'ailleurs, il est bien connu qu'aucun groupe abélien non-trivial n'a la propriété de rigidité de notre groupe  $\mathbf{G}$  (de manière précise, une conséquence de [GHM] est que si  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^n$  alors  $V$  fibre en tores à  $n$  dimensions sur le cercle; en utilisant ce fait, par la technique de recollement de cylindres décrite dans [GHM] on peut construire des actions localement libres de  $\mathbf{R}^n$  sur  $V$  ayant un nombre fini arbitraire d'orbites compactes).

Tout comme les résultats de [GHM], ceux du présent article valent en fait pour toute classe de conjugaison  $C^r$  avec  $r \geq 2$ ; nous ne nous plaçons en classe  $C^\infty$  que par souci de simplicité.

Le plan de cet article est le suivant: dans la seconde partie, on construira une famille à deux paramètres de groupes  $\mathbf{G}_{x,y}$ , une variété  $\mathbf{V}$  et une action  $\Phi_{x,y}$  de chaque  $\mathbf{G}_{x,y}$  sur  $\mathbf{V}$  (on utilisera en fait des notations autres que  $\mathbf{G}_{x,y}, \Phi_{x,y}$ , mieux adaptées aux preuves des énoncés à venir). On mènera, dans la troisième partie, l'étude des objets ainsi construits. En quatrième partie, on énoncera sous une forme forte le théorème principal ainsi que deux résultats de moindre intérêt. Un court appendice sert à montrer que l'hypothèse du troisième de nos théorèmes (qui est de nature cohomologique) a génériquement lieu, ce qui n'étonnera aucun spécialiste du sujet. On peut résumer les théorèmes à venir en disant que si  $x$  et  $y$  sont rationnels, alors  $\Phi_{x,y}$  possède un ouvert non-vide d'orbites compactes; que dans le cas restant, il existe un difféomorphisme  $\sigma$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbf{V}$  tel que l'action  $(g, p) \rightarrow \sigma(\Phi(g, \sigma^{-1}(p)))$  ait les mêmes orbites que  $\Phi_{x,y}$ ; que dans ce cas, si le feuilletage de  $\mathbf{V}$  par les orbites de  $\Phi_{x,y}$  satisfait un certain critère cohomologique, les actions  $\Phi$  et  $\Phi_{x,y}$  elles-mêmes sont conjuguées.

## 2. CONSTRUCTION DES MODÈLES

On construit ici les objets dont il s'agira de mener l'étude. Les bases de la théorie des *groupes et algèbres de Lie* et celles du calcul différentiel sont réputées connues (une référence solide est [Hel]). On notera

$$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3)$$

les coordonnées naturelles sur  $\mathbf{R}^{15}$ . Par abus de notation, on admet de remplacer l'indice dans “ $a_1$ ”, “ $b_2$ ”... par un nombre qui lui est égal modulo 3, et cet indice sera fréquemment noté  $i$  ou  $j$ . On définit dans  $\mathbf{R}^{15}$  le sous-espace vectoriel  $\mathbf{K}$  comme le lieu où s'annulent les douze formes linéaires suivantes :

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1 - d_2, d_2 - d_3, e_1 + e_2 + e_3.$$

On nomme  $\mathbf{A}$  le quotient de  $\mathbf{R}^{15}$  par  $\mathbf{K}$ . Les formes linéaires précédentes constituent un système de coordonnées sur  $\mathbf{A}$ . Nous posons par souci de simplification  $d'_1 = d_2 - d_3$ ,  $d'_2 = d_3 - d_1$ ,  $d'_3 = d_1 - d_2$  et  $e = e_1 + e_2 + e_3$ . Ensuite, nous définissons un certain nombre de sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{A}$  au moyen d'équations linéaires :

DÉFINITION 1. Le sous-espace de  $\mathbf{A}$  défini par  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  est  $\mathbf{B}$ . Le sous-espace de  $\mathbf{B}$  défini par  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$  est  $\mathbf{C}$ . Le sous-espace de  $\mathbf{C}$  défini par  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  est  $\mathbf{D}$ . La droite de  $\mathbf{D}$  définie par  $d'_1 = d'_2 = d'_3 = 0$  est  $\mathbf{E}$ .

Pour tout plan  $\Pi$  de  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ , la préimage de  $\Pi$  dans  $\mathbf{A}$  est  $\mathbf{A}_\Pi$ . Le sous-espace de  $\mathbf{B}$  défini par  $b_{i+1} = b_{i+2} = 0$  est  $\mathbf{B}_i$ . Le sous-espace de  $\mathbf{C}$  défini par  $c_{i+1} = c_{i+2} = 0$  est  $\mathbf{C}_i$ . Le plan de  $\mathbf{D}$  défini par  $d'_i = 0$  est  $\mathbf{D}_i$ .

CONVENTION 2. Il y a sur  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$  un système de coordonnées naturelles  $(a_1, a_2, a_3)$ . En vue de la proposition 5 à venir, nous excluons de la famille  $\mathbf{A}_\Pi$  les objets particuliers pour lesquels le plan  $\Pi$  contient l'un des trois axes de coordonnées. Ceci revient à supposer que  $\Pi$  admet une équation de la forme  $a_3 = \mu a_1 + \nu a_2$  avec  $\mu$  et  $\nu$  non-nuls.

Considérons le réseau  $\mathcal{L}$  de  $\mathbf{R}^{15}$  dont les points ont des coordonnées entières, *les trois premières coordonnées étant paires*: ce réseau se projette sur  $\mathbf{A}$  en un réseau que nous noterons  $\mathbf{a}$  (rappelons que dans un espace vectoriel, un *réseau* est le sous-groupe discret engendré par une base). Nous

noterons  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{c}_i$  et  $\mathbf{d}_i$  les intersections de  $\mathbf{a}$  avec, respectivement:  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$  et  $\mathbf{D}_i$ . Chacun des sous-groupes discrets  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ... est un réseau dans le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{A}$  lui correspondant.

Nous allons maintenant modifier la loi de groupe additif de  $\mathbf{A}$  pour en faire un groupe de Lie nilpotent. Tous les sous-espaces vectoriels précédemment construits deviendront des sous-groupes de Lie; tous les sous-groupes discrets précédemment construits demeureront des sous-groupes discrets (c'est à cet effet que nous avons imposé aux trois premières coordonnées des éléments de  $\mathbf{a}$  d'être paires). Pour définir la nouvelle loi de  $\mathbf{A}$ , nous construirons d'abord l'algèbre de Lie de ses champs invariants par translations à droite.

Soit  $X'$  un champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}^{15}$ : il peut se produire que  $X'$  soit projectable sur  $\mathbf{A}$ ; c'est en particulier le cas si  $X'$  possède dans les coordonnées choisies une forme analytique dans laquelle n'interviennent pas les variables  $d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3$ . Nous pouvons alors noter  $X$  le projeté de  $X'$  sur  $\mathbf{A}$ . Les champs suivants sont clairement projectables:

$$\begin{aligned} A'_i &= \frac{\partial}{\partial a_i} - b_i \frac{\partial}{\partial c_i} - a_i b_i \frac{\partial}{\partial d_i} - \frac{b_i^2}{2} \frac{\partial}{\partial e_i}, & B'_i &= \frac{\partial}{\partial b_i} + b_{i+2} \frac{\partial}{\partial d_{i+1}}, \\ C'_i &= \frac{\partial}{\partial c_i} + a_i \frac{\partial}{\partial d_i} + b_i \frac{\partial}{\partial e_i}, & D'_i &= \frac{\partial}{\partial d_i}, & E'_i &= \frac{\partial}{\partial e_i}. \end{aligned}$$

Il est utile de noter que  $D_1 + D_2 + D_3 = 0$  et que les  $E_i$  sont tous égaux (de sorte que désormais nous omettrons l'indice). Les douze champs

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, E$$

forment un parallélisme sur  $\mathbf{A}$ . A présent, faisons décrire indépendamment à  $X$  et à  $Y$  la liste de ces champs, et déterminons à chaque fois la valeur de  $[X, Y]$ : comme le crochet de Lie est antisymétrique, il suffit de mener le calcul lorsque  $Y$  est à droite dans la liste; si nous nous dispensons de mentionner ceux des crochets qui sont nuls, nous aboutissons par un calcul direct à ces identités:

$$\begin{aligned} [A_i, B_i] &= C_i, & [A_i, C_i] &= D_i, \\ [B_i, B_{i+1}] &= D_{i+2}, & [B_i, C_i] &= E. \end{aligned}$$

Ainsi, l'espace vectoriel  $\mathcal{A}$  engendré par nos douze champs est stable par le crochet de Lie; ou encore: est une *algèbre de Lie*.

Soit à nouveau un champ  $X'$  sur  $\mathbf{R}^{15}$ . Soit  $p$  un point de  $\mathbf{R}^{15}$  et soit  $p'$  l'image de  $p$  sous le flot de  $X'$  au bout du temps  $t$ . Supposons  $X'$  susceptible d'une intégration explicite: l'écriture d'une formule donnant les coordonnées

du point  $p'$  en fonction de celles de  $p$  se heurte au problème technique du grand nombre de ces coordonnées; cependant, si certaines de celles-ci sont invariantes sous le flot de  $X'$ , on peut les omettre pour gagner de la place. Avec ce système, en notant  $(a_1, \dots, e_3)$  les coordonnées de  $p$  et  $(a'_1, \dots, e'_3)$  celles de  $p'$ :

$$\begin{aligned} X = A'_i \Rightarrow a'_i &= a_i + t, \quad c'_i = c_i - tb_i, \quad d'_i = d_i - (a_i t + \frac{t^2}{2})b_i, \quad e'_i = e_i - \frac{b_i^2}{2}t, \\ X = B'_i \Rightarrow b'_i &= b_i + t, \quad d'_{i+1} = d_{i+1} + b_{i+2}t, \\ X = C'_i \Rightarrow c'_i &= c_i + t, \quad d'_i = d_i + a_i t, \quad e'_i = e_i + b_i t, \\ X = D'_i \Rightarrow d'_i &= d_i + t, \quad X = E'_i \Rightarrow e'_i = e_i + t. \end{aligned}$$

De là résulte que les champs précédents sont *complètement intégrables* (c'est-à-dire, tangents à des groupes à un paramètre de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^{15}$ ). Cette propriété est stable par projection et nous permet de considérer les flots  $A'_i$  de  $A_i$ ,  $B'_i$  de  $B_i$ , etc. Toujours à l'aide de nos formules, nous pouvons déterminer sans peine la valeur des commutateurs  $[X^t, Y^s] = X^t Y^s X^{-t} Y^{-s}$  où  $t, s$  sont deux réels et  $X, Y$  deux champs pris dans la famille  $A_1, \dots, E$ : ici encore, on peut prendre  $Y$  à droite de  $X$  dans la liste et omettre les commutateurs triviaux; on obtient tous calculs faits

$$\begin{aligned} [A'_i, B^s_i] &= C_i^{-ts} D_i^{-t^2s/2} E_i^{-ts^2/2}, \quad [A'_i, C^s_i] = D_i^{-ts}, \\ [B'_i, B^s_{i+1}] &= D_{i+2}^{-ts}, \quad [B'_i, C^s_i] = E^{-ts}. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\mathbf{G}$  la famille des difféomorphismes de  $\mathbf{A}$  ayant la forme:

$$A_1^{a_1} A_2^{a_2} A_3^{a_3} B_1^{b_1} B_2^{b_2} B_3^{b_3} C_1^{c_1} C_2^{c_2} C_3^{c_3} D_1^{d_1} D_2^{d_2} E^e$$

où les coefficients sont des réels quelconques. Ce que nous venons d'établir en dit plus que la proposition suivante (non seulement elle est vraie, mais nous venons de coder explicitement  $\mathbf{G}$  par générateurs et relateurs):

**PROPOSITION 3.** *L'ensemble  $\mathbf{G}$  est un groupe de Lie de transformations polynomiales de  $\mathbf{A}$  qui agit simplement transitivement sur cet espace vectoriel.*

Soit  $\mathcal{O}$  l'origine de l'espace vectoriel  $\mathbf{A}$ . À tout  $a \in \mathbf{A}$ , nous pouvons associer l'unique élément  $g$  de  $\mathbf{G}$  tel que  $g(\mathcal{O}) = a$  et, au moyen de cette application, transporter sur  $\mathbf{A}$  la loi de  $\mathbf{G}$ : alors  $\mathcal{O}$  devient l'élément neutre de  $\mathbf{A}$ , que nous noterons désormais 1. Il est connu que  $\mathcal{A}$  est l'algèbre des champs de vecteurs invariants sur  $\mathbf{A}$  par translations à droite (ce qui peut d'ailleurs se retrouver par le calcul). Le résultat suivant est évident vu notre codage explicite de  $\mathbf{G}$  et notre définition de la structure du groupe de Lie  $\mathbf{A}$ :

PROPOSITION 4. *Tous les sous-espaces vectoriels  $\mathbf{A}_\Pi$ ,  $\mathbf{B} \dots$  de  $\mathbf{A}$  introduits plus haut (désignés par des majuscules grasses affectées ou non d'indices) demeurent des sous-groupes de Lie de  $\mathbf{A}$  pour sa nouvelle loi de composition interne.*

Notons que sur  $\mathbf{C}$ , les lois de sous-groupe de Lie et de sous-espace vectoriel de  $\mathbf{A}$  coïncident. A nos sous-groupes de Lie connexes de  $\mathbf{A}$  correspondront autant de sous-algèbres de Lie de  $\mathcal{A}$ , que nous désignerons par la même notation en remplaçant toutefois la majuscule grasse par une majuscule italique; il est aisément d'exhiber des bases de ces sous-algèbres de Lie. Par exemple, une base de  $\mathcal{B}_2$  est  $B_2, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, E$ ; une base de  $\mathcal{C}_1$  est  $C_1, D_1, D_2, E$ . Nous avons la proposition suivante, qui a pour corollaire direct la nilpotence de  $\mathbf{A}$ :

PROPOSITION 5. *Soit  $\mathcal{X}$  l'une des algèbres de Lie  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{A}_\Pi$ . La suite centrale ascendante de  $\mathcal{X}$  est  $\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{X}$ . Tout idéal de  $\mathcal{X}$  non contenu dans  $\mathcal{D}$  contient  $\mathcal{E}$ . Le transporteur de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{B}$ . Les  $\mathcal{B}_i$  sont les sous-algèbres de  $\mathcal{X}$  contenues dans  $\mathcal{B}$ , contenant strictement  $\mathcal{C}$  et ne possédant aucun élément dont la projection sur  $\mathcal{X}/\mathcal{D}$  soit de rang supérieur ou égal à 2. Enfin,  $\mathcal{C}_i = [\mathcal{X}, \mathcal{B}_i]$  et  $\mathcal{D}_i = [\mathcal{X}, \mathcal{C}_i]$ .*

*Preuve.* Toutes ces assertions résultent de calculs élémentaires d'algèbre linéaire. Prouvons juste celle-ci: «tout idéal de  $\mathcal{X}$  non contenu dans  $\mathcal{D}$  contient  $\mathcal{E}$ ». Considérons un idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{X}$  ne contenant pas  $\mathcal{E}$ , et soit l'un de ses éléments que nous mettons sous la forme

$$X = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 + c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 + D$$

avec  $D \in \mathcal{D}$ : puisque  $[[X, B_i], B_i] = a_i E$ , les  $a_i$  sont nuls; alors  $[X, C_i] = b_i E$ , donc les  $b_i$  sont également nuls; enfin,  $[B_i, X] = c_i E$ , donc les  $c_i$  sont nuls, ce qui prouve que  $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$ .  $\square$

Il est visible que  $\mathbf{A}$  possède une certaine symétrie; explicitons-la maintenant. Soit  $\iota \rightarrow \jmath$  une permutation des indices 1, 2, 3 ayant la signature  $\varepsilon$ : on constate sans effort que l'application linéaire de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  qui, sur la famille génératrice  $A_1 \dots D_1, D_2, D_3, E$  de  $\mathcal{A}$  prend la forme

$$A_\iota \rightarrow \varepsilon A_\jmath, \quad B_\iota \rightarrow B_\jmath, \quad C_\iota \rightarrow \varepsilon C_\jmath, \quad D_\iota \rightarrow D_\jmath, \quad E \rightarrow \varepsilon E$$

d'une part est bien définie, d'autre part constitue un automorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}$ . Celui-ci en induit un autre du groupe de Lie  $\mathbf{A}$ .

DÉFINITION 6. Nous dirons d'un tel automorphisme de  $\mathbf{A}$  qu'il est *circulaire*.

Les automorphismes circulaires permutent entre eux les  $\mathbf{B}_i$ , les  $\mathbf{C}_i$ , les  $\mathbf{D}_i$ , préservent la classe des sous-groupes normaux de  $\mathbf{A}$  ayant le type  $\mathbf{A}_\Pi$ , et on a l'espèce de réciproque suivante :

PROPOSITION 7. *Soit  $\tau$  un morphisme injectif de  $\mathcal{A}_\Pi$  dans  $\mathcal{A}$ . Alors l'image de  $\tau$  coïncide avec celle de  $\mathcal{A}_\Pi$  par un certain automorphisme circulaire de  $\mathcal{A}$ .*

*Preuve.* Rappelons que nous excluons de la famille  $\mathbf{A}_\Pi$  les objets pour lesquels  $\Pi$  contient l'un des axes de coordonnées du repère naturel de  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ . Une équation de  $\Pi$  est donc  $a_3 = \mu a_1 + \nu a_2$  où les réels  $\mu$  et  $\nu$  sont tous deux non-nuls, et  $\mathcal{A}_\Pi$  contient  $A'_1 = A_1 + \mu A_3$  et  $A'_2 = A_2 + \nu A_3$ . Une fois ceci noté, un calcul facile montre que la suite centrale descendante de  $\mathcal{A}_\Pi$  est  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \{0\}$  : ainsi,  $\tau(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$  et  $\tau(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$  ; par comparaison des dimensions, on voit qu'il y a égalité. Soit maintenant  $X \in \mathcal{C} - \mathcal{D}$  et soit  $\mathcal{I}_X$  l'ensemble des crochets  $[X, Y]$  où  $Y$  décrit  $\mathcal{A}_\Pi$  : on vérifie facilement que les  $\mathcal{I}_X$  ont pour intersection  $\mathcal{E}$  ; de même lorsque  $Y$  décrit  $\mathcal{A}$ , d'où il s'ensuit que  $\tau(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ . On en déduit l'existence d'un réel non-nul  $\varepsilon$  tel que  $\tau(E) = \varepsilon E$ . Ensuite, que ce soit dans  $\mathcal{A}_\Pi$  ou  $\mathcal{A}$ , le transporteur de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{B}$  : donc,  $\tau(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ . Dans  $\mathcal{A}_\Pi/\mathcal{D}$  comme dans  $\mathcal{A}/\mathcal{D}$ , les éléments de  $\mathcal{B}/\mathcal{D}$  qui ont un adjoint de rang au plus un sont proportionnels à l'un des trois  $B_i$  modulo  $\mathcal{C}$  ; donc, quitte à composer  $\tau$  avec un automorphisme circulaire de  $\mathcal{A}$ , on peut supposer qu'il existe des constantes  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  et des éléments  $U_1, U_2, U_3$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $\tau(B_i) = \beta_i B_i + U_i$ . Considérons ensuite l'image de  $X \in \mathcal{A}_\Pi$  par l'application linéaire  $X \rightarrow [X, B_i]$ , on conclut qu'il existe des constantes  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  et des éléments  $V_1, V_2, V_3$  de  $\mathcal{D}$  tels que  $\tau(C_i) = \gamma_i C_i + V_i$ . Calculons maintenant, modulo  $\mathcal{E}$  :

$$\tau(D_{i+2}) = \tau([B_i, B_{i+1}]) = [\tau(B_i), \tau(B_{i+1})] = \beta_i \beta_{i+1} D_{i+2}$$

mais de la contrainte  $D_1 + D_2 + D_3 = 0$  découle l'égalité des  $\beta_{i+1} \beta_{i+2}$ , puis celle des  $\beta_i$  que nous noterons désormais sans indice. Calculons ensuite

$$\varepsilon E = \tau(E) = \tau([B_i, C_i]) = [\tau(B_i), \tau(C_i)] = \beta \gamma_i E,$$

d'où l'égalité des  $\gamma_i$  que nous noterons désormais sans indice. Pour résumer :

il existe des constantes  $\beta, \gamma$  non-nulles et des éléments  $U_i$  de  $\mathcal{C}$ ,  $V_i$  de  $\mathcal{D}$ ,  $W_i$  de  $\mathcal{E}$  (les  $W_i$  de somme nulle) tels que

$$\tau(B_i) = \beta B_i + U_i, \quad \tau(C_i) = \gamma C_i + V_i, \quad \tau(D_i) = \beta^2 D_i + W_i, \quad \tau(E_i) = \beta \gamma E_i.$$

Considérons alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} [A'_1, B_1] &= C_1, & [A'_1, B_2] &= 0, & [A'_1, B_3] &= \mu C_3, \\ [A'_2, B_1] &= 0, & [A'_2, B_2] &= C_2, & [A'_2, B_3] &= \nu C_3, \end{aligned}$$

et appliquons-leur  $\tau$  : nous aboutissons à l'existence d'éléments  $X_1, X_2$  de  $\mathcal{B}$  pour lesquels  $\tau(A'_i) = \beta^{-1} \gamma A'_i + X_i$ . De là vient facilement le résultat voulu.  $\square$

Signalons sans démonstration que la proposition 7 a lieu même pour les plans  $\Pi$  que nous avons exclus à la convention 2 (il ne nous a pas paru utile d'en imposer la preuve, fastidieuse, au lecteur; celle-ci s'obtient par le même genre de considérations, avec plus de peine du fait que la proposition 5 ne reste vraie qu'en partie).

Préoccupons-nous maintenant de  $\mathbf{a}$ . Définissons dans  $\mathbf{A}$  les éléments :

$$\alpha_i = \exp(2A_i), \quad \beta_i = \exp(B_i), \quad \gamma_i = \exp(C_i), \quad \delta_i = \exp(D_i), \quad \varepsilon = \exp(E).$$

Rappelons que  $\mathbf{a}$  est la projection sur  $\mathbf{A}$  d'un certain réseau  $\mathcal{L}$  de  $\mathbf{R}^{15}$ .

**PROPOSITION 8.** *Le sous-groupe de  $\mathbf{A}$  engendré par les  $\alpha_i$ , les  $\beta_i$ , les  $\gamma_i$ , les  $\delta_i$  et  $\varepsilon$  coïncide avec  $\mathbf{a}$ .*

*Preuve.* Tout comme on a défini  $\mathbf{G}$ , on peut définir le groupe simplement transitif  $\mathbf{G}'$  des transformations polynomiales de  $\mathbf{R}^{15}$  qui ont la forme

$$A'_1{}^{a_1} A'_2{}^{a_2} A'_3{}^{a_3} B'_1{}^{b_1} B'_2{}^{b_2} B'_3{}^{b_3} C'_1{}^{c_1} C'_2{}^{c_2} C'_3{}^{c_3} D'_1{}^{d_1} D'_2{}^{d_2} D'_3{}^{d_3} E'_1{}^{e_1} E'_2{}^{e_2} E'_3{}^{e_3}$$

puis constater que  $\mathbf{G}$  est le quotient de  $\mathbf{G}'$  par un certain sous-groupe de dimension trois (qui coïncide avec le groupe des translations de  $\mathbf{R}^{15}$  parallèlement à  $\mathbf{K}$ ). On peut aussi définir des éléments  $\alpha'_i = \exp(2A'_i)$ , etc. qui relèvent les éléments  $\alpha_i$ , etc. de  $\mathbf{A}$ . Sur les calculs explicites que nous avons menés des flots de  $A'_i$ , etc. il se voit sans peine que chacun des quinze difféomorphismes  $\alpha'_1, \dots, \varepsilon'_3$  de  $\mathbf{R}^{15}$  préserve  $\mathcal{L}$ , d'une part, et que d'autre part tout point de  $\mathcal{L}$  est l'image de  $0 \in \mathcal{L}$  par un certain mot en les lettres  $\alpha'_1, \dots, \varepsilon'_3$  : de ceci découle que le sous-groupe engendré par  $\alpha'_1, \dots, \varepsilon'_3$  dans  $\mathbf{G}'$  est le stabilisateur de  $\mathcal{L}$  et qu'il est transitif sur cette partie de  $\mathbf{R}^{15}$ . Par projection, le sous-groupe de  $\mathbf{G}$  engendré par  $\alpha_1, \dots, \varepsilon$  est le stabilisateur de

**a** et il est transitif sur cet ensemble. De la façon dont nous avons identifié **A** à **G**, ceci revient à dire que **a** est le sous-groupe discret de **A** engendré par les  $\alpha_1, \dots, \varepsilon$ .  $\square$

Nous admettons les résultats suivants, qui reposent uniquement sur le calcul :

**PROPOSITION 9.** *Le groupe dérivé **a'** de **a** est engendré par  $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \delta_1, \delta_2$  et  $\varepsilon$ . Son centralisateur dans **a** est **c**. La suite centrale ascendante de **a** est **d, c, a**.*

Plutôt que d'invoquer la théorie générale des réseaux dans les groupes de Lie nilpotents, nous préférerons donner du fait suivant une preuve élémentaire :

**PROPOSITION 10.** *La variété  $\mathbf{V} = \mathbf{A}/\mathbf{a}$  est compacte.*

*Preuve.* Il est facile d'exhiber un domaine fondamental relativement compact dans **A** pour cette variété quotient: précisément, ce domaine est la projection sur **A** du “pavé” de  $\mathbf{R}^{15}$  composé des points dont les trois premières coordonnées sont dans  $[0, 2]$  et les autres dans  $[0, 1]$ . Il suffit pour le voir d'utiliser le codage explicite de **G** décrit plus haut.  $\square$

Nous avons voulu éviter tout recours inutile à la théorie générale des réseaux dans les groupes de Lie; nous dirons juste qu'un *réseau* **r** dans un groupe de Lie nilpotent **N** est un sous-groupe discret (en topologie métrique) tel que le quotient  $\mathbf{N}/\mathbf{r}$  soit compact: ainsi, chaque sous-groupe discret de **A** désigné ici par une certaine minuscule grasse est un réseau dans le sous-groupe connexe de **A** désigné par la majuscule grasse correspondante. Nous devrons quand même recourir à l'important théorème suivant de Malcev, dont la preuve se trouve dans [Ra] (théorème 2.11 et corollaires) et qui utilise l'existence d'une structure de groupe algébrique unipotent sur tout groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe:

**THÉORÈME** (Malcev). *Soit **G** un groupe de Lie réel nilpotent, connexe et simplement connexe; soit **g** un réseau de **G**; soit  $\psi$  un morphisme de **g** dans un autre groupe de Lie réel nilpotent connexe et simplement connexe **H**: alors  $\psi$  s'étend en un unique morphisme  $\Psi$  de **G** dans **H** dont le graphe est la clôture de Zariski de celui de  $\psi$ , et si  $\psi$  est injectif,  $\Psi$  l'est aussi.*

**COROLLAIRE 11.** *Soit  $\mathbf{L}$  un groupe de Lie réel nilpotent, connexe et simplement connexe; soit  $\mathbf{I}$  un réseau de  $\mathbf{L}$ . Alors l'ensemble des sous-groupes discrets de  $\mathbf{L}$  qui sont isomorphes à  $\mathbf{I}$  possède une structure d'espace homogène  $\mathbf{G}/\mathbf{g}$  où  $\mathbf{G}$  est un groupe de Lie et  $\mathbf{g}$  un sous-groupe discret.*

*Justification.* Soit  $\mathbf{I}'$  un sous-groupe discret de  $\mathbf{L}$  isomorphe à  $\mathbf{I}$ . Soit  $\psi$  un isomorphisme de  $\mathbf{I}$  sur  $\mathbf{I}'$ . Selon le théorème de Malcev,  $\psi$  s'étend d'une manière et d'une seule en un isomorphisme  $\Psi$  de  $\mathbf{L}$  sur lui-même. Comme  $\psi$  est défini à composition près à droite par un automorphisme de  $\mathbf{I}$ , on voit donc que l'espace des  $\mathbf{I}'$  est isomorphe au quotient du groupe des automorphismes de  $\mathbf{L}$  par le stabilisateur de  $\mathbf{I}$  dans ce groupe de Lie.  $\square$

Soit  $\mathbf{x}$  l'un des sous-groupes discrets de  $\mathbf{A}$  que nous avons construits et nommés par des minuscules grasses affectées ou non d'indices. Pour tout élément  $g$  de  $\mathbf{x}$ , soit  $\mathbf{x}(g)$  le sous-groupe  $g\mathbf{x}g^{-1}$  de  $\mathbf{A}$ . Parce que dans tous les cas  $\mathbf{x}$  est normal dans  $\mathbf{a}$ , l'application  $g \rightarrow \mathbf{x}(g)$  de  $\mathbf{A}$  dans l'espace homogène *ad hoc* (dont nous prenons  $\mathbf{x}$  pour point-base) se factorise via la projection naturelle  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$  associant à  $g$  sa classe à droite pour  $\mathbf{a}$ . Nous prenons pour point-base  $p_0$  sur  $\mathbf{V}$  la classe de l'élément neutre et définissons ainsi des objets  $\mathbf{a}(g)$ ,  $\mathbf{c}_1(g)$ ... que l'on peut voir comme des faisceaux localement constants de groupes discrets ou bien comme des applications algébriques entre variétés homogènes pointées, selon le point de vue. Dans la première vision des choses, notons que  $\mathbf{a}(p)$  s'identifie de manière naturelle au groupe fondamental de  $\mathbf{V}$  évalué en  $p$  (à l'élément  $a$  de  $\mathbf{a}(p)$  correspond la classe d'homotopie d'un lacet quelconque obtenu en projetant sur  $\mathbf{V}$  un chemin qui mène de  $g$  à  $ag$  dans  $\mathbf{A}$ , où  $g$  est n'importe quel relevé de  $p$ ).

Étant donné un plan  $\Pi$  de  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$  admettant une équation de la forme  $a_3 = \mu a_1 + \nu a_2$  où  $\mu\nu \neq 0$ , nous noterons  $\Phi_\Pi$  l'action localement libre naturelle de  $\mathbf{A}_\Pi$  sur  $\mathbf{V}$  par translations à gauche et  $\mathcal{F}_\Pi$  le feuilletage de  $\mathbf{V}$  par les orbites de cette action. De tels feuilletages sont bien connus: et l'on sait que  $\mathcal{F}_\Pi$  est à orbites compactes si  $\Pi$  est rationnel, à orbites denses dans les autres cas. Nous voyons les  $\Phi_\Pi$  comme des modèles auxquels comparer d'autres actions localement libres peut-être plus complexes qui pourraient avoir lieu sur  $\mathbf{V}$ ; nous considérons une telle action localement libre  $\Phi$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{A}_\Pi$  sur  $\mathbf{V}$  et allons maintenant l'étudier ainsi que le feuilletage  $\mathcal{F}$  qui lui correspond.

3. ÉTUDE DE  $\Phi$  ET DE  $\mathcal{F}$ 

Commençons par introduire le *faisceau d'holonomie* de  $\Phi$ . Soit  $p$  un point de  $\mathbf{V}$ . Soit  $\mathbf{s}(p)$  le stabilisateur de  $p$  dans  $\mathbf{A}_\Pi$  pour  $\Phi$ . Par équivariance, nous avons  $\mathbf{s}(\Phi(x, p)) = x\mathbf{s}(p)x^{-1}$  pour tout  $x$  de  $\mathbf{A}_\Pi$ ; la feuille  $\mathcal{F}_p$  de  $\mathcal{F}$  qui passe par  $p$  s'identifie par ailleurs à l'espace homogène  $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{s}(p)$  via l'application  $x \rightarrow \Phi(x, p)$  de  $\mathbf{A}_\Pi$  dans  $\mathbf{V}$ , et le groupe fondamental de  $\mathcal{F}_p$  est donc isomorphe à  $\mathbf{s}(p)$ . L'application naturelle de  $\mathbf{s}(p)$  dans  $\mathbf{a}(p)$  qui, à  $x \in \mathbf{s}(p)$ , associe la classe d'homotopie d'un lacet  $t \rightarrow \Phi(c(t), p)$  où  $c(t)$  est n'importe quel chemin de 1 à  $x$  dans  $\mathbf{A}_\Pi$  est injective en vertu d'un théorème de Novikov (cf. [Go], IV.3.10). La collection des images des  $\mathbf{s}(p)$  dans  $\mathbf{a}(p)$  ne constitue pas en général un faisceau localement constant en sous-groupes de  $\mathbf{a}(p)$ , parce que certaines sections ponctuelles  $x(p)$  de  $\mathbf{s}(p)$  peuvent très bien ne pas s'étendre à un voisinage de  $p$  dans  $\mathbf{V}$  (autrement dit,  $\mathcal{F}$  peut avoir de l'holonomie); cependant, nous pouvons définir le sous-groupe  $\mathbf{n}(p)$  de  $\mathbf{a}(p)$  composé des  $x$  qui sont dans l'image de  $\mathbf{s}(p)$  et pour lesquels, pour tout chemin  $p(t)$  dans  $\mathbf{V}$  d'origine  $p = p(0)$ , il existe une section continue  $t \rightarrow x(t) \in \mathbf{a}(p(t))$  de  $\mathbf{a}(p)$  pour laquelle  $x(t)$  soit constamment dans l'image de  $\mathbf{s}(p(t))$ : de par sa définition,  $\mathbf{n}(p)$  sera un faisceau localement constant en sous-groupes normaux de  $\mathbf{a}(p)$ . Pour tout  $x \in \mathbf{n}(p)$ , il existera un élément bien défini  $\kappa(x)$  du stabilisateur de  $p$  dans  $\mathbf{A}_\Pi$  pour  $\Phi$ ; cet élément pourra être étendu de manière unique en une section locale de  $\mathbf{s}(p)$  au-dessus de tout voisinage contractile de  $p$  dans  $\mathbf{V}$ , et l'obstruction à étendre  $x$  en une section globale de  $\mathbf{s}(p)$  est purement topologique: pour qu'une telle section globale existe, il faut et suffit que  $x$  soit central dans  $\mathbf{a}(p)$ . La preuve du résultat suivant, fondamental pour la suite, va nous occuper un certain temps:

**PROPOSITION 12.** *Ou bien la réunion des feuilles compactes de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbf{V}$  est d'intérieur non-vide, ou bien  $\mathbf{b}(p) \subset \mathbf{n}(p)$ ,  $\kappa(\mathbf{b}(p)) \subset \mathbf{B}$  et chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est dense dans  $\mathbf{V}$ .*

Signalons que la preuve donnée de cette proposition dans la première version de cet article [Be] était défectueuse. Certaines idées de [Be] n'ont pas été reprises ici (s'il était loisible de les faire apparaître dans une revue locale, elles n'avaient pas leur place dans une publication "sérieuse").

*Preuve de la proposition 12.* Selon le théorème C de [GHM], si  $\mathcal{F}$  est sans feuille compacte alors  $\mathbf{e}(p) \subset \mathbf{n}(p)$ . Selon la même source, si  $\mathcal{F}$  possède au moins une feuille compacte, les  $\Phi$ -orbites du centre  $\mathbf{D}$  de  $\mathbf{A}_\Pi$  sont les

fibres d'une fibration localement triviale de  $\mathbf{V}$  sur une certaine base  $\mathbf{W}$ . En ce cas, à tout  $p \in \mathbf{V}$ , associons son stabilisateur  $S(p)$  dans  $\mathbf{D}$ : puisqu'il est central dans  $\mathbf{A}_\Pi$ , celui-ci est constant le long des feuilles de  $\mathcal{F}$ ; donc, si  $S(p)$  n'est pas indépendant de  $p$ , le support de la différentielle de cette intégrale première non-triviale de  $\mathcal{F}$  sera un fermé de  $\mathbf{V}$  d'intérieur non-vide ne contenant que des feuilles compactes. C'est là le premier cas de notre alternative, que nous écarterons désormais. Ainsi,  $S(p)$  est constant. Chacun de ses éléments est donc l'image par  $\kappa$  d'une section globale de  $\mathbf{a}(p)$ , c'est-à-dire, d'un élément de  $\mathbf{d}(p)$ . De plus, le quotient de  $\mathbf{a}(p)$  par l'antécédent de  $S(p)$  est sans torsion (c'est en effet le groupe fondamental d'une variété compacte de dimension 9 supportant une action localement libre de  $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{D}$ , donc c'est selon [GHM] un groupe polycyclique sans torsion). On en tire aisément que  $\mathbf{d}(p) \subset \mathbf{n}(p)$ . En appliquant le même raisonnement à l'action de  $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{D}$  sur  $\mathbf{W}$ , on obtient ensuite l'inclusion  $\mathbf{e}(p) \subset \mathbf{n}(p)$ . Nous concluons qu'en l'absence d'intégrales premières non-constants pour  $\mathcal{F}$ , le faisceau  $\mathbf{e}(p)$  est inclus dans  $\mathbf{n}(p)$  qu'il y ait des feuilles compactes ou pas.

Dans  $\mathbf{e}(p)$ , il y a les sections globales  $\delta_i(p)$  et  $\varepsilon(p)$  dont les évaluations en  $p_0$  sont respectivement  $\delta_i$  et  $\varepsilon$ . L'application  $p \rightarrow \kappa(\varepsilon(p))$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{A}_\Pi$  satisfait par construction la condition d'équivariance  $\kappa(\varepsilon(\Phi(x, p))) = x\kappa(\varepsilon(p))x^{-1}$ , donc son image est une réunion de classes de conjugaison dans  $\mathbf{A}_\Pi$ . Or, cette image est bornée (car  $\mathbf{V}$  est compacte): on en déduit que  $\kappa(\varepsilon(p))$  est à valeurs dans le centre  $\mathbf{D}$  de  $\mathbf{A}_\Pi$ , car aucune classe de conjugaison non-centrale dans  $\mathbf{A}_\Pi$  n'est bornée (c'est un fait général de la théorie des groupes de Lie nilpotents qui, dans notre cas, peut se prouver par des calculs triviaux). Ainsi,  $\kappa(\varepsilon(p))$  est une application constante le long des feuilles de  $\mathcal{F}$ : comme nous avons écarté le cas où  $\mathcal{F}$  possède des intégrales premières non-constants,  $\kappa(\varepsilon(p))$  est constant. De même, les éléments  $\kappa(\delta_i(p))$  de  $\mathbf{A}_\Pi$  sont centraux dans  $\mathbf{A}_\Pi$  et constants en tant que fonctions de  $p$ . Ensuite, il existe trois sections globales  $\gamma_i(p)$  du faisceau quotient  $\mathbf{e}/\mathbf{d}(p)$  définies par leurs évaluations en  $p_0$ , égales à  $\delta_i$  modulo  $\mathbf{D}$ : répétant l'argument, on constate que pour l'application quotient de  $\mathbf{e}/\mathbf{d}(p)$  dans  $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{D}$  induite par  $\kappa$ , les images des  $\gamma_i(p)$  sont dans le centre  $\mathbf{C}$  de  $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{D}$ . Ainsi,  $\kappa(\mathbf{e}(p)) \subset \mathbf{C}$ .

Comme  $\mathbf{e}$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}^6$  et discret dans  $\mathbf{C}$  qui est isomorphe à  $\mathbf{R}^6$ , le sous-groupe  $\kappa(\mathbf{e}(p))$  est donc un certain réseau de  $\mathbf{C}$  (qui dépend de  $p$ ). Considérons à présent le sous-groupe normal  $\mathbf{n}_i$  de  $\mathbf{a}$  engendré par  $\gamma_i$ ,  $\delta_i$  et  $\varepsilon$ : il lui correspond un sous-faisceau  $\mathbf{n}_i(p)$  de  $\mathbf{e}(p)$  non contenu dans  $\mathbf{d}$ ; l'image de  $\mathbf{n}_i(p)$  dans  $\mathbf{C}$  par  $\kappa$  possède pour clôture

de Zariski un sous-espace vectoriel de dimension trois  $N_i(p)$  de  $C$  non contenu dans  $D$ ; ce sous-espace satisfait par construction à la condition d'équivariance  $N_i(\Phi(x, p)) = xN_i(p)x^{-1}$ , et on en tire immédiatement que  $N_i(p)$  est un idéal de  $A_\Pi$  (en particulier, il ne dépend pas de  $p$ ). Cet idéal est non contenu dans  $D$ , donc il contient  $E$  en vertu de la proposition 5. Mais comme l'intersection des  $n_i(p)$  est le groupe monogène engendré par  $\varepsilon(p)$ , celle des sous-espaces  $N_i$  de  $C$  doit être la droite  $E$  et nous concluons que  $\kappa(\varepsilon(p))$  a la forme  $E^e$  pour un certain réel non-nul  $e$ .

A tout  $p$ , associons maintenant le réseau  $\ell(p)$  de  $C/E$  obtenu en projetant sur cet espace vectoriel le réseau  $\kappa(c(p))$  de  $C$ . Il est facile de voir que l'espace  $T$  des réseaux de  $C/E$  qui coupent  $D/E$  en un réseau fixe et se projettent sur  $C/D$  en un réseau fixe est un tore de dimension six sur lequel l'action naturelle de  $A_\Pi$  se fait par translations, le noyau de cette action admettant  $B$  pour composante connexe (de sorte que les  $A_\Pi$ -orbites y sont des surfaces). Ces surfaces, ou bien sont des sous-tores parallèles, ou bien sont denses dans des sous-tores de  $T$  de dimension supérieure ou égale à 3.

Cela étant, le rang de l'application équivariante  $\ell$  de  $V$  dans  $T$  est constant le long des  $\Phi$ -orbites; de plus, en tout point  $p$  de  $V$ , il vaut au maximum  $\dim(V) - \dim(B) = 3$  et au minimum  $\dim(A) - \dim(B) = 2$ ; enfin, si ce rang prend en au moins un point la valeur 2, alors les  $A_\Pi$ -orbites dans  $T$  seront des tores-surfaces. Or, le rang de  $\ell$  ne peut pas être 2 en tout point, car l'application induite par  $\ell$  du groupe fondamental  $a$  de  $V$  en  $p_0$  dans celui de  $T$  en  $\ell(p_0)$  peut se calculer sans grands efforts et son image est isomorphe à  $a/b$ , groupe abélien libre de rang 3 qui ne saurait s'injecter dans le groupe fondamental d'une surface. Nous concluons que le rang de  $\ell$  est 3 en au moins un point de  $V$ : donc, s'il n'est pas constamment égal à 3, sur l'ouvert  $\Phi$ -invariant de  $V$  où  $\ell$  est de rang 3 les orbites de  $\Phi$  seront les préimages (compactes) des tores-surfaces orbites de  $A_\Pi$  dans  $T$ . Mais nous avons écarté ce cas de figure: nous concluons que  $\ell$  est une submersion feuilletée et que les  $A_\Pi$ -orbites sont denses dans le tore de dimension trois qui est l'image de  $V$  (donc, les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont denses dans  $V$ ). Les fibres de la submersion  $\ell$  ont pour composantes connexes les  $B$ -orbites car elles les contiennent tout en ayant la même dimension. Le réseau  $x(p)$  de  $B$  qui stabilise  $p$  est l'extension de  $c(p)$  par un réseau de  $B/C$ , nécessairement isomorphe à  $\mathbf{Z}^3$  et image par  $\kappa$  d'un sous-groupe normal de  $a(p)$  qui centralise  $c(p)$  modulo  $e(p)$ ; ainsi,  $x(p)$  est l'image d'un sous-groupe  $y(p)$  de  $b(p)$  qui est de torsion dans ce dernier: or,  $a/n(p)$  est libre, donc  $y(p) = b(p)$ .  $\square$

Il est logique de procéder maintenant par disjonction des cas :

**PROPOSITION 13.** *Si  $\Phi$  possède une orbite compacte, alors  $\Pi$  est un plan rationnel (c-à-d. que  $\mu$  et  $\nu$  sont rationnels).*

*Preuve.* Si  $\Phi$  possède une orbite compacte, on peut (quitte à conjuguer  $\Phi$  par un difféomorphisme de  $\mathbf{V}$ ) supposer que celle-ci passe par le point-base  $p_0$  de  $\mathbf{V}$ . Soit  $\mathbf{a}_\Pi$  le stabilisateur de  $p_0$  pour  $\Phi$ : comme l'espace homogène  $\mathbf{A}_\Pi/\mathbf{a}_\Pi$  est isomorphe à notre orbite compacte (donc lui-même compact), le groupe  $\mathbf{a}_\Pi$  est un réseau de  $\mathbf{A}_\Pi$ ; de ce fait, l'injection naturelle  $\psi$  de  $\mathbf{a}_\Pi$  dans  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(p_0)$  s'étend en une injection  $\Psi$  de  $\mathbf{A}_\Pi$  dans  $\mathbf{A}$  dont le graphe est la clôture de Zariski de celui de  $\psi$ . Nous avons vu que toute injection de  $\mathbf{A}_\Pi$  dans  $\mathbf{A}$  avait pour image  $\mathbf{A}_\Pi$  ou un groupe qui s'en déduit par application d'un automorphisme circulaire. Les automorphismes circulaires de  $\mathbf{A}$  préservant clairement  $\mathbf{a}$ , ils induisent des difféomorphismes de  $\mathbf{V}$ ; de sorte qu'en conjuguant éventuellement  $\Phi$  par un tel difféomorphisme, on peut supposer  $\Psi(\mathbf{A}_\Pi) = \mathbf{A}_\Pi$ . Alors, comme  $\mathbf{A}_\Pi \cap \mathbf{a}$  est un réseau dans  $\mathbf{A}_\Pi$ , le plan  $\Pi$  doit être rationnel.  $\square$

**PROPOSITION 14.** *Si  $\Phi$  est sans orbite compacte, après conjugaison éventuelle de  $\Phi$  par un automorphisme triangulaire approprié de  $\mathbf{V}$ , il existera des réels  $b$  et  $c$  non-nuls et pour tout indice  $i \in \{1, 2, 3\}$  et tout point  $p$  de  $\mathbf{V}$  des éléments  $u_i(p)$  de  $\mathbf{C}$ ,  $v_i(p)$  de  $\mathbf{D}$ ,  $w_i(p)$  de  $\mathbf{E}$  tels que le stabilisateur de  $p$  dans  $\mathbf{B}$  soit engendré par les  $B_i^b u_i$ , les  $C_i^c v_i$ , les  $D_i^{b^2} w_i$  et  $E^{bc}$ .*

*Preuve.* Le faisceau quotient  $\mathbf{b}/\mathbf{c}(p)$  admet les trois sections constantes  $\beta_i(p)$  dont les évaluations en  $p_0$  valent  $\beta_i$ . Par un argument déjà utilisé à la preuve de la proposition 12, il existera des éléments constants de  $\mathbf{B}/\mathbf{C}$  images des  $\beta_i(p)$ . Dans  $\mathbf{B}/\mathbf{D}$  et pour  $i$  fixé, les éléments  $\kappa(\beta_i(p))$ ,  $\kappa(\gamma_1(p))$ ,  $\kappa(\gamma_2(p))$  et  $\kappa(\gamma_3(p))$  engendrent un réseau  $\ell(p)$  qui est variable mais dont l'intersection avec  $\mathbf{C}$  et la projection sur  $\mathbf{B}/\mathbf{C}$  sont constantes. Une fois fixées cette intersection et cette projection, la variété  $\mathbf{T}$  des réseaux possibles est un tore de dimension trois sur lequel l'action naturelle de  $\mathbf{A}_\Pi$  se fait par translations le long d'orbites dont la dimension est un ou deux: précisément, cette dimension est un si  $\kappa(\beta_i(p))$  est de la forme  $B_j^b$  pour un certain indice  $j$  et un certain réel  $b$ . Mais l'image par  $\ell$  du groupe fondamental  $\mathbf{a}$  de  $\mathbf{V}$  en  $p_0$  est monogène: donc, les  $\mathbf{A}_\Pi$ -orbites dans  $\mathbf{T}$  ne peuvent pas être des tores de dimension deux ou plus, de ce fait ce sont des cercles et  $\kappa(\beta_i(p))$  est de la forme  $B_j^{b_i}$  modulo  $\mathbf{C}$  pour un certain réel  $b_i$  et un certain indice  $j$ . Quitte

à composer  $\Phi$  par un automorphisme circulaire de  $\mathbf{V}$ , on pourra supposer que  $j = i$ .

Si la section globale  $\beta_i(p)$  de  $\mathbf{a}$  n'est pas bien déterminée modulo  $\mathbf{d}(p)$ , c'est que ses diverses valuations diffèrent d'une puissance de  $\gamma_i(p)$ ; et de même,  $B_i^{b_i}$  n'est déterminé modulo  $\mathbf{D}$  qu'à un élément près du flot de  $C_i$ . Il en découle directement que  $\kappa(\gamma_i(p))$  a la forme  $C_i^{c_i}$  modulo  $\mathbf{D}$ . Le même argument montre, *mutatis mutandis*, que  $\kappa(\delta_i(p))$  a la forme  $D_i^{d_i}$  modulo  $\mathbf{E}$ . Mais on a dans le sous-groupe de  $\mathbf{a}(p)$  engendré par les  $\delta_i(p)$  l'unique contrainte  $\delta_1(p)\delta_2(p)\delta_3(p) = 1$ , et dans l'algèbre de Lie  $\mathcal{D}$  l'unique contrainte  $D_1 + D_2 + D_3 = 0$ : on en tire l'égalité des constantes  $d_i$  que l'on notera donc sans indice. Appliquant ensuite  $\kappa$  à l'identité suivante, valable modulo  $\mathbf{e}(p)$ :  $[\beta_i(p), \beta_{i+1}(p)] = \delta_{i+2}(p)^{-1}$ , nous constatons que  $b_i b_{i+1} = d$ ; il en découle rapidement que les  $b_i$  sont égaux. Appliquant enfin  $\kappa$  à l'identité  $[\beta_i(p), \gamma_i(p)] = \varepsilon_i(p)^{-1}$ , nous obtenons  $bc_i = e$ , d'où l'égalité des  $c_i$  et les égalités  $d = b^2$  et  $e = bc$ .

#### 4. ÉNONCÉS ET PREUVES

Nous allons maintenant montrer les résultats suivants:

THÉORÈME A. *Il existe une  $\Phi$ -orbite compacte si et seulement si  $\Pi$  est rationnel, et dans ce cas les orbites compactes de  $\Phi$  forment une famille non-dénombrable.*

THÉORÈME B. *Si  $\Pi$  est irrationnel, alors  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_\Pi$  sont  $C^\infty$ -conjugués et  $\Phi$  préserve une forme de volume de classe  $C^\infty$ .*

On aurait pu s'attendre, vu ce qui est connu du cas abélien (notamment la classification des flots sur le tore: cf. [AA]) à ce qu'un critère d'existence d'une conjugaison  $C^\infty$  de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{F}_\Pi$  sous l'hypothèse *a priori* d'existence d'une conjugaison topologique dût contenir le terme "diophantien" (ou le nom d'une notion voisine issue de l'approximation diophantienne), terme appliqué à un invariant de  $\mathcal{F}$  qu'il se serait agi de construire, du type "nombre de rotation"; de même pour le volume invariant lisse, qui n'existe pas nécessairement dans le cas abélien même lorsque les orbites sont *a priori* supposées denses. L'invariant "de type diophantien" dont nous venons d'évoquer l'existence se dissimule en fait dans le *premier groupe de cohomologie feuilletée* de  $\mathcal{F}_\Pi$ ,

dont le lecteur trouvera la définition dans [Hei] et le calcul dans l'appendice de cet article.

THÉORÈME C. *Si l'application naturelle de  $H^1(\mathcal{A}_\Pi, \mathbf{R})$  dans  $H^1(\mathcal{F}_\Pi, \mathbf{R})$  est surjective, alors  $\Phi$  et  $\Phi_\Pi$  sont elles-mêmes  $C^\infty$ -conjuguées.*

L'application naturelle dont notre théorème fait état est étudiée dans [MM]; nous rappellerons sa définition dans la preuve du théorème C. Il convient de se demander si l'hypothèse du théorème C peut être satisfaite. Rappelons à ce sujet que le nombre réel  $\kappa$  est dit *diophantien* si l'on peut trouver des constantes  $C > 0$  et  $\alpha$  telles que pour tout couple d'entiers non tous deux nuls  $(p, q)$  on ait

$$|p\kappa - q| \geq C(|p| + |q|)^\alpha.$$

Rappelons que la classe des nombres réels non-diophantiens est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

THÉORÈME D. *L'application naturelle de  $H^1(\mathcal{A}_\Pi, \mathbf{R})$  dans  $H^1(\mathcal{F}_\Pi, \mathbf{R})$  est surjective dès que  $\mu$  et  $\nu$  sont tous deux diophantiens.*

*Preuve des théorèmes A, B et C.* Nous avons déjà obtenu une partie du théorème A: si  $\Phi$  possède une orbite compacte, alors la réunion de ses orbites compactes est d'intérieur non-vide et  $\Pi$  est rationnel (propositions 12 et 13). En nous plaçant dans le cas restant, nous montrerons que  $\Pi$  doit être irrationnel et  $\mathcal{F}$  conjugué à  $\mathcal{F}_\Pi$ . Nous obtiendrons ainsi tout le théorème A et la première assertion du théorème B.

Le groupe de Lie  $\mathbf{B}/\mathbf{D}$  est abélien et il est utile de le voir comme un espace vectoriel. Soit  $\mathbf{W}$  la variété des réseaux de  $\mathbf{B}/\mathbf{D}$  qui coupent  $\mathbf{C}/\mathbf{D}$  selon le réseau fixé  $c \cdot \mathbf{e}/\mathbf{d}$  et se projettent sur  $\mathbf{B}/\mathbf{C}$  en le réseau fixé  $b \cdot \mathbf{b}/\mathbf{c}$  (les constantes  $b$  et  $c$  sont celles de la proposition 14). On n'a nulle peine à voir que  $\mathbf{W}$  est un tore affine de dimension 9. Le choix d'une origine particulière  $\mathbf{O}$  fait de ce tore affine un groupe de Lie: ce choix revient à celui de trois éléments  $g_1, g_2, g_3$  du réseau  $\mathbf{O}$  de  $\mathbf{B}/\mathbf{D}$  se projetant respectivement sur les classes modulo  $\mathbf{C}$  de  $b\beta_1, b\beta_2, b\beta_3$ . Pour tout autre élément  $\mathbf{O}'$  de  $\mathbf{W}$ , il existera des réels  $u_i^*$  définis modulo 1 pour lesquels les éléments  $g'_1, g'_2, g'_3$  de  $\mathbf{O}'$  se projetant eux-mêmes sur  $b\beta_1, b\beta_2, b\beta_3$  seront de la forme  $g'_i = g_i + c \sum_{k=1}^3 u_i^* \gamma_j$ . L'action naturelle  $\Theta$  de  $\mathbf{A}$  sur  $\mathbf{W}$  se laisse aisément déterminer: sa restriction à  $\mathbf{B}$  est triviale et la différentielle de  $\Theta$  transporte le champ  $A_i$  sur  $A_i^0 = a^{-1} \frac{\partial}{\partial u_i^*}$  où  $a = b^{-1}c$ , de sorte que la  $\mathbf{A}$ -orbite de  $\mathbf{O}$  est un tore  $\mathbf{T}$  de dimension 3 isomorphe au quotient  $\mathbf{A}/\mathbf{B}\mathbf{a}''$  où  $\mathbf{a}''$  est le

réseau de  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$  engendré par  $\exp(aA_1)$ ,  $\exp(aA_2)$  et  $\exp(aA_3)$ . Pour identifier le groupe fondamental de  $\mathbf{T}$  à  $\mathbf{Z}^3$ , on associera à  $(p, q, r) \in \mathbf{Z}^3$  le lacet  $t \rightarrow \Theta(\exp(patA_1^0 + qatA_2^0 + ratA_3^0), \mathbf{O})$  de  $\pi_1(\mathbf{T}, \mathbf{O})$ . Les  $\mathbf{A}_\Pi$ -orbites tracent sur  $\mathbf{T}$  un feuilletage en surfaces  $\mathcal{F}_\Pi^0$  qui, dans les coordonnées naturelles  $(u_1^1, u_2^2, u_3^3)$  sur  $\mathbf{T}$ , est décrit par l'équation de Pfaff  $du_3^3 = \mu du_1^1 + \nu du_2^2$ . Définissons maintenant l'application  $\ell$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{W}$  qui associe à tout point  $p$  la projection sur  $\mathbf{B}/\mathbf{D}$  de son stabilisateur dans  $\mathbf{B}$  pour  $\Phi$ ; prenons pour origine  $\mathbf{O}$  l'image par  $\ell$  du point-base  $p_0$  de  $\mathbf{V}$ ; constatons que  $\ell$  satisfait la condition d'équivariance  $\ell(\Phi(x, p)) = \Theta(x, \ell(p))$  pour tout  $x \in \mathbf{A}_\Pi$  et tout  $p \in \mathbf{V}$ . Il s'ensuit déjà que  $\ell$  est constante le long des  $\Phi(B)$ -orbites, que son image est compacte dans  $\mathbf{T}$  et que le rang de  $\ell$  est constant (car constant le long des  $\Phi$ -orbites, qui sont denses). Ce rang n'est pas deux car l'image de  $\mathbf{a} = \pi_1(\mathbf{V})$  dans  $\pi_1(\mathbf{T})$ , facile à calculer, est  $2\mathbf{Z}^3$ . Il s'ensuit que  $\ell$  se factorise sous la forme  $\nu \circ \ell'$  où  $\nu$  est l'isogénie de  $\mathbf{T}$  obtenue en multipliant par deux et  $\ell'$  une fibration localement triviale de  $\mathbf{V}$  sur  $\mathbf{T}$  dont les fibres sont les  $\Phi(\mathbf{B})$ -orbites. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est ainsi réalisé comme la préimage du feuilletage  $\mathcal{F}_\Pi^0$ . De là découle que tous les  $\mathcal{F}$  possibles sont  $C^\infty$ -conjugués les uns aux autres; on peut d'ailleurs décrire leur construction sans faire référence à  $\Phi$ : ainsi, soit  $\mathcal{G}$  le feuilletage de la variété  $\mathbf{X} = (\mathbf{B}/\mathbf{b}) \times \mathbf{R}^3$  dont les feuilles sont les produits des horizontales  $\mathbf{B}/\mathbf{b}$  par les plans affines dont une équation est du type  $z = \mu x + \nu y + c$ ; soient  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ ; soit  $\sigma_i$  le difféomorphisme de  $\mathbf{X}$  donné par  $\sigma_i(p, \vec{v}) = (\tau_i(p), \vec{v} + \vec{e}_i)$ : les  $\sigma_i$  commutent deux à deux et engendrent un groupe abélien libre  $\mathcal{L}$  de difféomorphismes de  $\mathbf{X}$  qui préserve  $\mathcal{G}$ ; par construction, l'espace feuilleté quotient de  $\mathbf{X}$  par  $\mathcal{L}$  est une variété feuilletée difféomorphe à  $(\mathbf{V}, \mathcal{F})$ .

Passons-en au volume invariant. La forme fermée  $du_3^3 - \mu du_1^1 - \nu du_2^2$  sur  $\mathbf{T}$  peut se tirer en arrière par l'application  $\ell$  définie tout à l'heure pour nous fournir une forme fermée non-singulière  $\omega$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{V}$  et dont le noyau est en tout point l'espace tangent à l'orbite de  $\Phi$  qui y passe. Soit  $\Omega$  un élément de volume sur  $\mathbf{A}_\Pi$  qui soit invariant par translations à droite et à gauche (un tel  $\Omega$  existe car  $\mathbf{A}_\Pi$  est nilpotent; cf. [Ra], I). Nous pouvons pousser en avant la forme invariante à droite  $\Omega$  via la différentielle de  $\Phi$  en un champ  $[\Omega]$  de classe  $C^\infty$  d'éléments de volume feuilletés, et le produit extérieur  $[\Omega] \wedge \omega$  est le volume global invariant par  $\Phi$  souhaité.

Passons-en à la preuve du théorème C. Le théorème B nous permet de supposer que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Pi$ . Rappelons qu'une *1-forme feuilletée* pour  $\mathcal{F}_\Pi$  est une 1-forme différentielle  $\omega$  sur  $\mathbf{V}$  qui n'est définie qu'en restriction au fibré tangent  $T\mathcal{F}_\Pi$  de ce feuilletage. On peut toujours étendre  $\omega$  en une forme  $\alpha$

sur  $\mathbf{V}$  par le choix arbitraire de son évaluation sur un champ transverse à  $\mathcal{F}_\Pi$ ; on montre alors que la restriction à  $T\mathcal{F}_\Pi$  de la différentielle  $d\alpha$  ne dépend que de  $\omega$ ; on appelle cette restriction *differentielle feuilletée* de  $\omega$ . On la notera ici  $d_\Pi\omega$ , et si elle est nulle on dira que  $\omega$  est  $\Pi$ -fermée. S'il existe une application  $f$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{R}$  dont la restriction à  $T\mathcal{F}_\Pi$  de la différentielle vaut  $\omega$ , on dira que  $\omega$  est  $\Pi$ -exacte; on écrira  $\omega = d_\Pi f$ . On renvoie le lecteur à [Hei] ou [MM] pour davantage d'explications. Soit d'autre part l'algèbre de cohomologie ordinaire  $H^*(\mathcal{A}_\Pi, \mathbf{R})$  de l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}_\Pi$ : on sait que  $H^1(\mathcal{A}_\Pi, \mathbf{R})$  s'identifie à l'espace des applications linéaires de  $\mathcal{A}_\Pi$  dans  $\mathbf{R}$  qui sont nulles sur  $\mathcal{C}$ . Nous noterons  $\alpha$  l'élément spécial de  $H^1(\mathcal{A}_\Pi, \mathbf{R})$  qui vaut  $\mu$  sur  $A'_1$ ,  $\nu$  sur  $A'_2$  et s'annule sur  $\mathcal{B}$ ; nous noterons  $\beta$  l'élément spécial de  $H^1(\mathcal{A}_\Pi, \mathbf{R})$  qui vaut 0 sur  $A'_1, A'_2, B_1, B_2$  et est tel que  $\beta(B_3) = 1$ . Soit ensuite  $X \in \mathcal{A}_\Pi$ : par la différentielle de  $\Phi$ , on peut transporter  $X$  en un champ de vecteurs  $X^*$  sur  $\mathbf{V}$  tangent au groupe à un paramètre  $\Phi(X')$  de difféomorphismes de cette variété (un tel champ est dit *champ fondamental* de  $\Phi$ ). L'image  $(X_1^*, \dots, X_{11}^*)$  de toute base de  $\mathcal{A}_\Pi$  par ce procédé fournit un parallélisme sur  $T\mathcal{F}_\Pi$  et si  $Y = \sum_{k=1}^{11} f_k(p)X_k^*$  est une section quelconque de ce fibré, si  $\omega$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{A}_\Pi$ , on peut ensuite associer à  $\omega$  une 1-forme  $\omega^*$  sur  $\mathbf{V}$  en posant  $\omega^*(Y)(p) = \sum_{k=1}^{11} f_k(p)\omega(X_k)$ ; cette application en induit une de  $H^1(\mathcal{A}_\Pi, \mathbf{R})$  dans  $H^1(\mathcal{F}_\Pi, \mathbf{R})$  (celle dont l'hypothèse du théorème C fait mention).

Nommons désormais  $\mathbf{W}$  l'espace homogène des réseaux de  $\mathbf{B}$  qui sont isomorphes à  $\mathbf{b}$  et  $\ell$  l'application qui, au point  $p$  de  $\mathbf{V}$ , associe son stabilisateur dans  $\mathbf{B}$  pour  $\Phi$ : comme nous l'avions fait pour l'ancienne  $\ell$ , nous voyons sans peine que cette nouvelle  $\ell$  est une fibration localement triviale dont les fibres sont cette fois-ci les  $\Phi(\mathbf{D})$ -orbites tandis que la base  $\mathbf{X}$  en est une nilvariété de dimension 9 sur laquelle  $\mathbf{A}$  agit transitivement. Cette action de  $\mathbf{A}$  sur  $\mathbf{X}$  a elle-même des champs fondamentaux: et si  $Y \in \mathcal{A}$ , nous noterons  $Y^\circ$  le champ correspondant. Évidemment, pour  $Y \in \mathcal{A}_\Pi$ , nous avons  $d\ell(Y^*) = Y^\circ$ . Relevons le champ  $A_3^\circ$  en un champ  $A_3$  sur  $\mathbf{V}$  au moyen d'une connexion arbitraire. Les champs  $A_1^\circ, A_2^\circ, A_3^\circ, \dots, E^\circ$  satisfont aux mêmes relations de crochet que leurs antécédents dans  $\mathcal{A}$ , et les trois derniers de la liste ( $D_1^\circ, D_2^\circ$  et  $E^\circ$ ) sont de plus nuls: d'où la formule  $[A_3^\circ, X^\circ] = \beta(X)C_3^\circ$  pour tout  $X$  dans  $\mathcal{A}$ . En relevant ceci à  $\mathbf{V}$ , on conclut qu'il existe des 1-formes feuilletées  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sur  $\mathbf{V}$  telles que

$$[A_3, X^*] = \beta(X)C_3^* + \omega_1(X^*)D_1^* + \omega_2(X^*)D_2^* + \omega_3(X^*)E^*.$$

Écrivons maintenant l'*identité de Jacobi*:

$$[A_3, [X^*, Y^*]] = [[A_3, X^*], Y^*] + [X^*, [A_3, Y^*]]$$

et développons grâce à la formule précédente; nous trouvons tous calculs faits

$$\omega_1([X^*, Y^*]) = L_{X^*}\omega_1(Y^*) - L_{Y^*}\omega_1(X^*) + \alpha(Y)\beta(X) - \alpha(X)\beta(Y)$$

et deux autres équations qui, en termes de différentielle feuilletée, peuvent s'énoncer

$$d_{\Pi}\omega_1 = d_{\Pi}\omega_2 = -\alpha^* \wedge \beta^*, \quad d_{\Pi}\omega_3 = 0.$$

Nous allons nous servir du volume invariant  $\Omega$  dont le théorème B fait mention; nous le normalisons de sorte que  $\int_{\mathbf{V}} \Omega = 1$ . A toute forme feuilletée  $\omega$ , nous pouvons maintenant associer sa *moyenne*  $[\omega] = \int_{\mathbf{V}} \omega(p)d\Omega(p)$  (on voit ici  $\omega$  comme une application de classe  $C^\infty$  à valeurs dans l'algèbre extérieure de  $\mathcal{A}_{\Pi}$ ). Nous noterons  $\{\omega\} = \omega - [\omega]$ . Du fait que  $\int_{\mathbf{V}} \Omega = 1$ , on a  $[[\omega]] = [\omega]$  et  $[\{\omega\}] = 0$ . Remarquons enfin que, de l'invariance de  $\Omega$  par  $\Phi$ , il découle que pour tout  $X \in \mathcal{A}_{\Pi}$  et toute application  $f$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{R}$ , on a  $[L_{X^*}f] = 0$ . En particulier, considérons l'expression sur deux champs fondamentaux de  $\Phi$  de la différentielle feuilletée d'une 1-forme :

$$d_{\Pi}\omega(X^*, Y^*) = \omega([X^*, Y^*]) - L_{X^*}\omega(Y^*) + L_{Y^*}\omega(X^*).$$

En passant à la moyenne, les deux derniers termes de la somme s'annuleront; nous pouvons aussi bien écrire leurs moyennes nulles comme les dérivées de constantes, soit  $L_{X^*}[\omega(Y^*)]$  et  $L_{Y^*}[\omega(X^*)]$ : ce qui nous mène finalement à l'égalité

$$[d_{\Pi}\omega(X^*, Y^*)] = [\omega([X^*, Y^*])] = (d_{\Pi}[\omega])(X^*, Y^*).$$

Ainsi:  $\{d_{\Pi}\omega\} = d_{\Pi}\{\omega\}$ . Ceci nous mène à conclure que  $d_{\Pi}\{\omega_i\} = 0$ . Si l'hypothèse du théorème C est satisfaite, il existera donc pour tout  $i$  une application  $f_i$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $C^\infty$  telle que  $\{\omega_i\} - d_{\Pi}f_i$  soit une forme constante; mais comme sa moyenne est nulle, cette constante est nulle, et  $\{\omega_i\} = d_{\Pi}f_i$ . Posons maintenant  $A_3^* = A_3 + f_1D_1 + f_2D_2 + f_3E$  et  $\omega_i^0 = \omega_i - d_{\Pi}f_i$ . Un calcul direct montre que pour tout  $X \in \mathcal{A}_{\Pi}$ ,

$$[A_3^*, X^*] = \beta(X)C_3 + \omega_1^0(X)D_1 + \omega_2^0(X)D_2 + \omega_3^0(X)E,$$

où les coefficients sont constants. Ainsi, l'espace vectoriel de champs de vecteurs engendré par  $\mathcal{A}_{\Pi}$  et  $A_3^*$  sur  $\mathbf{V}$  est une algèbre de Lie réelle de dimension douze dont on n'a aucun mal à vérifier la nilpotence. Cette algèbre s'intègre en un groupe de Lie nilpotent transitif  $\mathbf{G}$  de difféomorphismes de  $\mathbf{V}$  qui contient un réseau isomorphe à  $\mathbf{a}$  (groupe fondamental de  $\mathbf{V}$ ), donc est isomorphe à  $\mathbf{A}$  par le théorème de Malcev. Les plongements de  $\mathbf{A}_{\Pi}$  dans  $\mathbf{A}$  sont connus et à automorphisme triangulaire près, à composition près par un automorphisme de  $\mathbf{A}_{\Pi}$ , il n'y en a qu'un. Ceci prouve que les actions  $\Phi$  et  $\Phi_{\Pi}$  sont conjuguées.

## APPENDICE

Cette partie de notre travail, destinée à justifier que le théorème D a lieu, ne contient aucune idée vraiment originale. Le résultat que nous avons en vue ne figure certes pas explicitement dans [MM], mais les méthodes employées sont les mêmes. On se placera en fait dans un contexte un peu plus général que celui du théorème D. Soit  $\mathbf{G}$  un groupe de Lie nilpotent; soit  $\Phi$  une action localement libre de  $\mathbf{G}$  sur la variété fermée  $\mathbf{V}$  telle que  $\dim(\mathbf{V}) = \dim(\mathbf{G}) + 1$ ; soit  $\phi^t$  un sous-groupe à un paramètre de  $\mathbf{G}$ . On supposera que  $\phi^t$  est normal dans  $\mathbf{G}$ , inclus dans son sous-groupe dérivé, tel que  $t \rightarrow \Phi(\phi^t)$  soit une action périodique de période 1. Alors les  $\Phi(\phi^t)$ -orbites dans  $\mathbf{V}$  sont les fibres d'une fibration principale  $\pi$  et le groupe  $\mathbf{G}'$  quotient de  $\mathbf{G}$  par  $\phi^t$  agit localement librement sur la base  $\mathbf{V}'$  de celle-ci. Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  les feuilletages de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}'$  par les orbites des groupes  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{G}'$  respectivement: on peut voir  $\mathcal{F}$  comme le tiré en arrière de  $\mathcal{F}'$  par  $\pi$ , d'où un morphisme  $\pi^*$  de  $H^1(\mathcal{F}', \mathbf{R})$  dans  $H^1(\mathcal{F}, \mathbf{R})$  en cohomologie.

**LEMME 15.** *Si  $\Phi$  préserve une forme de volume et si ses orbites sont denses, le morphisme  $\pi^*$  est un isomorphisme.*

*Preuve.* Soit  $\omega$  une 1-forme feuilletée et fermée pour  $\mathcal{F}$ . Soit  $p$  un point de  $\mathbf{V}$  et tisons  $\omega$  en arrière sur le cercle  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  au moyen du paramétrage  $t \rightarrow \Phi(\phi^t, p)$  de la  $\phi^t$ -orbite de  $p$ . Nous obtenons une forme qui peut s'écrire  $g(t)dt$  avec  $g$  une application de période 1 de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . Il est connu qu'il existe une et une seule constante  $c$ , une et une seule application  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , de période 1, telles que  $\int_0^1 f(t)dt = 0$  et  $(g(t) - c)dt = df(t)$ . Cette  $f$  dépend différentiablement de  $p$  et on peut donc la voir comme une application de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{R}$ . Si  $\alpha$  est la forme feuilletée-fermée  $\omega - df$  et  $X$  le champ de vecteurs tangent au flot  $\Phi(\phi^t)$ , par construction,  $\alpha(X)$  sera constante le long des  $X$ -orbites. Ceci étant, en restriction aux feuilles de  $\mathcal{F}$ , les  $X$ -orbites sont homologues les unes aux autres, et  $\omega(X)$  est la période de la forme fermée  $\omega$  sur leur classe: ainsi,  $\omega(X)$  est une intégrale première de  $\mathcal{F}$ ; par densité des feuilles de ce feuilletage,  $\omega(X)$  est donc une constante.

À présent, soit  $\Omega$  le volume invariant par  $\Phi$ . Puisque  $\phi^t$  est dans le groupe dérivé de  $\mathbf{G}$ , il existe dans l'algèbre de Lie de  $\mathbf{G}$  des champs  $X_k, Y_k$  tels que  $X = \sum [X_k, Y_k]$ ; nous avons donc

$$\alpha(X) = \sum \alpha([X_k, Y_k]) = \sum L_{X_k} \alpha(Y_k) - L_{Y_k} \alpha(X_k),$$

la seconde égalité étant due au fait que  $\alpha$  est fermée. Mais en intégrant ces fonctions contre le volume invariant  $\Omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int \alpha(X)\Omega &= \int \left( \sum L_{X_k} \alpha(Y_k) - L_{Y_k} \alpha(X_k) \right) \Omega \\ &= \sum L_{X_k} \left( \int \alpha(Y_k) \Omega \right) - \sum L_{Y_k} \left( \int \alpha(X_k) \Omega \right) = 0, \end{aligned}$$

donc la constante  $\alpha(X)$  est nulle.

Puisque  $d_{\mathcal{F}}\iota_X\alpha = \iota_X d_{\mathcal{F}}\alpha = 0$ , il existe  $\beta$  une forme  $\mathcal{F}'$ -feuilletée fermée telle que  $\alpha = \pi^*\beta$ . Ceci prouve que toute forme  $\mathcal{F}$ -feuilletée fermée est cohomologue à la préimage d'une forme  $\mathcal{F}'$ -feuilletée fermée. Naturellement,  $\omega$  est exacte (égale à  $d_{\mathcal{F}}f$ ) si et seulement si  $\beta$  est exacte (égale à  $d_{\mathcal{F}'}g$ , où  $g(\pi(p)) = \int_0^1 f(\Phi(\phi^t, p))$ ). Cela est clair, vu la construction.  $\square$

Grâce à ce lemme, le calcul de  $H^1(\mathcal{F}_{\Pi}, \mathbf{R})$  se ramène à celui du feuilletage de  $\mathbf{R}^6/\mathbf{Z}^6$  par les hypersurfaces de niveau de la forme de Pfaff  $da_3 - \mu da_1 - \nu da_2$ . Plus généralement, soit  $\Phi$  une action localement libre de  $\mathbf{R}^n$  sur  $\mathbf{R}^{n+1}/\mathbf{Z}^{n+1}$  du type

$$(1) \quad \Phi((a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) = (a_1 + x_1, \dots, a_n + x_n, \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k + x_{n+1}),$$

où les  $\lambda_k$  sont des constantes. Soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage correspondant.

Si une application  $p \rightarrow c_p$  est donnée de  $\mathbf{Z}^{n+1}$  dans le corps des complexes, nous la noterons formellement  $\sum_p c_p \exp(2i\pi\langle p, x \rangle)$  sans attribuer en général un sens à cette façon d'écrire; cependant, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le *produit scalaire* euclidien usuel de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , si pour tout réel  $a$  il existe une constante  $C > 0$  telle que  $c_p \leq C \|p\|^a$  pour tout  $p \in \mathbf{Z}^{n+1} - \{0\}$ , on sait bien que la somme précédente converge vers une application de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^{n+1}/\mathbf{Z}^{n+1}$  dont elle est la série de Fourier. Lorsque nous considérons la "somme" précédente sans nous soucier de sa convergence, nous l'appelons une *série de Fourier formelle*. Il est possible de définir la somme de deux telles séries, leur produit par un scalaire et leur dérivée relativement à un champ de vecteurs constant de manière purement formelle: précisément, pour  $X \in \mathbf{R}^{n+1}$ ,

$$L_X \sum_p c_p \exp(2i\pi\langle p, x \rangle) = 2i\pi \sum_p \langle p, X \rangle c_p \exp(2i\pi\langle p, x \rangle).$$

Nous dirons qu'une série de Fourier (formelle) est *sans terme constant* si  $c_0 = 0$ . De la formule ci-dessus découle immédiatement :

LEMME 16. *Les conditions suivantes sont équivalentes : (a) les coordonnées du champ constant  $X$  sont rationnellement indépendantes, (b) pour toute série de Fourier formelle  $\alpha$  sans terme constant il existe une et une seule série de Fourier formelle  $\beta$  sans terme constant telle que  $L_X\beta = \alpha$ .*

Soit  $\omega$  une forme fermée-feuilletée relativement à  $\mathcal{F}$ . Au champ de vecteurs  $X$  constant et tangent à  $\mathcal{F}$ , associons le terme constant de la série de Fourier de  $\omega(X)$  : ceci définit une application linéaire  $\ell_\omega$  de  $\mathbf{R}^n$  (identifié à l'espace des champs constants tangents à  $\mathcal{F}$ ) dans  $\mathbf{R}$ . Si jamais  $\omega$  est feuilletée-exacte, alors il existe une application  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}^{n+1}/\mathbf{Z}^{n+1}$  telle que  $L_X\alpha = \ell_\omega(X)$  et ceci implique que  $\ell_\omega(X)$  est nul. L'application linéaire  $\ell_\omega$  associée à  $\omega$  est donc une première obstruction à l'exactitude de cette forme ; elle peut être vue comme un élément de  $H^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ . Supposons cette obstruction levée. Supposons également  $\mathcal{F}$  à feuilles denses : on peut alors facilement montrer qu'il existe un champ de vecteurs  $X$  tangent à  $\mathcal{F}$  et ayant des coordonnées rationnellement indépendantes. Résolvons  $L_X\alpha = \omega(X)$  où  $\alpha$  est une série de Fourier formelle. Pour tout champ constant  $Y$  tangent à  $\mathcal{F}$ , écrivons ce qui suit (la première égalité vient de ce que  $X$  commute à  $Y$  et de ce que  $\omega$  est feuilletée-fermée) :

$$L_X\omega(Y) = L_Y\omega(X) = L_YL_X\alpha = L_XL_Y\alpha.$$

En vertu du lemme 16, on a donc  $\omega(Y) = L_Y\alpha$ . Ceci ayant lieu pour tout champ constant  $Y$ , ces champs engendrant le fibré tangent à  $\mathcal{F}$ , on voit que  $\omega$  est la différentielle feuilletée de la série de Fourier formelle  $\alpha$ . Reste à vérifier si  $\alpha$  converge bien vers une fonction de classe  $C^\infty$ .

LEMME 17. *Dans la formule (1), supposons que chacun des  $\lambda_k$  soit nul ou diophantien, l'un au moins étant diophantien : alors  $\alpha$  converge vers une fonction de classe  $C^\infty$ .*

*Preuve.* Pour  $1 \leq k \leq n$ , soit  $X_k$  le champ de vecteurs  $\partial/\partial x_k + \lambda_k \partial/\partial x_{n+1}$ , qui est tangent à  $\mathcal{F}$ . Nous savons que formellement,  $X_k\alpha = \omega(X_k)$ . Posons

$$\alpha = \sum_p c_p \exp(2i\pi \langle p, x \rangle), \quad \omega(X_k) = \sum_p c_p^k \exp(2i\pi \langle p, x \rangle).$$

Nous obtenons par un calcul direct

$$(p_k + \lambda_k p_{n+1})c_p \exp(2i\pi\langle p, x \rangle) = c_p^k \exp(2i\pi\langle p, x \rangle),$$

où  $p$  désigne le multi-entier  $(p_1, \dots, p_{n+1})$ . En particulier, si  $\lambda_k$  est diophantien, il existe des constantes  $C > 0$  et  $\alpha$  telles que pour  $p_k$  et  $p_{n+1}$  non tous deux nuls, on ait

$$|c_p| = |p_k + \lambda_k p_{n+1}|^{-1} |c_p^k| \leq C^{-1} \left( \sum |p_i| \right)^{-\alpha} |c_p^k|,$$

ce qui prouve que la sous-série de Fourier obtenue en supprimant de  $\alpha$  les termes dans l'indice desquels  $p_k$  et  $p_{n+1}$  sont tous deux nuls est convergente de classe  $C^\infty$  car elle reste à décroissance rapide. Si  $\lambda_k$  est nul, le même résultat a lieu en supprimant cette fois-ci tous les termes pour lesquels  $p_k$  est nul. De ces convergences partielles on déduit facilement la convergence globale de  $\alpha$ .  $\square$

L'application de cela au théorème D est directe.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [AA] ANOSOV, D. V. and V. I. ARNOLD (Eds.). *Dynamical Systems I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 1. Springer-Verlag, 1988.
- [Be] BELLIART, M. Actions localement libres rigides de groupes de Lie nilpotents. Pub. IRMA, Lille 69, no. IV, 2009.
- [GHM] GHYS, É., G. HECTOR and Y. MORIYAMA. On codimension one nilfoliations and a theorem of Malcev. *Topology* 28 (1989), 197–210.
- [Go] GODBILLON, C. Feuilletages. Études géométriques. With a preface by G. Reeb. Progress in Mathematics 98. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [Hei] HEITSCH, J. L. A cohomology for foliated manifolds. *Comment. Math. Helv.* 50 (1975), 197–218.
- [Hel] HELGASON, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Pure and Applied Mathematics 80. Academic Press, Inc., Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York-London, 1978.
- [MM] MATSUMOTO, S. and Y. MITSUMATSU. Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 23 (2003), 1839–1866.

- [Ra] RAGHUNATHAN, M. S. *Discrete Subgroups of Lie Groups*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 68. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

(*Reçu le 4 mars 2010*)

Michel Belliart  
Université Lille 1  
UFR de Mathématiques  
Bâtiment M2 – Cité scientifique  
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex  
France  
*e-mail* : Michel.Belliart@math.univ-lille1.fr