**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 55 (2009)
**Heft:** 1-2

**Artikel:** Finiteness and constructibility in local analytic geometry
**Autor:** Garay, Mauricio D.
**Bibliographie**
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-110093

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Denote by $\mathcal{E}(0)$ the sheaf of analytic pseudo-differential operators in $T^*\mathbf{C}^n \approx \mathbf{C}^{2n} = \{(q,p)\}$ of order $0$. Let $\mathcal{E}'(0)$ be a subsheaf of operators which depend only on some of the variables, say $q_1, \dots, q_j, p_1, \dots, p_k$. We denote by $\mathcal{E}_0(0)$, $\mathcal{E}'_0(0)$ the stalks of the sheaves $\mathcal{E}(0)$, $\mathcal{E}'(0)$ at the point $x_0 \in \mathbf{C}^{2n}$ with coordinates $q_1 = \cdots = q_n = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0, \dots, p_n = 0$.

THEOREM 6.8 ([3, 33]). *For any coherent left $\mathcal{E}_0(0)$-module $M$ the following assertions are equivalent:*

1. *the $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{j+k-1},0}$-module $M/\partial_{q_1}^{-1}M$ is of finite type;*
2. *the $\mathcal{E}'_0(0)$-left module $M$ is of finite type.*

*Proof.* The module $M$ is the stalk at the point $x_0 = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ of a sheaf $\mathcal{M}$ of $\mathcal{E}_0(0)$-modules in $T^*\mathbf{C}^n \approx \mathbf{C}^{2n}$.

Consider the complex given by a resolution of $\mathcal{M}$

$$\mathcal{K}^\bullet : \cdots \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{E}(0)^{n_1} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{E}(0)^{n_0} \longrightarrow 0\,, \quad \mathcal{H}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet) = \mathcal{E}(0)^{n_0}/\mathrm{Im}\,\delta_1 \approx \mathcal{M}\,.$$

The support of $\mathcal{M}$ coincides with that of $\mathcal{M}/\partial_{q_1}^{-1}\mathcal{M}$, it is therefore an analytic subvariety $V \subset \mathbf{C}^{2n}$ ([35]; see also [33], Proposition 4.2.0).

The restriction of the sheaf $\mathcal{E}(0)$ to the complement of the zero section in $T^*\mathbf{C}^n \approx \mathbf{C}^{2n}$ is a sheaf of non-commutative Fréchet algebras [4]. Therefore the argument given in the proof of Proposition 6.7 applies *mutatis mutandis* to this situation. □

ACKNOWLEDGEMENTS. The author is grateful to G. Comte, P. Schapira and B. Teissier for useful discussions. Special thanks to B. Malgrange for criticism on an earlier version of the text and to D. van Straten for valuable suggestions on the writing of the text. Finally, the author thanks the referee and A. Gabard for helpful comments.

## REFERENCES

[1] BARLET, D. and M. SAITO. Brieskorn modules and Gauss-Manin systems for non-isolated hypersurfaces singularities. *J. London Math. Soc. (2) 76* (2007), 211–224.

[2] BOURBAKI, N. *Espaces vectoriels topologiques*. Hermann, Paris, 1966.

[3] BOUTET DE MONVEL, L. Opérateurs pseudo-différentiels analytiques. Séminaire opérateurs différentiels et pseudo-différentiels, Grenoble.

[4] BOUTET DE MONVEL, L. and P. KRÉE. Pseudo differential operators and Gevrey classes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 17* (1967), 295–323.

[5] BRIESKORN, E. Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. *Manuscripta Math. 2* (1970), 103–161.

[6] BUCHWEITZ, R. O. and G. M. GREUEL. The Milnor number and deformations of complex curve singularities. *Invent. Math. 58* (1980), 241–281.

[7] CARTAN, H. et J.-P. SERRE. Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris 237* (1953), 128–130.

[8] DIEUDONNÉ, J. et L. SCHWARTZ. La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 1* (1949), 61–101.

[9] DOUADY, A. Le théorème des images directes de Grauert (d'après Kiehl-Verdier). Astérisque *16*, 49–62, 1974.

[10] DOUADY, R. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Astérisque *16*, 1–25, 1974.

[11] FICHTENHOLZ, G. Sur les fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 4* (1938), 193–214.

[12] FORSTER, O. und K. KNORR. Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange. *Manuscripta Math. 5* (1971), 19–44.

[13] GIBSON, C. G., K. WIRTHMÜLLER, A. A. DU PLESSIS and E. J. N. LOOIJENGA. *Topological Stability of Smooth Mappings*. Lecture Notes in Mathematics *552*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[14] GRAUERT, H. Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 5* (1960), 233–292.

[15] GREUEL, G.-M. Der Gauss-Manin Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. *Math. Ann. 214* (1975), 235–266.

[16] GROTHENDIECK, A. Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 4* (1952), 73–112.

[17] —— Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Mem. Amer. Math. Soc. 16* (1955).

[18] —— On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 29* (1966), 95–103.

[19] —— *Topological Vector Spaces*. Gordon and Breach, 1973. English translation of: *Espaces vectoriels topologiques*. São Paulo, 1954.

[20] HOUZEL, C. Géométrie analytique locale, I. *Séminaire Henri Cartan*, 13 no. 2, Exposé No. 18, 1960–1961.

[21] —— Espaces analytiques relatifs et théorème de finitude. *Math. Ann. 205* (1973), 13–54.

[22] HOUZEL, C. et P. SCHAPIRA. Images directes de modules différentiels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 298* (1984), 461–464.

[23] HUBBARD, J. Transversalité. Astérisque *16*, 33–48, 1974.

[24] KIEHL, R. und J.-L. VERDIER. Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert. *Math. Ann. 195* (1971), 24–50.

[25] KÖTHE, G. Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume. *Math. Z. 52* (1950), 627–630.

[26] —— Über zwei Sätze von Banach. *Math. Z. 53* (1950), 203–209.

[27] LÊ, D. T. Some remarks on relative monodromy. In: *Real and Complex Singularities, Oslo 1976* (P. Holm, ed.), 397–404. Sijthoff and Noordhoff, 1977.

[28] LEVY, R. A new proof of the Grauert direct image theorem. *Proc. Amer. Math. Soc. 99* (1987), 535–542.

[29] ŁOJASIEWICZ, S. Stratification des ensembles analytiques avec les propriétés (A) et (B) de Whitney. In: *Fonctions analytiques de plusieurs variables et analyse complexe* (Colloq. Internat. C.N.R.S. No. 208, Paris, 1972), vol. 1, 116–130. Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[30] MACKEY, G. W. On infinite dimensional linear spaces. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 29* (1943), 216–221.

[31] MALGRANGE, B. Intégrales asymptotiques et monodromie. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7* (1974), 405–430.

[32] MATHER, J. N. Notes on topological stability. Harvard University, 1970. (Unpublished notes: available at http://www.math.princeton.edu/facultypapers/mather/notes_on_topological_stability.pdf)

[33] PHAM, F. *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin.* Progress in Mathematics 2. Birkhäuser Verlag, 1979.

[34] SAITO, M. Gauss-Manin connection for non-isolated hypersurface singularities. Master's thesis, Univ. Tokyo, 1980.

[35] SATO, M., M. KASHIWARA and T. KAWAI *Microfunctions and Pseudodifferential Equations, Hyperfunctions and Pseudodifferential Equation.* Lecture Notes in Mathematics *287.* Springer-Verlag, 1971.

[36] SCHNEIDERS, J.-P. A coherence criterion for Fréchet modules. Astérisque *224*, 99–113, 1994.

[37] SCHWARTZ, L. Homomorphismes et applications complètement continues. *C. R. Acad. Sci. Paris 236* (1953), 2472–2473.

[38] SEBASTIANI, M. Preuve d'une conjecture de Brieskorn. *Manuscripta Math. 2* (1970), 301–308.

[39] SERRE, J.-P. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2) 61* (1955), 197–278.

[40] VAN STRATEN, D. On the Betti numbers of the Milnor fibre of a certain class of hypersurfaces singularities. In: *Singularities, Representation of Algebras and Vector Bundles* (G.-M. Greuel and G. Trautmann, eds.), 203–220. Lecture Notes in Mathematics *1273.* Springer-Verlag, 1987.

[41] TEISSIER, B. Variétés polaires II. In: *Algebraic Geometry Proc. La Mábida,* 314–495. Lecture Notes in Mathematics *961.* Springer-Verlag, 1981.

[42] THOM, R. Ensembles et morphismes stratifiés. *Bull. Amer. Math. Soc. 75* (1969), 240–284.

[43] WHITNEY, H. Tangents to an analytic variety. *Ann. of Math. (2) 81* (1964), 496–549.

*(Reçu le 11 juin 2007; version révisée reçue le 15 décembre 2008)*

Mauricio D. Garay

2A, avenue Edouard-Herriot
F-91440 Bures-sur-Yvette
France