Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 55 (2009)
Heft: 1-2

Artikel: Ternary cubic forms and étale algebras
Autor: Raczek, Mélanie / Tignol, Jean-Pierre

Bibliographie

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110099>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

When the conditions in Corollary 4.1 do not hold, we may still consider the 4-dimensional étale F -algebra $T(f)$ such that $\mathfrak{X}(T(f)) = \mathfrak{T}(f)$, and the 12-dimensional étale F -algebra $L(f)$ such that $\mathfrak{X}(L(f)) = \mathfrak{L}(f)$, which is a cubic étale extension of $T(f)$. The separability idempotent $e \in T(f) \otimes_F T(f)$ satisfies $e \cdot (T(f) \otimes T(f)) \simeq T(f)$, and hence yields a decomposition

$$T(f) \otimes_F T(f) \simeq T(f) \times T(f)_0$$

for some cubic algebra $T(f)_0$ over $T(f)$. Likewise, multiplication in $L(f)$ yields an isomorphism

$$e \cdot (L(f) \otimes T(f)) \simeq L(f);$$

hence

$$L(f) \otimes_F T(f) \simeq L(f) \times L(f)_0$$

for some cubic algebra $L(f)_0$ over $T(f)_0$. By functoriality of the construction of L and T , the cubic form $f_{T(f)}$ over $V \otimes_F T(f)$ obtained from f by scalar extension to $T(f)$ satisfies

$$L(f_{T(f)}) \simeq L(f) \otimes_F T(f) \quad \text{and} \quad T(f_{T(f)}) \simeq T(f) \otimes_F T(f).$$

Corollary 4.1 applied to $f_{T(f)}$ shows that $f_{T(f)}$ is isometric to

$$\top_{L(f)}(a^{-1}X^3) - 3\lambda N_{L(f)}(X)$$

for some $\lambda \in T(f)^\times$ and some $a \in L(f)^\times$ such that $L(f)_0$ is a Morley $T(f)$ -algebra $L(f)_0 \simeq M(L(f), a)$.

REFERENCES

- [1] BOURBAKI, N. *Algèbre. Chapitres 4 à 7*. Masson, Paris, 1981.
- [2] BRETAGNOLLE-NATHAN, J. Cubiques définies sur un corps de caractéristique quelconque. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (4)* 22 (1958), 175–234.
- [3] BRIESKORN, E. and H. KNÖRRER. *Plane Algebraic Curves*. Translated from the German by J. Stillwell. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1986.
- [4] BROWN, K. S. *Cohomology of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 87. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.
- [5] HESSE, O. Über die Elimination der Variablen aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variablen. *J. Reine Angew. Math.* 28 (1844), 68–96.
- [6] — Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9ten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, daß eine gegebene rationale und symmetrische Function $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel x_κ giebt, so daß gleichzeitig: $x_\kappa = \theta(x_\lambda, x_\mu)$, $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\kappa)$, $x_\mu = \theta(x_\kappa, x_\lambda)$. *J. Reine Angew. Math.* 34 (1847), 193–208.

- [7] HIRSCHFELD, J. W. P. *Projective Geometries over Finite Fields*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
- [8] KNUS, M.-A., A. S. MERKURJEV, M. ROST and J.-P. TIGNOL. *The Book of Involutions*. American Mathematical Society Colloquium Publications 44. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [9] KNUS, M.-A. and J.-P. TIGNOL. Quartic exercises. *Int. J. Math. Math. Sci.* 68 (2003), 4263–4323.
- [10] ROST, M. Notes on Morley’s theorem. Private notes dated July 22, 2003.
- [11] WEBER, H. *Lehrbuch der Algebra, Bd. II*. F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1899.

(Reçu le 8 juin 2008)

Mélanie Raczek
Jean-Pierre Tignol

Département de Mathématique
Université Catholique de Louvain
Chemin du Cyclotron 2
B-1348 Louvain-la-Neuve
Belgique
e-mail: melanie.raczek@uclouvain.be
e-mail: jean-pierre.tignol@uclouvain.be