

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 54 (2008)  
**Heft:** 1-2

**Artikel:** K0 and the passage from integral to rational coefficients  
**Autor:** Reich, Holger  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109923>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 54

### $K_0$ AND THE PASSAGE FROM INTEGRAL TO RATIONAL COEFFICIENTS

by Holger REICH

We are outlining the following conjecture, already stated in [2].

CONJECTURE 54.1. *For every group  $G$  the map  $\tilde{K}_0(\mathbf{Z}G) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbf{Q}G)$  induced from the natural inclusion  $\mathbf{Z}G \rightarrow \mathbf{Q}G$  is the zero-map.*

Here for a ring  $R$  we denote by  $\tilde{K}_0(R)$  the *reduced projective class group*, i.e. the cokernel of the map  $K_0(\mathbf{Z}) \rightarrow K_0(R)$  induced from the natural map  $\mathbf{Z} \rightarrow R$ . Hence the conjecture says that for every finitely generated projective  $\mathbf{Z}G$ -module  $P$  the module  $P \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  is a stably free  $\mathbf{Q}G$ -module.

Swan proved the conjecture in the case where  $G$  is a finite group (see [3], Theorem 8.1). I think that somehow the conjecture above should be implied by the  $K$ -theoretic Farrell–Jones Conjecture, which is discussed in the contribution by Wolfgang Lück. Indeed if  $G$  is torsion-free the Farrell–Jones Conjecture predicts that  $\tilde{K}_0(\mathbf{Z}G) = 0$  and hence in that case the conjecture above is clearly implied by the Farrell–Jones Conjecture. But in the general case I do not know how to derive it from the Farrell–Jones Conjecture. One can however show that the Farrell–Jones Conjecture implies that the map

$$\tilde{K}_0(\mathbf{Z}G) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbf{Q}G) \otimes \mathbf{Q}$$

is the zero-map, see [2], Proposition 3.11 (iii), for a more precise statement and a proof.

Further evidence for the conjecture above is given by the following fact, which is true for all groups. If we compose the map in the conjecture above with the map induced from the inclusion of  $\mathbf{Q}G$  into the group von Neumann algebra  $\mathcal{N}G$  then the resulting composition

$$\tilde{K}_0(\mathbf{Z}G) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbf{Q}G) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathcal{N}G),$$

is the zero-map. This is proven in [1], Theorem 9.62.

## REFERENCES

- [1] LÜCK, W. *L<sup>2</sup>-Invariants : Theory and Applications to Geometry and K-Theory*.  
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 44 (3. Folge).  
Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] LÜCK, W. and H. REICH. The Baum–Connes and the Farrell–Jones conjectures  
in *K*- and *L*-theory. In: *Handbook of K-theory*. Vol. 1, 2, 703–842.  
Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [3] SWAN, R.G. Induced representations and projective modules. *Ann. of Math.*  
(2) 71 (1960), 552–578.

Holger Reich

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Mathematisches Institut  
Universitätsstr. 1  
D-40225 Düsseldorf  
Germany  
*e-mail*: reich@math.uni-duesseldorf.de