

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 53 (2007)  
**Heft:** 3-4

**Artikel:** Applications harmoniques et hyperbolicité de domaines tubes  
**Autor:** Loeb, Jean-Jacques

### **Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109551>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Preuve.* On suppose d'abord  $X$  hyperbolique. Pour  $a$  dans  $X$  on choisit une boule fermée  $B$  pour la métrique de Kobayashi centrée en  $a$  et de rayon  $2r > 0$  choisi assez petit pour que cette boule soit compacte. (Ceci est possible car la métrique de Kobayashi induit la topologie [10].) On peut alors choisir pour  $V$  la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  pour la métrique de Kobayashi. En effet d'après la propriété de contraction de la métrique de Kobayashi, il existe  $r' > 0$  tel que pour toute application holomorphe  $f: D_1 \rightarrow X$  vérifiant  $f(0) \in V$ , on ait:  $f(D_{r'}) \subset B$ . Comme  $B$  est compact, un argument de normalité permet de montrer l'existence de  $M$ .

La réciproque est plus difficile. On suppose la propriété  $(P)$  vérifiée pour  $X$ . En chaque point  $p$ , on définit l'indicatrice  $K_p$  de Kobayashi comme étant le sous-ensemble de l'espace tangent  $T_p$  formé des éléments  $rf'(0)$  avec  $0 < r < 1$  avec  $f$  application holomorphe de  $D_1$  dans  $X$  vérifiant  $f(0) = p$ . A cette indicatrice, on associe de manière classique une jauge  $j_p$  définie sur  $T_p$  par:  $j_p(v) = \inf\{t > 0 \mid v/t \in K_p\}$ . La propriété  $(P)$  signifie alors simplement que pour tout point  $a$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et  $c > 0$  tel que pour tout  $p \in V$  et  $x \in T_p$ , on a:  $j_p(x) \geq c|x|$ . On conclut en utilisant le fait que la métrique de Kobayashi est la métrique intégrée par rapport aux  $j_p$  (voir [10] pour une preuve de ce théorème assez difficile).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AXLER, S., P. BOURDON and W. RAMEY. *Harmonic Function Theory*. Graduate Texts in Mathematics 137. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [2] BARTH, T. J. Convex domains and Kobayashi hyperbolicity. *Proc. Amer. Math. Soc.* 79 (1980), 556–558.
- [3] BERTELOOT, F. et J. DUVAL. Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires. *L'Enseignement Math.* (2) 47 (2001), 253–267.
- [4] BRODY, R. Compact manifolds and hyperbolicity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 235 (1978), 213–219.
- [5] CHEN H., P. M. GAUTHIER and W. HENGARTNER. Bloch constants for planar harmonic mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), 3231–3240.
- [6] COEURÉ, G. et J.-J. LOEB. Le théorème des tubes de Bochner pour les groupes de Lie. *Représentation des groupes et analyse complexe*, Luminy, 1986.
- [7] GROMOV, M. Foliated Plateau problem, part II: harmonic maps of foliations. *Geom. Funct. Anal.* 1 (1991), 253–320.
- [8] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Several Complex Variables*. North Holland/American Elsevier, 1973.
- [9] ———. *The Analysis of Linear Partial Differential Equations I*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256. Springer-Verlag, New York, 1983.

- [10] KOBAYASHI, S. *Hyperbolic Complex Spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 318. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [11] MINDA, D. Another approach to Picard's theorem and a unifying principle in geometric function theory. In: *Current Topics in Analytic Function Theory*, 186–200. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.
- [12] SCHIFF, J. L. *Normal Families*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [13] ZALCMAN, L. Normal families: new perspectives. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* 35 (1998), 215–230.

(Reçu le 14 juillet 2006; version révisée reçue le 31 mai 2007)

Jean-Jacques Loeb

Département de Mathématiques  
Université d'Angers  
2, Boulevard Lavoisier  
49045 Angers cedex 01  
France *e-mail*: Jean-Jacques.Loeb@univ-angers.fr