

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 53 (2007)
Heft: 1-2

Artikel: Remarques sur les valeurs moyennes de fonctions multiplicatives
Autor: Tenenbaum, Gérald

Bibliographie

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-109543>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$P(a^2) = a, \quad P(b^2) = b, \quad P(4) = 2, \quad 2aP'(a^2) = 2bP'(b^2) = 1.$$

Un examen de la concavité permet d'établir aisément que l'on a

$$(4.2) \quad y \leq P(y^2) \quad (0 \leq y \leq 2).$$

Par intégration sur $[0, 2]$, nous obtenons, pour toute mesure μ ,

$$\sigma_1 \leq \sum_{0 \leq j \leq 4} \lambda_j s_{2j} = \alpha a + \beta b + 2\gamma = 1 - s,$$

où l'égalité découle du fait que la relation $P(y^2) = y$ a lieu $d\mu^*$ -presque partout.

Cette estimation implique bien (4.1) puisque le membre de gauche est égal au premier moment de $d\mu^*$. La majoration (1.6) est, quant à elle, obtenue en intégrant (4.2) relativement à la mesure de répartition logarithmique normalisée des $\tau_0(p)$ ($p \leq x$) sur $[0, 2]$ et en exploitant les estimations de [11] sous la forme

$$\sum_{p \leq x} \frac{\tau_0(p)^{2k}}{p} = s_{2k} \log_2 x + O(1) \quad (0 \leq k \leq 4, x \rightarrow \infty).$$

Le fait que de telles formules asymptotiques résultent de la seule connaissance de l'ordre du pôle des séries de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} \tau_0(n)^{2k}/n^s$ en $s = 1$ peut, par exemple, être établi en faisant appel au lemme 2.4. Nous omettons les détails.

REMERCIEMENTS. L'auteur tient à exprimer sa gratitude envers Jean-Pierre Ferrier, Guillaume Hanrot, Anne de Roton, Patrick Sargos, Mark Watkins et Jie Wu pour leur aide lors de la préparation de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DELIGNE, P. La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 43 (1974), 273–307.
- [2] DABOUSSI, H. and H. DELANGE. On a theorem of P. D. T. A. Elliott on multiplicative functions. *J. London Math. Soc. (2)* 14 (1976), 345–356.
- [3] ELLIOTT, P. D. T. A. A mean-value theorem for multiplicative functions. *Proc. London Math. Soc. (3)* 31 (1975), 418–438.
- [4] — Mean value theorems for multiplicative functions bounded in mean α -power, $\alpha > 1$. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 29 (1980), 177–205.
- [5] — Multiplicative functions and Ramanujan's τ -function. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 30 (1980/81), 461–468.
- [6] — *Duality in Analytic Number Theory*. Cambridge Tracts in Mathematics 122, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- [7] ELLIOTT, P. D. T. A., C. J. MORENO and F. SHAHIDI. On the absolute value of Ramanujan's τ -function. *Math. Ann.* 266 (1984), 507–511.
- [8] HALBERSTAM, H. and H.-E. RICHERT. On a result of R. R. Hall. *J. Number Theory* 11 (1979), 76–89.
- [9] HALL, R. R. and G. TENENBAUM. Effective mean value estimates for complex multiplicative functions. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 110 (1991), 337–351.
- [10] HILDEBRAND, A. On Wirsing's mean value theorem for multiplicative functions. *Bull. London Math. Soc.* 18 (1986), 147–152.
- [11] KIM, H. H. and F. SHAHIDI. Cuspidality of symmetric powers with applications. *Duke Math. J.* 112 (2002), 177–197.
- [12] LEVIN, B. V., N. M. TIMOFEEV and S. T. TULJAGANOV. Distribution of the values of multiplicative functions (en russe). *Litovsk. Mat. Sb.* 13 (1973), 87–100, 232.
- [13] MAUCLAIRE, J.-L. On some arithmetical functions. *Functiones et Approximatio* 35 (2006), 219–233.
- [14] MORENO, C. J. and F. SHAHIDI. The fourth moment of Ramanujan τ -function. *Math. Ann.* 266 (1983), 233–239.
- [15] RANKIN, R. A. Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)/n^s$ on the line $\Re s = 13/2$. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 35 (1939), 351–372.
- [16] — Sums of powers of cusp form coefficients. II. *Math. Ann.* 272 (1985), 593–600.
- [17] TENENBAUM, G. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Cours spécialisés, 1. Société Mathématique de France (1995).
- [18] — (en collaboration avec Jie WU). *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*. Cours spécialisés, 2. Société Mathématique de France (1996).

(Reçu le 22 février 2007; version révisée reçue le 18 juin 2007)

Gérald Tenenbaum

Institut Élie Cartan
 Université Henri-Poincaré Nancy 1
 BP 239
 F-54506 Vandœuvre Cedex
 France
e-mail: gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr