

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 53 (2007)  
**Heft:** 1-2

**Artikel:** Liouville's theorem revisited

**Autor:** Tojeiro, Ruy

### **Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-109539>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

by  $I$  of elements of  $\mathcal{F}_1$  is a family of concentric circles, since it has  $T(W_1)$  as associated subspace. It follows that  $I(\mathcal{F}_2)$  is a family of straight lines through the common center of the circles of  $\mathcal{F}_1$ .  $\square$

### 5.3 A FINAL REMARK ON THE CASE $n = 2$ .

To conclude, we observe that if a conformal map  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^2$  as in Theorem 2 has the property that every segment of straight line contained in  $U$  is mapped by  $f$  to a piece of circle or straight line, then it is given as in the statement of Liouville's theorem. For, by the discussion in the previous section, under this assumption Lemma 6 holds for  $F = \mathcal{I}_{p_0, w, A}(f): U \rightarrow \mathbf{V}^3 \subset \mathbf{L}^4$ , and hence the remaining part of the proof of Theorem 5 also applies.

## REFERENCES

- [Be] BERGER, M. *Geometry I*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [Bl] BAIR, D. *Inversion Theory and Conformal Mapping*. Student Math. Library, AMS, 2000.
- [Da] DARBOUX, G. *Leçons sur la théorie des surfaces*. (Reprinted by Chelsea Pub. Co., 1972), Paris, 1914.
- [dC] DO CARMO, M. P. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [DFN] DUBROVIN, B. A., A. T. FOMENKO and S. P. NOVIKOV. *Modern Geometry, Methods and Applications*. Part I, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Fr] FRANCES, C. Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique. *L'Enseignement Math. (2)* 49 (2003), 95–100.
- [Ha] HARTMAN, P. On isometries and on a theorem of Liouville. *Math. Z.* 69 (1958), 202–210.
- [H-J] HERTICH-JEROMIN, U. *Introduction to Möbius Differential Geometry*. London Math. Soc. Lect. Note Series 300. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [Ja] JACOBOWITZ, H. Two notes on conformal geometry. *Hokkaido Math. J.* 20 (1991), 313–329.
- [Ku] KULKARNI, R. Conformal structures and Möbius structures. *Aspects of Math. E 12*, Vieweg, Braunschweig, 1988.
- [Li] LIOUVILLE, J. Extension au cas de trois dimensions de la question du tracé géographique. Note VI in the Appendix to G. Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, 5th ed. Bachelier, Paris, 1850, 609–616.
- [Ma] MATSUMOTO, S. Foundations of flat conformal structure. In: *Aspects of Low-Dimensional Manifolds*, 167–261. Adv. Stud. Pure Math. 20, Tokyo, 1992.
- [Ne] NEVANLINNA, R. On differential mappings. In: *Analytic Functions*. Princeton University Press, Princeton, 1973.

- [Sp] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 2nd ed. Publish or Perish, Wilmington, 1979.
- [To<sub>1</sub>] TOJEIRO, R. Isothermic submanifolds of Euclidean space. *J. reine angew. Math.* 598 (2006), 1–24.
- [To<sub>2</sub>] ——— Conformal immersions of warped products. (Preprint).

*(Reçu le 17 octobre 2005; version révisée reçue le 18 octobre 2006)*

Ruy Tojeiro

Universidade Federal de São Carlos  
Via Washington Luiz km 235  
13565-905 São Carlos  
Brazil  
*e-mail*: tojeiro@dm.ufscar.br