

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 52 (2006)  
**Heft:** 1-2: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Sur les surfaces non-compactes de rang un  
**Autor:** Link, Gabriele / Peigné, Marc / Picaud, Jean-Claude  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2225>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## SUR LES SURFACES NON-COMPACTES DE RANG UN

par Gabriele LINK, Marc PEIGNÉ et Jean-Claude PICAUD

**ABSTRACT.** We consider in this paper a complete noncompact riemannian surface  $S$  of finite type, with nonpositive curvature. Ends of such surfaces were studied in 1979 by P. Eberlein, from topological and metrical viewpoints. We first prove that the two classifications of ends arising in his work are equivalent, as he conjectured. Then, we explain how it is possible to define the Gromov product of two points in the limit set of the fundamental group of  $S$ ; the continuity property of this Gromov product and the conformal action of isometries on the limit set with respect to the Gromov product allow us to investigate topological-dynamic properties of the geodesic flow and of the horocycle foliation on  $S$ .

Soit  $S$  une surface non-compacte de type fini, i.e.  $\Gamma = \pi_1(S)$  est libre non abélien et engendré par un nombre fini d'éléments. On munit  $S$  d'une métrique riemannienne  $g$  complète, de courbure  $K$  négative ou nulle et non identiquement nulle. La surface  $(S, g)$  est alors de *rang un*, c'est-à-dire qu'il existe une géodésique sur  $S$  n'admettant pas de champ de Jacobi parallèle perpendiculaire. L'objet de ce travail est d'amorcer une étude géométrique et dynamique des flots géodésique et horocyclique de telles surfaces. Nous nous concentrons ici sur la dynamique topologique du flot géodésique et du feuilletage horocyclique, en soulignant les propriétés nouvelles qui résultent de l'absence de compacité. Le cas compact de rang un, sans restriction sur la dimension, est étudié (de différents points de vue) dans [3], [12], [13].

On note  $X$  le revêtement universel riemannien de  $S$  sur lequel  $\Gamma$  agit par isométries pour la distance  $d$  induite par le relèvement de la métrique  $g$ . Cette action se prolonge en une action par homéomorphismes respectant l'orientation sur le bord à l'infini  $X(\infty)$  de  $X$ . Soit  $\gamma \in \Gamma$ ; le *déplacement* de  $\gamma$  est la quantité positive ou nulle :

$$d_\gamma := \inf_{x \in X} d(x, \gamma \cdot x).$$

Lorsque la courbure est négative pincée :  $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$ , il est bien connu que le déplacement d'un élément hyperbolique est la longueur de

la géodésique périodique sur  $S$  associée à sa classe de conjugaison et que le déplacement d'un élément parabolique est nul. Lorsque la courbure est seulement négative ou nulle, certains éléments paraboliques peuvent avoir un déplacement strictement positif et jouer un rôle intermédiaire entre les éléments hyperboliques et les éléments paraboliques classiques. Le déplacement d'un tel élément parabolique (exceptionnel dans la terminologie qui suit) peut alors être considéré comme une longueur de *géodésique à l'infini* associée à la classe de conjugaison de cet élément parabolique (voir section 3.1).

On dira que  $\Gamma$  est à *spectre arithmétique* si le groupe engendré par les déplacements des éléments de  $\Gamma$  est discret dans  $\mathbf{R}$  et à *spectre non-arithmétique* dans le cas contraire. On note  $\mathcal{R}$  la partie récurrente du flot géodésique  $(g_t)_{t \in \mathbf{R}}$  sur le fibré unitaire  $T_1S$  et on rappelle que ce flot est *topologiquement mélangeant* si pour tous ouverts  $U, V \subset \mathcal{R}$ , il existe  $t_0 = t_0(U, V) > 0$  tel que pour tout  $t \in \mathbf{R}$  vérifiant  $|t| \geq t_0$ , on a  $g_t U \cap V \neq \emptyset$ . D'autre part, à chaque point du fibré unitaire  $u \in T_1X$ , on peut associer une horosphère passant par le point base de  $u$  et centrée au point  $u(\infty) \in X(\infty)$  déterminé par  $u$ . Ceci permet de définir une relation d'équivalence sur le sous-ensemble  $\Gamma$ -invariant  $\{u \in T_1X ; u(\infty) \in \Lambda_\Gamma\}$  où  $\Lambda_\Gamma$  est l'ensemble limite de  $\Gamma$ . La projection des classes d'équivalence correspondantes sur le fibré unitaire  $T_1S$  est appelée *restriction à  $\mathcal{R}$  du feuilletage fortement stable* et on note  $\mathcal{F}_+$  cet ensemble. On dit que  $\mathcal{F}_+$  est *topologiquement transitif* s'il admet une feuille dense.

Le principal résultat de cette note est une généralisation du Théorème A de [7] et de la Proposition 2.1 de [8] que l'auteur établit dans le cadre des espaces  $Cat(-1)$ . La formulation de ce résultat, dans notre cadre, est la suivante :

**THÉORÈME A.** *Soit  $S$  une surface non-compacte, de type fini, qui n'est pas homéomorphe à un cylindre, et qui est munie d'une métrique riemannienne de courbure négative ou nulle. Alors :*

- i)  $\Gamma = \pi_1(S)$  est à *spectre non-arithmétique*,
- ii) le feuilletage  $\mathcal{F}_+$  est *topologiquement transitif*,
- iii) le flot géodésique en restriction à  $\Omega$  est *topologiquement mélangeant*.

La non arithméticité ressort d'un argument de nature purement topologique et se démontre comme dans [8], sans modification. La démonstration consiste par conséquent à établir l'*équivalence* des trois propriétés comme dans [7], résultat qui présente un intérêt en soi. La difficulté est de montrer que les

arguments cruciaux pour prouver l'équivalence sont encore valables dans notre contexte :

Le premier de ces arguments est la minimalité de l'action de  $\Gamma$  sur son ensemble limite, et son corollaire, la densité des orbites périodiques dans la partie récurrente du flot géodésique. A notre connaissance, ces points n'avaient été démontrés que sous l'hypothèse Axiome 1 (i.e. lorsque les couples distincts de points de  $X(\infty)$  peuvent être joints par au moins une géodésique).

Le second argument est l'existence d'un birapport continu, qui permet de lire le spectre des longueurs au travers l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma$ . La construction est tautologique lorsque l'on a prouvé le :

**THÉORÈME B.** *Le produit de Gromov sur  $X \times X$  se prolonge en une application continue sur  $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ .*

Notons que, dans notre cas, le produit de Gromov ne permet pas de construire, comme dans [5], une structure conforme sur  $\Lambda_\Gamma$ , c'est-à-dire une famille de distances (indexée par  $X$ ) avec une action conforme des isométries. La propriété de cocycle satisfaite par les fonctions de Busemann permet toutefois de «mimer» cette action conforme.

La démonstration du Théorème B s'appuie sur une analyse précise des bouts de  $S$ . Cette analyse a été menée par P. Eberlein dans [9], tant du point de vue métrique que du point de vue de la dynamique topologique. L'auteur étudie en détail l'incidence du relâchement de l'hypothèse  $K \leq -a^2$  ( $a > 0$ ) en  $K \leq 0$  sur la géométrie des bouts de  $S$  (voir les figures 1a et 1b ci-dessous qui illustrent le contraste entre la situation en courbure négative pincée et la situation en courbure négative ou nulle). Il montre également que certaines propriétés nouvelles observées sont liées à la présence dans le groupe des isométries de  $X$ , d'éléments paraboliques exceptionnels (mixtes dans la terminologie de [4]), fixant point par point un intervalle fermé d'intérieur non vide du bord à l'infini. Il apparaît aussi dans ce travail deux classifications naturelles des bouts, l'une métrique, l'autre en considérant les propriétés de dynamique topologique du flot géodésique dans les bouts. P. Eberlein conjecture que ces classifications sont équivalentes. Nous démontrons effectivement la

**PROPOSITION C.** *Les classifications du point de vue topologique ou métrique de P. Eberlein sont équivalentes.*

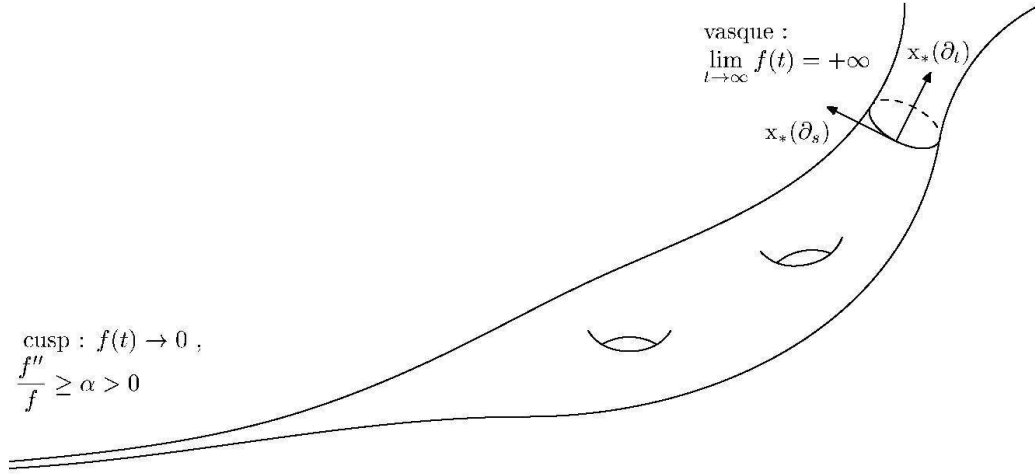


FIGURE 1a

Deux types de bouts en courbure négative pincée

La rédaction de l'article est organisée de la manière suivante. La première section introduit les notations et rappelle les principaux résultats obtenus dans [9]. Leur présentation est en partie indépendante et nous avons inclus certaines preuves qui nous semblaient plus élémentaires ainsi que des résultats complémentaires utiles pour les sections suivantes. Nous rappelons ensuite les deux classifications des bouts proposées par P. Eberlein afin de démontrer la Proposition C. Pour clore cette section, nous établissons la minimalité de l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma$ .

L'objet principal de la deuxième section est de donner la preuve du Théorème B. Ce résultat établi, nous illustrons par des exemples le cas où le produit de Gromov entre deux points de l'ensemble limite est infini.

La troisième section, enfin, est consacrée à la preuve du Théorème A. Pour éviter la paraphrase de [7] et [8], nous rappelons brièvement de quelle manière les arguments s'articulent autour des résultats des sections précédentes.

REMERCIEMENTS. Nous avons tiré bénéfice des remarques de Gérard Besson et Jean-Pierre Otal sur une première version de ce texte. Jérôme Depauw a programmé le calcul (exact) donné dans la section 2.2 et Jean-René Licois a exécuté les illustrations qui accompagnent le texte. Nous les remercions tous les quatre.

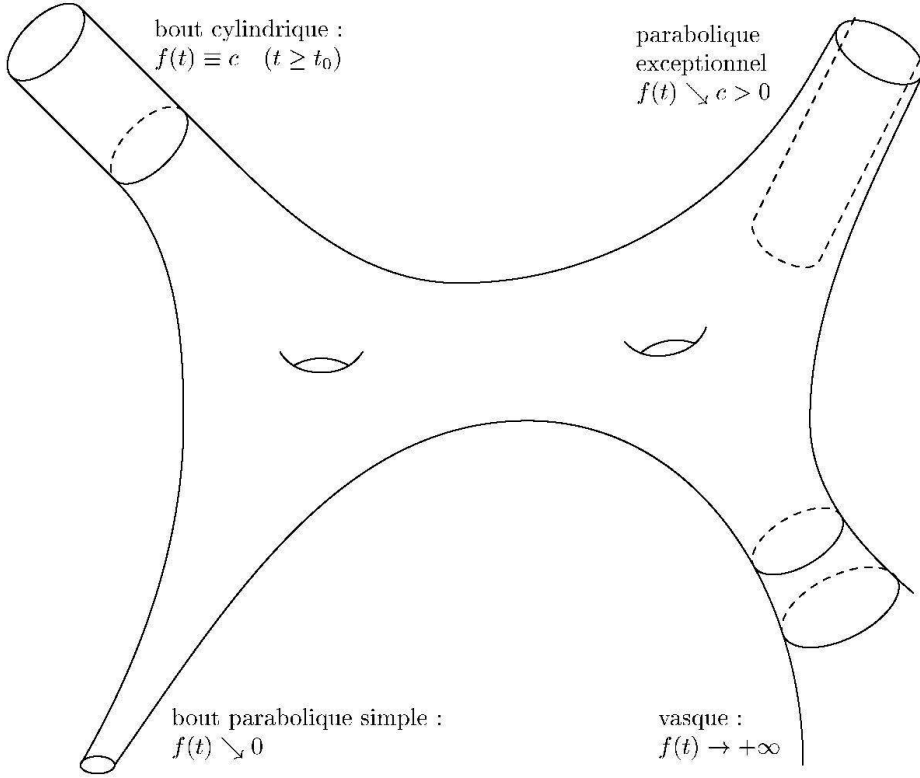


FIGURE 1b

Quatre types de bouts en courbure négative ou nulle

## 1. SURFACES DE CARTAN-HADAMARD ET QUOTIENTS

### 1.1 NOTATIONS ET RAPPELS

On rappelle les définitions et les résultats classiques concernant la géométrie de  $X$  ; de bonnes références sont, dans l'ordre alphabétique, [2], [3], [4], [9], [11]. Dans tout ce qui suit,  $X$  désigne une surface simplement connexe, munie d'une métrique complète de courbure négative ou nulle. On fixe une origine  $o$  dans  $X$ . Sauf mention explicite, les géodésiques de  $X$  sont paramétrées à vitesse unité. Le bord à l'infini de  $X$  est par définition l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes de  $X$  (i.e. qui restent à distance bornée dans les temps futurs).

Fixons quelques notations :

- $\langle ., . \rangle$  désigne la métrique sur  $X$ ,  $d$  la distance associée et  $K$  la courbure sectionnelle, négative ou nulle ;
- on pose  $\bar{X} = X \cup X(\infty)$  et on note  $Is(X)$  le groupe des isométries de  $X$  ;

- $TX$  (resp.  $T_1X$ )  $\rightarrow X$  est le fibré tangent (resp. tangent unitaire) de  $X$  et  $\pi$  la projection canonique de  $TX$  sur  $X$  ;
- pour  $p \in X$  et  $q \in \bar{X} \setminus \{p\}$ ,  $\sigma_{pq}$  est l'unique géodésique paramétrée par longueur d'arc joignant  $p$  à  $q$  ; pour  $v \in T_1X$ ,  $\sigma_v$  l'unique géodésique (complète) paramétrée par longueur d'arc vérifiant  $\sigma_v(0) = \pi(v)$  et  $\dot{\sigma}_v(0) = v$  ;
- si  $p \in X$  et  $v, w \in T_1X_p$ ,  $\angle(v, w) \in [0, \pi]$  est la mesure de l'angle non orienté entre  $v$  et  $w$  ; pour  $q, r \in \bar{X} \setminus \{p\}$ , on pose alors  $\angle_p(q, r) = \angle(\dot{\sigma}_{pq}(0), \dot{\sigma}_{pr}(0))$ .

La topologie sur  $\bar{X}$  est celle des cônes, dont une base de voisinages convexes est  $(C(v, \epsilon))_{\epsilon > 0; v \in T_1X}$  où

$$C(v, \epsilon) = \{q \in \bar{X} \setminus \{p\} ; \angle_p(v, \dot{\sigma}_{pq}(0)) < \epsilon\}.$$

Pour chaque  $p \in X$ , l'application :  $v \in T_1X_p \mapsto \sigma_v(\infty) \in X(\infty)$  est un homéomorphisme. En particulier,  $(x_n) \in \bar{X} \rightarrow \xi \in X(\infty)$  si et seulement si pour un point  $p \in X$  (ou pour tout point  $p \in X$ ), on a  $\dot{\sigma}_{px_n}(0) \rightarrow \dot{\sigma}_{p\xi}(0)$  et  $d(p, x_n) \rightarrow +\infty$  (avec la convention  $d(p, x_n) = +\infty$  si  $x_n \in X(\infty)$ ).

On rappelle le fait géométrique suivant, établi dans [11], fondamental dans le cadre  $Cat(0)$  et donc très utile ici :

Soient  $\xi$  et  $\eta$  deux points distincts de  $X(\infty)$ . S'il existe deux géodésiques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  joignant  $\xi$  à  $\eta$ , ces dernières bordent une bande plate de largeur  $d(\sigma_1(\mathbf{R}), \sigma_2(\mathbf{R}))$ .

REMARQUE 1.1. Nous ferons usage au paragraphe 1.4 des propriétés élémentaires suivantes :

Soit  $\eta \in X(\infty)$ ,  $V(\eta) \subset \bar{X}$  un voisinage de  $\eta$ ,  $\sigma_n$  une suite de géodésiques complètes avec  $\sigma_n(0) = p_n$  où  $p_n$  est la projection d'un point  $p \in X$  fixé sur  $\sigma_n(\mathbf{R})$ . On pose  $\sigma_n(\infty) = \xi_n$  et  $\sigma_n(-\infty) = \eta_n$ .

- 1) Si  $\xi_n \rightarrow \eta$ , il existe  $n_0$  et  $t_0$  ne dépendant que de  $V(\eta)$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\sigma_n([t_0, +\infty[) \subset V(\eta)$ .
- 2) Si  $\xi_n \rightarrow \eta$  et  $\eta_n \rightarrow \eta$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\sigma_n(\mathbf{R}) \subset V(\eta)$ .

Pour  $\xi \in X(\infty)$ ,  $p, q \in X$ , on rappelle que la fonction de Busemann centrée en  $\xi$  est définie par

$$B_\xi(q, p) = \lim_{z_n \rightarrow \xi} d(z_n, q) - d(z_n, p)$$

et que les horosphères (centrées en  $\xi$ ) sont les ensembles de niveau des fonctions  $q \mapsto B_\xi(q, p)$  pour  $p$  fixé. On notera  $\partial\mathcal{H}_\xi(p)$  l'unique horosphère

centrée en  $\xi \in X(\infty)$  passant par  $p \in X$  et  $\mathcal{H}_\xi(p) = \bigcup_{t \geq 0} (\partial \mathcal{H}_\xi(\sigma_{p\xi}(t)))$   
l'horoboule centrée en  $\xi$  bordée par  $\partial \mathcal{H}_\xi(p)$ .

La proposition qui suit regroupe des résultats de P. Eberlein [9] qui nous seront utiles par la suite :

PROPOSITION 1.2. 1) *Les fonctions de Busemann sont convexes; en particulier les horoboules sont des sous-ensembles convexes de  $X$ .*

2) *Les fonctions de Busemann sont de classe  $C^2$ ; en particulier, les horosphères admettent une paramétrisation  $C^1$ .*

3) *Une suite de points  $(\xi_n)_n$  de  $\bar{X}$  converge vers  $\xi \in X(\infty)$  si et seulement si la suite de fonctions de Busemann  $B_{\xi_n}$  converge uniformément sur les compacts de  $X \times X$  vers  $B_\xi$ .  $\square$*

La proposition qui suit permet de classifier les isométries de  $X$ , en fonction de leur «déplacement»; elle est valable en toute dimension (voir par exemple [2] II.3. et [4] lemma 6.6)

PROPOSITION 1.3. *Soit  $\varphi$  un élément de  $Is(X)$  distinct de l'identité. La fonction  $d_\varphi : p \mapsto d(p, \varphi(p))$  est convexe sur  $X$  et on appelle déplacement de  $\varphi$  son infimum  $m_\varphi$ ; pour tout point  $p$  de  $X$  on a  $m_\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(p, \varphi^n p)/n$ .*

*Trois cas peuvent alors se produire, qui s'excluent mutuellement :*

- i)  *$d_\varphi$  atteint son minimum sur  $X$  et  $m_\varphi = 0$ ; l'isométrie  $\varphi$  fixe un point de  $X$  et est dite elliptique,*
- ii)  *$d_\varphi$  atteint son minimum en un point  $p_\varphi \in X$  (qui n'est pas forcément unique) et  $m_\varphi > 0$ . Il est équivalent de dire que  $\varphi$  agit par translation de longueur  $m_\varphi$  le long de la géodésique (complète) passant par  $p_\varphi$  et  $\varphi(p_\varphi)$ . Une telle géodésique s'appelle un axe de  $\varphi$  et deux axes quelconques  $\gamma_1, \gamma_2$  de  $\varphi$  bordent une bande plate de sorte que  $\varphi$  fixe deux points de  $X(\infty)$ . On dit dans ce cas que  $\varphi$  est axiale.*
- iii)  *$d_\varphi$  n'atteint pas son minimum sur  $X$ ; on dit que  $\varphi$  est parabolique. Il existe alors un point  $\xi \in X(\infty)$  tel que*

$$(*) \quad \begin{cases} \varphi(\xi) = \xi & \text{et} \\ B_\xi(\varphi(\cdot), p) = B_\xi(\cdot, p) & (p \in X). \end{cases}$$

Les propriétés énoncées en ii) et iii) préludent à une autre classification des isométries, en fonction de leurs points fixes sur le bord. Si  $\varphi \in Is(X)$  et  $p \in X$ ,

il est bien connu (voir par exemple [11]) que tout point d'accumulation de la suite  $(\varphi^n \cdot p)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un point fixe de  $\varphi$ . On verra en particulier que, en dimension deux, la suite  $(\varphi^n \cdot p)_{n \in \mathbb{Z}}$  n'admet que un ou deux points d'accumulation sur le bord et que le point fixe  $\xi$  satisfaisant (\*) pour une isométrie parabolique est unique. Cela permettra d'affiner la classification précédente en distinguant les isométries paraboliques qui fixent un unique point à l'infini de celles qui fixent point par point un intervalle d'intérieur non vide.

REMARQUE 1.4. Soit  $\varphi \in Is(X)$ ,  $Fix(\varphi) = \{\xi \in X(\infty) ; \varphi(\xi) = \xi\}$  et  $p \in X$ . Il résulte de la relation de cocycle :  $B_\xi(x, z) = B_\xi(x, y) + B_\xi(y, z)$  valable pour  $(x, y, z) \in X^3$  que l'application :

$$\begin{aligned} Fix(\varphi) \times \mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\xi, n) &\mapsto B_\xi(\varphi^n p, p) \end{aligned}$$

est continue en la variable  $\xi$ , invariante par  $\varphi$  (i.e.  $B_\xi(\varphi p, \varphi q) = B_{\varphi \cdot \xi}(\varphi p, \varphi q) = B_\xi(p, q)$ ), et ne dépend pas de  $p$  puisque

$$\begin{aligned} B_\xi(\varphi q, q) &= B_\xi(\varphi q, \varphi p) + B_\xi(\varphi p, p) + B_\xi(p, q) \\ &= B_\xi(q, p) + B_\xi(\varphi \cdot p, p) + B_\xi(p, q) \\ &= B_\xi(\varphi \cdot p, p). \end{aligned}$$

En outre, comme il est remarqué dans [11], la relation de cocycle entraîne également que l'application ci-dessus est un morphisme en la variable  $n \in \mathbf{Z}$ , puisque

$$B_\xi(\varphi^n p, p) = \sum_{k=1}^n B_\xi(\varphi^k p, \varphi^{k-1} p) = \sum_{k=1}^n B_{\varphi^{-(k-1)}\xi}(\varphi p, p) = n B_\xi(\varphi \cdot p, p).$$

Cette remarque, élémentaire, est à la base des démonstrations des résultats de ce paragraphe, et en particulier de l'équivalence des classifications des bouts de  $S$ .

## 1.2 LES COUPLES DE POINTS JOIGNABLES DE $X(\infty)$

1.2. a CRITÈRES GÉNÉRAUX Étant donnés  $p \in X$  et  $q \in \bar{X}$ , il existe une unique géodésique joignant ces deux points. La situation est différente lorsque l'on considère deux points  $\xi, \eta \in X(\infty)$  distincts. Il peut ne pas exister de géodésique les joignant, en exister une infinité, ou bien en exister une et une seule. Les deux premiers cas sont liés à la présence de courbure sectionnelle

nulle, le dernier à celle de courbure sectionnelle suffisamment strictement négative dans  $X$ .

Le résultat élémentaire suivant, bien connu, précise une condition nécessaire et suffisante pour joindre deux points à l'infini.

LEMME 1.5. *Soient  $\xi, \eta$  deux points distincts de  $X(\infty)$  et  $p \in X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Il existe (au moins) une géodésique joignant  $\xi$  à  $\eta$ .*
- ii) *Il existe deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de points de  $\bar{X}$  convergeant respectivement vers  $\xi$  et  $\eta$ , une suite de géodésiques  $(\sigma_n)$  où  $\sigma_n$  joint  $x_n$  à  $y_n$ , et une constante  $C = C(\xi, \eta)$  telles que*

$$d(p, \sigma_n) \leq C.$$

*En outre, lorsque les points  $\xi$  et  $\eta$  sont joignables, pour tout point  $p \in X$  et pour toute suite de points  $(p_n)$  de  $X$  convergeant vers  $\xi$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \angle_{p_n}(\dot{\sigma}_{p_n p}(0), \dot{\sigma}_{p_n \eta}(0)) = 0.$$

*Démonstration.* i)  $\Rightarrow$  ii) est évidente ; réciproquement, notons  $z_n \in \sigma_n(\mathbf{R})$  l'unique point qui réalise le minimum de la distance de  $p$  à  $\sigma_n$ . L'origine de  $\sigma_n$  est prise en  $z_n$  ; par hypothèse,  $\dot{\sigma}_n(0)$  reste dans un compact de  $T_1 X$  donc, quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer  $\dot{\sigma}_n(0) \rightarrow v_\infty \in T_1 X$ . En notant  $z_\infty = \pi(v_\infty)$  et  $\sigma_\infty$  l'unique géodésique déterminée par les conditions  $\sigma_\infty(0) = z_\infty$  et  $\dot{\sigma}_\infty(0) = v_\infty$ , il reste à voir que  $\sigma_\infty(+\infty) = \xi$  (l'argument est le même pour montrer que  $\sigma_\infty(-\infty) = \eta$ ).

Soit  $t \in \mathbf{R}_+$  ; par continuité de l'exponentielle au point  $z_\infty$  et au point  $p$  et parce que  $x_n \rightarrow \xi$ , il existe  $n_0$  tel que  $n \geq n_0$  entraîne

$$\begin{cases} \max\{d(z_n, x_n); d(p, x_n)\} \geq t & \text{et} \\ \max\left\{ \sup_{s \in [0, t]} d(\sigma_\infty(s), \sigma_n(s)); \sup_{s \in [0, t]} d(\sigma_{p x_n}(s), \sigma_{p \xi}(s)) \right\} \leq 1. \end{cases}$$

La fonction (convexe)  $s \mapsto d(\sigma_n(s), \sigma_{p x_n}(s))$  est décroissante sur  $[0, d(z_n, x_n)]$  donc on a  $d(\sigma_n(t), \sigma_{p x_n}(t)) \leq C$  et par l'inégalité triangulaire,  $d(\sigma_\infty(t), \sigma_{p \xi}(t)) \leq C + 2$ .

Si  $z_n \in \sigma_{p_n \eta}(\mathbf{R}_+)$  est le point qui réalise la distance de  $\sigma_{p_n \eta}(\mathbf{R}_+)$  à  $p$ ,  $z_n$  reste dans un compact et il suffit d'appliquer la première inégalité du cosinus.  $\square$

On rappelle maintenant les propriétés géométriques qui seront utiles par la suite pour étudier l'existence du produit de Gromov entre deux points

du bord. La plupart des propriétés établies dans ce paragraphe sont connues des spécialistes. Elles peuvent être comparées en particulier au lemme de la page 54 et à l'exercice 3.9 de [4] ou encore aux résultats obtenus dans [9]. Nous en donnons cependant une présentation indépendante – et différente – dans un souci d'unification du texte, en s'appuyant sur l'hypothèse de la dimension deux. Cette dernière permet de dégager des arguments de nature topologique, et de décrire avec précision le comportement des horosphères les unes par rapport aux autres.

Notons que si  $\xi, \eta \in X(\infty)$  avec  $\xi \neq \eta$ , il existe  $p \in X$  tel que  $\angle_p(\xi, \eta) < \pi$ . Dans le cas contraire, pour tout  $p$ , les rayons  $\sigma_{p\xi}$  et  $\sigma_{p\eta}$  se concatènent en une géodésique d'extrémités  $\xi$  et  $\eta$  et deux telles géodésiques bordent une bande plate; la métrique sur  $X$  serait plate. On dit alors que  $\xi' \in X(\infty)$  est entre  $\eta$  et  $\xi$  s'il existe un point  $p$  tel que

$$\angle_p(\xi, \xi') + \angle_p(\xi', \eta) = \angle_p(\xi, \eta) < \pi.$$

Pour  $\xi, \eta \in X(\infty)$  et  $p \in X$  vérifiant  $\angle_p(\xi, \eta) < \pi$ , on note

$$D(p; \xi, \eta) = \{\sigma_{p\xi'}(t) ; t \geq 0, \xi' \text{ est entre } \xi \text{ et } \eta\}$$

le secteur issu de  $p$  d'extrémités  $\xi$  et  $\eta$ .

LEMME 1.6 ([9]). *Soient  $\xi, \eta$  deux points distincts de  $X(\infty)$ . On suppose qu'il n'existe pas de géodésique joignant ces deux points. Alors :*

- i) *pour tout point  $p \in X$  vérifiant  $\angle_p(\xi, \eta) < \pi$ , la courbure totale du secteur  $D(p; \xi, \eta)$  est bornée,*
- ii) *deux points distincts entre  $\xi$  et  $\eta$  ne peuvent pas être joints par une géodésique.*

*Démonstration.* i) C'est une application directe du lemme 1.5 et de la formule de Gauss-Bonnet.

ii) Si  $\xi', \eta'$  sont entre  $\xi$  et  $\eta$  et s'il existe une géodésique  $\sigma$  joignant  $\xi'$  et  $\eta'$ , cette géodésique rencontre  $\sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\sigma_p\xi(n), \sigma_p\eta(n)}$  en deux points pour  $n$  assez grand puisque les images de  $\sigma$  et  $\sigma_n$  restent dans  $D(p; \xi, \eta)$  par ii) du lemme 1.5. Contradiction.  $\square$

Nous donnons également un critère d'existence d'une (ou plusieurs) géodésique(s) joignant  $\xi, \eta \in X(\infty)$  en fonction des positions relatives des horosphères centrées en  $\xi$  et  $\eta$  respectivement. Pour  $\eta \in X(\infty)$  et  $p, q \in X$ , notons

$$\mathcal{H}_\eta(\infty) = \{\xi \in X(\infty) ; t \mapsto B_\eta(\sigma_{q\xi}(t), p) \text{ est majorée sur } \mathbf{R}_+\}.$$

Chaque élément de  $\mathcal{H}_\eta(\infty)$  est donc représenté par un rayon géodésique restant dans une horosphère fixe centrée en  $\eta$ . Dans le cas euclidien, pour tout  $\eta \in X(\infty)$ , l'ensemble  $\mathcal{H}_\eta(\infty)$  est un demi-cercle; *a contrario*,  $\mathcal{H}_\eta(\infty) = \{\eta\}$  pour tout  $\eta \in X(\infty)$  lorsque  $K \leq -a^2 < 0$  ou lorsque  $X$  satisfait l'axiome de visibilité, d'après le résultat qui suit.

- LEMME 1.7. i)  $\mathcal{H}_\eta(\infty)$  ne dépend ni de  $p$ , ni de  $q$ ,  
 ii)  $\mathcal{H}_\eta(\infty)$  est un intervalle fermé  $I = [\eta_1, \eta_2] \subset X(\infty)$  contenant  $\eta$ ,  
 iii) si  $\eta_1 \neq \eta_2$ , les seuls points de  $I$  qui peuvent éventuellement être joints par une géodésique  $\sigma$  sont  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , et dans ce cas  $\sigma$  borde un demi-plan plat,  
 iv) si  $\xi \in I$ , alors  $B_\eta(\sigma_{q\xi}(t), p) \rightarrow -\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

Si  $\mathcal{H}_\eta(t)$  désigne l'horoboule centrée en  $\eta$  dont le bord contient  $\sigma_{p\eta}(t)$ , on a encore  $\mathcal{H}_\eta(\infty) = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{H}_\eta(t)$  et  $\bigcap_{t \geq 0} \mathcal{H}_\eta(t)$  ne dépend pas de  $p \in X$ .

*Démonstration.* i) L'indépendance en  $p$  et  $q$  résulte directement de l'inégalité

$$|B_\eta(\sigma_{q_1\xi}(t), p_1) - B_\eta(\sigma_{q_2\xi}(t), p_2)| \leq d(p_1, p_2) + d(q_1, q_2)$$

qui est une conséquence directe de la convexité de  $t \mapsto d(\sigma_{p\zeta}(t), \sigma_{q\zeta}(t))$  appliquée successivement à  $\zeta = \eta$  et  $\xi$ .

ii) Il résulte de l'indépendance en  $p$  et  $q$  que  $\overline{\mathcal{H}_\eta} \cap X(\infty)$  ne dépend pas du choix de l'horoboule  $\mathcal{H}_\eta$  centrée en  $\eta$ . De plus, cet ensemble est un intervalle fermé  $[\eta_1, \eta_2]$ ; en effet, si  $t \mapsto \beta(t)$  est une paramétrisation  $C^1$  non singulière de l'horosphère centrée en  $\eta$  passant par  $p$  telle que  $\beta(0) = p$ , les applications qui à  $t \in \mathbf{R}_+$  associent  $\angle(\dot{\beta}(0), \dot{\sigma}_{p\beta(t)}(0))$  et  $\angle(-\dot{\beta}(0), \dot{\sigma}_{p\beta(-t)}(0))$  sont croissantes par convexité de l'horoboule; comme  $d(p, \beta(\pm t)) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , on a  $\{\beta(t), \beta(-t)\} \rightarrow \{\eta_1, \eta_2\}$  et, par convexité des horoboules, si  $I = [\eta_1, \eta_2]$  est l'intervalle contenant  $\eta$  et si  $\xi \in I$ , alors  $\sigma_{p\xi}(\mathbf{R}_+) \subset \mathcal{H}_\eta$ . Ainsi,  $\mathcal{H}_\eta(\infty) = I$ .

iii) Si  $\sigma$  est une géodésique qui joint deux points distincts  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de  $[\eta_1, \eta_2]$ , la fonction  $t \mapsto B_\eta(\sigma(t), p)$  est convexe majorée sur  $\mathbf{R}$  donc constante;  $\sigma$  est alors une horosphère (et une géodésique) donc  $\{\sigma(+\infty), \sigma(-\infty)\} = \{\eta_1, \eta_2\}$  et  $\sigma$  borde un demi-plan plat. En effet, si  $t_1 \neq t_2$ , le triangle (à bords géodésiques)  $(\eta, \sigma(t_1), \sigma(t_2))$  ayant deux angles droits est nécessairement plat.

Par conséquent, deux points de  $] \eta_1, \eta_2[$  ne peuvent pas être joints par une géodésique.

iv) Cela résulte immédiatement du fait que, pour toute horoboule  $\mathcal{H}_\eta$  centrée en  $\eta$ , l'ensemble  $\overline{\mathcal{H}_\eta} \cap X(\infty) = [\eta_1, \eta_2]$  ne dépend de  $\mathcal{H}_\eta$  que par son centre.  $\square$

**COROLLAIRE 1.8.** *Soient  $\xi_1, \xi_2$  deux points distincts de  $X(\infty)$ ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *il existe au moins une géodésique joignant  $\xi_1$  à  $\xi_2$ ,*
- ii) *il existe une horosphère  $\partial\mathcal{H}_1$  centrée en  $\xi_1$  et une horosphère  $\partial\mathcal{H}_2$  centrée en  $\xi_2$  vérifiant  $\sharp\partial\mathcal{H}_1 \cap \partial\mathcal{H}_2 \geq 2$ .*

*En outre,*

- iii) *si  $\xi_1$  et  $\xi_2$  ne peuvent pas être joints par une géodésique, alors  $\mathcal{H}_{\xi_1}(\infty) \cap \mathcal{H}_{\xi_2}(\infty) \neq \emptyset$ ,*
- iv) *si  $\xi_1$  et  $\xi_2$  peuvent être joints par une géodésique et  $\mathcal{H}_{\xi_1}(\infty) \cap \mathcal{H}_{\xi_2}(\infty) \neq \emptyset$ , alors toute géodésique joignant  $\xi_1$  et  $\xi_2$  borde un demi-plan plat.*

*Démonstration.* L'implication ii)  $\Rightarrow$  i) est prouvée par P. Eberlein dans [9] et est obtenue en cherchant un point critique sur  $]t, t'[,$  de l'application  $s \mapsto B_{\xi_1}(\alpha_2(s); \alpha_1(t))$ , où  $s \mapsto \alpha_i(s)$  ( $i = 1, 2$ ) est la paramétrisation par longueur d'arc de l'horosphère  $\partial\mathcal{H}_i$  et  $\alpha_1(t), \alpha_1(t') \in \partial\mathcal{H}_1 \cap \partial\mathcal{H}_2$ .

i)  $\Rightarrow$  ii): supposons que toute horosphère centrée en  $\xi_1$  rencontre toute horosphère centrée en  $\xi_2$  en au plus un point et qu'il existe une géodésique  $\sigma$  reliant  $\xi_1$  à  $\xi_2$ , orientée de  $\xi_1$  à  $\xi_2$ . Soit  $p = \sigma(t_0)$ ; les horosphères  $\partial\mathcal{H}_1$  et  $\partial\mathcal{H}_2$  passant par  $p$  centrées en  $\xi_1$  et  $\xi_2$  respectivement admettent le même vecteur tangent unitaire  $v$  en  $p$ ; par convexité des horoboules, la géodésique  $\sigma_v$  vérifiant  $\sigma_v(0) = p$  et  $\dot{\sigma}_v(0) = v$  sépare  $X$  en deux composantes connexes ouvertes, l'une contenant  $\partial\mathcal{H}_1 \setminus \{p\}$ , l'autre  $\partial\mathcal{H}_2 \setminus \{p\}$ . On a par conséquent

$$(1) \quad \mathcal{H}_{\xi_1}(\infty) \cap \mathcal{H}_{\xi_2}(\infty) = \sigma_v(+\infty)$$

ou

$$(2) \quad \mathcal{H}_{\xi_1}(\infty) \cap \mathcal{H}_{\xi_2}(\infty) = \emptyset.$$

Le cas (1) entraîne par convexité des horoboules que  $\sigma_v(\mathbf{R}_+) = \partial\mathcal{H}_1 \cap \partial\mathcal{H}_2$ ; il est donc à exclure. Remarquons toutefois que, dans ce cas, tout triangle de sommets  $(\sigma_v(t), p, \xi_i)$  est plat et  $\sigma$  borde un demi-plan plat.

Si (2) est réalisée, et si  $t_1 > t_0$ , toute horosphère centrée en  $\xi_1$  passant par  $\sigma(t_1)$  rencontre nécessairement  $\partial\mathcal{H}_2$  en au moins deux points. En effet, si  $\beta$  est une paramétrisation d'une telle horosphère et si  $\mathcal{H}_{\xi_1}(\infty) = [\eta_1, \eta'_1]$ , alors  $\beta(t) \rightarrow \eta_1 \notin \mathcal{H}_{\xi_2}(\infty)$  et  $\beta(-t) \rightarrow \eta'_1 \notin \mathcal{H}_{\xi_2}(\infty)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ; on a donc montré i)  $\Rightarrow$  ii).

iii) résulte directement de la discussion du cas (2) précédent et iv) de la discussion du cas (1).  $\square$

REMARQUE. Deux points distincts du bord non joignables peuvent admettre des horosphères qui ne se rencontrent pas dans  $X$ , mais dont l'adhérence des horoboules est constituée d'un point sur le bord exactement (voir la section 2).

1.2.b LE CAS DES SURFACES QUOTIENT On suppose maintenant qu'il existe  $\Gamma \subset \text{Is}(X)$  un sous-groupe d'isométries de  $X$  agissant proprement discontinûment et sans point fixe sur  $X$  et on suppose que la surface quotient  $S = X/\Gamma$  est complète, orientable, non-compacte, de type fini et n'est pas un cylindre topologique (autrement dit  $\Gamma$  est finiment engendré et  $\Gamma \neq \mathbf{Z}$ ). On note :

- $\pi: T_1S \rightarrow S$  le fibré unitaire de  $S$ ;
- $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma \cdot p} \setminus \Gamma \cdot p \subset X(\infty)$  l'ensemble limite de  $\Gamma$  (qui ne dépend pas de  $p \in X$ );
- $O(\Gamma)$  le complémentaire de l'ensemble limite dans  $X(\infty)$ , constitué d'une réunion dénombrable d'intervalles ouverts (éventuellement vides), plus précisément l'orbite sous  $\Gamma$  d'un nombre fini d'intervalles, puisque  $S$  admet un nombre fini de bouts.

Le lemme suivant interdit les phénomènes de périodicité de la métrique dans le secteur  $D(p; \xi, \eta)$  :

LEMME 1.9 ([9] Prop. 2.2). *S'il existe un point  $\xi' \in \Lambda_\Gamma$  entre  $\xi$  et  $\eta$ , les points  $\xi$  et  $\eta$  peuvent être joints par une géodésique.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde: si  $\xi' := \lim_n \gamma_n \cdot p$ , on peut choisir  $p \in X$  et  $\epsilon > 0$  tels que la courbure soit strictement négative sur  $B(p, \epsilon)$  et  $B(\gamma_n \cdot p, \epsilon) \cap B(\gamma_m \cdot p, \epsilon) = \emptyset$  pour  $\gamma_n \neq \gamma_m$ . Pour  $n$  assez grand, on a  $B(\gamma_n \cdot p, \epsilon) \subset D(p, \xi, \eta)$  et cela contredit le point i) du Lemme 1.6.  $\square$

Par conséquent, seuls les couples de points dans l'adhérence d'une même composante connexe de  $O(\Gamma)$  peuvent ne pas être joints par une géodésique.

REMARQUE 1.10. Il résulte directement du lemme précédent que tout point  $\eta \in \Lambda_\Gamma$  possède une base de voisinages bordés par des géodésiques.

Soient  $\varphi \in \Gamma \setminus \{Id\}$  et  $p \in X$ ; P. Eberlein et B. O'Neill ont montré que chaque point d'accumulation dans  $\bar{X}$  de la suite bilatère  $(\varphi^n \cdot p)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un élément de  $X(\infty)$  fixe par  $\varphi$ . L'hypothèse de la dimension deux permet une analyse plus précise de ces points fixes.

LEMME 1.11. *La suite bilatère  $(\varphi^n \cdot p)_{n \in \mathbb{Z}}$  possède au plus deux points d'accumulation. Elle en possède deux distincts qui peuvent être joints par une géodésique si et seulement si  $\varphi$  est axiale. En particulier, si elle ne possède qu'un point d'accumulation,  $\varphi$  est parabolique.*

*Démonstration.* Supposons que la suite  $(\varphi^n \cdot p)_{n \in \mathbb{Z}}$  admette deux points d'accumulation  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , joignables par une géodésique  $\sigma$ . Soit  $q$  un point de  $\sigma$  et  $\delta$  une géodésique transverse à  $\sigma$  en  $q$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la géodésique  $\varphi^n \circ \sigma$  a pour extrémités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  et rencontre donc  $\delta$  en un point  $q_n$  (avec  $q_0 = q$ ). On distingue trois cas :

1) La suite  $(q_n)$  admet un point d'accumulation  $q_\infty$  qui appartient à  $X$ . Le segment géodésique  $[q_\infty, \varphi \cdot q_\infty]$  se complète en une géodésique d'extrémités  $\eta_1, \eta_2$  qui est stable par  $\varphi$ ; l'isométrie est donc axiale.

2) La suite  $(q_n)$  s'accumule sur les deux points distincts  $\delta(-\infty)$  et  $\delta(+\infty)$ . Puisque deux géodésiques distinctes joignant  $\eta_1$  et  $\eta_2$  bordent nécessairement une bande plate, la métrique sur  $X$  est plate, ce qui n'est pas.

3) La suite  $(q_n)$  converge vers  $\delta(+\infty)$ ; par l'argument précédent,  $\sigma$  borde un demi-plan plat. Supposons alors  $\varphi \cdot q \notin \sigma(\mathbb{R})$  et notons  $r$  la projection de  $\varphi \cdot q$  sur  $\sigma(\mathbb{R})$ ; le triangle de sommets  $q, r$  et  $\varphi \cdot q$  est envoyé par  $\varphi$  sur un triangle semblable ce qui entraîne que  $q, \varphi \cdot q, \varphi^2 \cdot q$  sont sur une même géodésique et que  $\varphi^n \cdot q$  converge vers un point distinct de  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , ce qui n'est pas. L'isométrie  $\varphi$  translate par conséquent la géodésique  $\sigma$  et toutes celles qui lui sont parallèles.

De ce raisonnement, on déduit aussi que la suite  $(\varphi^n \cdot p)_{n \in \mathbb{Z}}$  ne peut pas posséder plus de deux points d'accumulation; en effet, s'il en existait trois, deux d'entre eux seraient joignables mais la discussion ci-dessus prouve que ces deux points sont les seuls points d'accumulation possibles!  $\square$

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous concentrons sur le cas où  $\varphi$  est un élément parabolique de  $\Gamma$ . Le relâchement de l'hypothèse  $K \leq -a^2$

( $a > 0$ ) en  $K \leq 0$  peut entraîner l'existence de deux points d'accumulation distincts  $\eta_1, \eta_2 \in X(\infty)$  de la suite  $(\varphi^n \cdot p)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Le point i) du résultat qui suit a été établi par P. Eberlein dans [9]. L'existence dans le point iii) est un résultat classique, valable en toutes dimensions. Nous en donnons une preuve indépendante qui s'appuie sur le lemme précédent et la remarque 1.4.

PROPOSITION 1.12. *Soit  $\varphi \in \Gamma$  un élément parabolique vérifiant*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{-n} \cdot p = \eta_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n \cdot p = \eta_2 \neq \eta_1.$$

Alors,

i) *tout élément entre  $\eta_1$  et  $\eta_2$  est fixé par  $\varphi$  ; on notera  $I = [\eta_1, \eta_2]$  l'ensemble de ces éléments,*

ii)  $B_{\eta_1}(\varphi p, p) = m_\varphi = -B_{\eta_2}(\varphi p, p)$ ,

iii) *il existe un unique point  $\eta \in I$  tel que  $\varphi$  fixe  $\eta$  et toutes les horosphères centrées en  $\eta$ . De plus,  $\mathcal{H}_\eta(\infty) = I$ .*

Remarquons que :

1) Les points  $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda_\Gamma$  sont joignables à tout point de  $I^c$  puisque  $\Lambda_\Gamma$  n'admet pas de point isolé. Il en résulte que  $I^c$  est stable par  $\varphi$  puisque, dans le cas contraire, une géodésique joignant  $\eta_1$  et  $\xi \in I^c$  serait envoyée par  $\varphi$  sur une géodésique joignant deux points de  $I$ . Par conséquent, on a aussi  $\varphi(I) = I$ .

2) L'élément  $\varphi$  ne fixe aucun point de  $I^c$ . En effet, supposons le contraire ; pour  $i = 1, 2$ , considérons une géodésique  $\sigma_i$  joignant  $\eta_i$  et  $\xi$  et choisissons un point  $p_i$  sur  $\sigma_i$ . La convergence de  $\varphi^{-n} \cdot p_2$  vers  $\eta_1$  et de  $\varphi^n \cdot p_1$  vers  $\eta_2$  entraîne l'existence de deux entiers positifs  $m$  et  $n$  tels que les géodésiques  $\varphi^{-n} \cdot \sigma_2$  et  $\varphi^m \cdot \sigma_1$  se rencontrent dans  $X$  en un point  $q$ . Il existe alors deux rayons géodésiques joignant  $q$  à  $\xi$ , et ceci est absurde. Ainsi, le point  $\eta_1$  (resp.  $\eta_2$ ) est un point fixe attractif pour l'action de  $\varphi$  (resp.  $\varphi^{-1}$ ) non seulement sur  $X$  mais aussi sur  $I^c$ .

*Démonstration de 1.12.* i) Soit  $p \in X$  et supposons qu'il existe  $\xi \in ]\eta_1, \eta_2[$  tel que  $\varphi\xi \neq \xi$ . Puisque  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont fixés par  $\varphi$ , le point  $\varphi\xi$  est entre  $\xi$  et  $\eta_2$  et le rayon  $\sigma_{p\xi}$  se prolonge en une géodésique  $\sigma$  d'extrémités  $\xi$  et  $\xi'$  ; d'après le lemme 1.7 iii), on a  $\xi' \notin I$  puisque  $\xi$  et  $\xi'$  sont joints par  $\sigma$ , et  $\varphi(\sigma)$  ne rencontre pas  $\sigma$  dans  $\bar{X}$  d'après le lemme précédent. La bande fermée délimitée par  $\sigma$  et  $\sigma'$  est un domaine fondamental  $D$  pour l'action de  $\varphi$ . Comme la fonction  $t \mapsto d(\sigma(t), \sigma'(t))$  est convexe et tend vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ , l'infimum de la fonction distance de translation en restriction à

$\sigma(\mathbf{R})$  est réalisé de même que l'infimum de la fonction distance de translation de  $\varphi$  sur  $D$ , donc sur  $X$  puisque  $D$  est un domaine fondamental. Ceci est absurde puisque  $\varphi$  est parabolique.

ii) Pour  $p \in X$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , posons  $u_n = d(p, \varphi^n p)$ ; on a

$$\begin{aligned} B_{\eta_1}(\varphi p, p) &= \lim_n \{d(\varphi^{-n} p, \varphi p) - d(\varphi^{-n} p, p)\} \\ &= \lim_n \{d(\varphi^{n+1} p, p) - d(\varphi^{n+1} p, \varphi \cdot p)\} \\ &= \lim_n \{u_{n+1} - u_n\} \\ &= \lim_n (u_n/n) \\ &= B_{\eta_2}(p, \varphi p) = -B_{\eta_2}(\varphi p, p). \end{aligned}$$

La suite  $(u_{n+1} - u_n)_n$  converge donc vers  $B_{\eta_1}(\varphi p, p)$  qui est aussi la limite de ses moyennes de Césaro:  $\lim_n \frac{u_n}{n}$ , c'est-à-dire  $m_\varphi$  d'après la Proposition 1.3.

iii) Par continuité de  $\xi \mapsto B_\xi(\varphi \cdot p, p)$ , il existe  $\eta \in I$  tel que

$$(*) \quad B_\eta(\varphi p, p) = 0.$$

Montrons que  $\eta$  vérifiant  $(*)$  est unique et ne dépend pas du point  $p$  fixé. Fixons  $p$  dans un premier temps; s'il existait deux points  $\eta$  et  $\eta'$  vérifiant  $(*)$ , l'ensemble  $\partial \mathcal{H}_\eta(p) \cap \partial \mathcal{H}_{\eta'}(p)$  contiendrait toute l'orbite de  $p$  sous l'action du groupe cyclique  $\langle \varphi \rangle$ , et puisque  $\varphi p \neq p$ , les points  $\eta$  et  $\eta'$  seraient joignables, ce qui n'est pas. L'indépendance de  $\eta$  par rapport à  $p$  résulte de l'unicité précédente et du fait que  $B_\xi(\varphi p, p)$  ne dépend pas de  $p$ , constaté dans la remarque 1.4. L'égalité  $\mathcal{H}_\eta(\infty) = I$  résulte de ce que  $\{\eta_1, \eta_2\} = \overline{(\varphi^n p)_{n \in \mathbf{Z}}} \setminus (\varphi^n p)_{n \in \mathbf{Z}}$  et du fait que  $\varphi$  préserve les horosphères centrées en  $\eta$ .  $\square$

LEMME 1.13.  $\eta \in \mathcal{H}_{\eta_1}(\infty) \cap \mathcal{H}_{\eta_2}(\infty)$ .

*Démonstration.* Pour  $p \in X$  fixé, et  $i = 1, 2$ , soit  $J_i \subset X(\infty)$  la composante connexe de  $X(\infty) \setminus \{\eta, \sigma_{p\eta}(-\infty)\}$  qui contient  $\eta_i$ . Pour  $t \geq 0$ , notons  $\sigma_t$  l'unique géodésique perpendiculaire à  $\sigma_{p\eta}$  en  $\sigma_{p\eta}(t)$ , vérifiant  $\sigma_t(0) = \sigma_{p\eta}(t)$  et  $\sigma_t(\infty) \in J_2$ . Montrons alors, par l'absurde, que  $\sigma_t(-\infty) \rightarrow \eta_1$  et  $\sigma_t(\infty) \rightarrow \eta_2$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

La géodésique  $\sigma_t(\mathbf{R})$  étant tangente à l'horosphère  $\partial \mathcal{H}_\eta(\sigma_{p\eta}(t))$  en  $\sigma_{p\eta}(t)$ , on a  $\sigma_t(\pm\infty) \in I^c$  par convexité des horoboules. D'autre part, si  $t' > t$ , on a  $\sigma_{t'}(-\infty) \in [\sigma_t(-\infty), \eta_1[$  (et de manière analogue,  $\sigma_{t'}(\infty) \in [\sigma_t(\infty), \eta_2[$ ); dans le cas contraire,  $\sigma_t(\mathbf{R}_*)$  et  $\sigma_{t'}(\mathbf{R}_*)$  se rencontreraient en  $x$  et la somme des angles du triangle de sommets  $(x, \sigma_t(0), \sigma_{t'}(0))$  excéderait  $\pi$ . Par conséquent,

$\sigma_t(-\infty)$  converge lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Notons  $\eta_\infty$  sa limite et supposons  $\eta_\infty \neq \eta_1$ . Les points  $\eta$  et  $\eta_\infty$  sont alors joignables et on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \angle_{\sigma_{p\eta}(t)}(p, \eta_\infty) = 0.$$

Il existe donc  $t_0$  tel que  $\angle_{\sigma_{p\eta}(t_0)}(p, \eta_\infty) < \frac{\pi}{2}$ ; ceci contredit le fait que  $\angle_{\sigma_{p\eta}(t_0)}(p, \sigma_{t_0}(-\infty)) = \frac{\pi}{2}$  et  $\eta_\infty \in [\sigma_{t_0}(-\infty), \eta_1]$ . On montre de la même façon que  $\sigma_t(+\infty)$  converge vers  $\eta_2$ .  $\square$

REMARQUE 1.14. Une question naturelle est de savoir si

$$\sup_{p \in X} \angle_x(\eta_1, \eta_2) = \pi.$$

Cette égalité est réalisée dans le cas des bouts exceptionnels de révolution et elle entraîne  $\mathcal{H}_{\eta_1}(\infty) \cap \mathcal{H}_{\eta_2}(\infty) = \{\eta\}$  (voir la discussion à la suite de 1.17).

### 1.3 BOUTS DE $S$ ET ISOMÉTRIES

Si  $\varphi$  est une isométrie parabolique vérifiant les hypothèses de la Proposition 1.12, l'ensemble  $\overset{\circ}{I}$  correspondant forme une composante connexe de  $O(\Gamma)$ . D'après [9], chacune de ces composantes connexes correspond à un relevé d'un bout de  $S$ ; par ailleurs, la surface  $S$  peut posséder aussi des bouts ne correspondant à aucune composante connexe de  $O(\Gamma)$ . Pour plus de clarté, nous rappelons brièvement la définition et la classification des bouts de  $S$  donnée par P. Eberlein (voir [9]):

DÉFINITIONS 1.15. Un bout de  $S$  est la donnée d'une fonction  $\Omega$  qui à chaque compact  $K \subset S$  associe une composante connexe de  $S \setminus K$  vérifiant  $\Omega(K_1) \subseteq \Omega(K_2)$  si  $K_1 \supseteq K_2$ .

Un voisinage ouvert  $U$  d'un bout  $\Omega$  est un ouvert de  $S$  qui contient  $\Omega(K)$  pour un certain compact  $K$ .

Une suite de points  $(p_n)_n$  de  $S$  (resp. de courbes fermées  $(C_n)_n$ ) converge vers un bout  $\Omega$  si pour tout voisinage  $U$  de  $\Omega$ , tout point  $p_n$  (resp. toute courbe  $C_n$ ) appartient à  $U$  (resp. est contenue dans  $U$ ) pour  $n$  assez grand.

Un bout est dit tubulaire s'il admet un voisinage homéomorphe à  $\mathbf{R}_+^* \times S^1$ . Dans ce cas, on appelle paramétrisation tubulaire riemannienne de  $U$  un système de coordonnées  $x : \mathbf{R}_+^* \times S^1 = \{(r, \theta)\} \rightarrow U$  dans lequel la métrique sur  $U$  s'écrit  $dg^2 = dr^2 + G^2(r, \theta)d\theta^2$  où  $G$  est une fonction continue des deux variables et telle que pour tout  $\theta$ , la fonction  $r \mapsto G(r, \theta)$  est deux fois dérivable et convexe ( $K = -\frac{G_r''}{G} \leq 0$ ).

Lorsque la fonction  $G$  ne dépend que de  $r$ , on dira que  $\Omega$  est un bout de révolution.

La surface  $S$  étant supposée de type fini, les bouts de  $S$  sont en nombre fini et sont tous tubulaires. P. Eberlein montre qu'un bout  $\Omega$  possède toujours une paramétrisation riemannienne, et que chaque bout est en correspondance biunivoque avec une suite de courbes fermées  $(C_n)_n$  convergeant vers ce bout et appartenant à une même classe d'homotopie libre. Associons à un bout  $\Omega$  :

- 1) les classes de conjugaison  $\Gamma_\Omega$  d'éléments de  $\Gamma$ , qui sont en correspondance avec les classes d'homotopie libre de courbes fermées dont une suite converge vers  $\Omega$ . On peut démontrer que  $\Gamma_\Omega = \{\gamma \cdot \varphi^n \cdot \gamma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma, n \in \mathbf{Z}\}$  pour un élément  $\varphi \in \Gamma$  unique à conjugaison et à passage à l'inverse près ([9], prop. 4.4),
- 2) l'ensemble  $V(\Omega)$  des points  $v$  de  $T_1S$  tels que, pour tout voisinage  $U$  de  $\Omega$ , il existe  $t_0 \geq 0$  avec  $\sigma_v([t_0, +\infty[) \subset U$ .

P. Eberlein propose dans un premier temps la classification suivante des bouts de  $S$  (voir [9]).

CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES BOUTS. *Soit  $\Omega$  un bout de  $S$  et  $(C_n)$  une suite de courbes  $C^\infty$  par morceau, homotopiquement non triviales, qui convergent vers  $\Omega$ . On a les 4 possibilités suivantes qui s'excluent mutuellement :*

- (a) *l'ensemble  $V(\Omega)$  est ouvert et il existe une suite de courbes  $(C_n)_n$  de longueur uniformément bornée,*
- (b) *la suite des longueurs n'est majorée pour aucune suite de courbes  $(C_n)_n$ ,*
- (c) *l'ensemble  $V(\Omega)$  est d'intérieur vide et il existe une suite de courbes  $(C_n)_n$  dont la longueur est uniformément bornée,*
- (d) *l'ensemble  $V(\Omega)$  n'est pas d'intérieur vide mais n'est pas ouvert et il existe une suite de courbes  $(C_n)_n$  de longueur uniformément bornée.*

REMARQUE. Dans le cas (b), l'ensemble  $V(\Omega)$  est nécessairement ouvert (voir [9]).

Si la métrique dans le bout est de la forme  $dg^2 = dr^2 + G^2(r, \theta)d\theta^2$ , la fonction longueur  $L$  définie par

$$L(r) = \int_0^{2\pi} G(r, \theta) d\theta \quad (r \geq 0)$$

est convexe et admet par conséquent une limite dans  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ . On peut alors classer les bouts de  $S$  selon la nature de la fonction longueur :

CLASSIFICATION PARAMÉTRIQUE DES BOUTS. Soit  $\Omega$  un bout de  $S$  et  $L$  la fonction longueur associée naturellement à la paramétrisation tubulaire de  $\Omega$ . On a les 4 possibilités suivantes qui s'excluent mutuellement :

- (a') la fonction  $L$  est constante pour  $r$  assez grand,
- (b') la fonction  $L$  tend vers  $+\infty$ ,
- (c') la fonction  $L$  est strictement décroissante et tend vers  $l = 0$ ,
- (d') la fonction  $L$  est strictement décroissante et tend vers  $l > 0$ .

P. Eberlein a montré que (a)  $\Rightarrow$  (a') et (b)  $\Rightarrow$  (b'). Il résulte aussi de sa discussion que dans les cas (c) et (d), la fonction longueur est strictement décroissante. Dans le cas des bouts de révolution, la relation de Clairaut permet aussi de préciser que ces deux cas se distinguent par  $l = 0$  et  $l > 0$  respectivement; autrement dit (c)  $\Rightarrow$  (c') et (d)  $\Rightarrow$  (d'). Ainsi, les deux classifications précédentes sont équivalentes dans le cas des bouts de révolution et P. Eberlein conjecture que cette propriété reste vraie dans le cas général. La proposition C apporte une réponse positive à cette question.

*Démonstration de la proposition C.* Compte tenu de la proposition 4.5 de [9], il suffit d'établir le

LEMME 1.16. Soit  $\Omega$  un bout de  $S$  appartenant aux cas (c) ou (d). Alors  $V(\Omega)$  est d'intérieur vide (cas (c)) si et seulement si

$$l := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} G(r, \theta) d\theta = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\overset{\circ}{I} = ]\eta_1, \eta_2[$  une composante connexe de  $O(\Gamma)$  associée à  $\Omega$  et  $\varphi \in \Gamma_\Omega$  une isométrie parabolique laissant fixe point par point chaque élément de  $I = [\eta_1, \eta_2]$  et vérifiant  $\eta_1 = \lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi^n p$  et  $\eta_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n p$  (si  $\varphi$  est primitive, elle est unique à une puissance positive près). Notons  $\eta$  l'unique point de  $I$  tel que  $\varphi$  fixe toutes les horosphères centrées en  $\eta$  (lorsque  $I$  est réduit à un point, on a  $\eta = \eta_1 = \eta_2$ ). Avec ces notations, dire que  $V(\Omega)$  est d'intérieur non vide, c'est dire que  $I$  est d'intérieur non vide. La démonstration du lemme repose essentiellement sur le fait que

$$l = m_\varphi.$$

Montrons cette égalité. Notons  $C_r$  (pour  $r \geq 0$ ) la courbe fermée  $\theta \mapsto (r, \theta)$  (dans la paramétrisation tubulaire de  $\Omega$ ). Cette courbe se relève en une horosphère centrée en  $\eta$  que nous noterons  $\partial\mathcal{H}_r$ . Fixons alors un réel  $t \geq 0$  et un point  $p$  de  $\partial\mathcal{H}_t$ ; pour tout  $n \geq 1$ , le segment géodésique  $\sigma_n$  joignant  $p$  à  $\varphi^n p$  a pour longueur  $d(p, \varphi^n p)$  et on note  $r_n(p)$  la plus grande valeur du paramètre  $r$  telle que  $\sigma_n \cap \partial\mathcal{H}_r \neq \emptyset$ . La fonction  $r \mapsto G(r, \theta)$  est décroissante puisqu'elle est positive, convexe et que  $r \mapsto L(r)$  est bornée; on a alors  $L(r_n(p)) \leq \frac{d(p, \varphi^n p)}{n} \leq L(t)$ . Puisque  $r_n(p) \rightarrow +\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , il vient  $l \leq m_\varphi \leq L(t)$ ; la valeur de  $t$  étant arbitraire on a bien l'égalité annoncée.

Utilisons maintenant la Proposition 1.12 ii) et la remarque 1.4. Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a  $nl = B_{\eta_1}(\varphi^n p, p) = -B_{\eta_2}(\varphi^n p, p)$ ; lorsque  $l > 0$ , la fonction  $q \mapsto B_{\eta_1}(q, p) - B_{\eta_2}(q, p)$  n'est pas bornée donc  $\eta_1 \neq \eta_2$ ; en revanche, lorsque  $l = 0$ , l'isométrie  $\varphi$  préserve les horosphères centrées en  $\eta_1$  et  $\eta_2$  et l'on a  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$  d'après la Proposition 1.12 iii).  $\square$

Nous pouvons adopter la

**DÉFINITION 1.17.** Un bout  $\Omega$  de  $S$  est dit: *cylindrique* dans les cas (a) ou (a'), *expansif* dans les cas (b) ou (b'), *parabolique simple* dans les cas (c) ou (c') et *parabolique exceptionnel* dans les cas (d) ou (d')

Pour terminer ce paragraphe, rappelons qu'à chaque composante connexe  $C$  de  $O(\Gamma)$ , on associe naturellement un bout de  $S$ . En effet, si  $\sigma$  est un rayon géodésique de  $X$  vérifiant  $\sigma(+\infty) \in C$ , il existe un bout  $\Omega$  de  $S$  tel que la projection de  $\sigma$  sur  $S$  converge vers  $\Omega$ . Dans le cas contraire, il existerait un compact  $K \subset X$ , une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  et une suite  $(\gamma_n)$  d'éléments distincts de  $\Gamma$  tels que  $\gamma_n \cdot \sigma(t_n) \in K$  ou encore  $\sigma(t_n) \in \gamma_n^{-1} \cdot K$ . D'autre part, quitte à extraire une sous-suite, on a  $\gamma_n^{-1} \cdot K \rightarrow \xi \in \Lambda_\Gamma$ , ce qui contredit le fait que  $\sigma(+\infty)$  appartient à  $C$ .

Dans [9], P. Eberlein a donné une description précise de cette correspondance entre composantes connexes de  $O(\Gamma)$  et bouts de  $S$ , reliée à la nature des éléments de  $\Gamma$ . En particulier, si  $\varphi$  est une isométrie parabolique exceptionnelle, les horosphères centrées au point privilégié  $\eta$  se projettent sur les courbes  $C_r : \theta \mapsto G(r, \theta)$  introduites dans la démonstration précédente, et ces courbes bordent un voisinage du bout, tandis que les courbes  $r \mapsto G(r, \theta)$ , à  $\theta$  fixé, admettent un relevé qui est un rayon géodésique représentant ce même point privilégié. De plus, lorsque le bout est de révolution, les horosphères

centrées en  $\eta$  (le point fixe privilégié) se projettent sur les parallèles et la relation de Clairaut s'écrit  $f(v) \cos \theta_v = l$  pour un rayon géodésique qui se relève en un rayon représentant la direction limite. Lorsque  $v \rightarrow +\infty$ ,  $f(v) \rightarrow l$  donc  $\theta_v \rightarrow 0$  et  $\angle_{\pi^{-1}(\bar{x}(v,u))}(\eta_1, \eta_2) = \pi - 2\theta_v \rightarrow \pi$  lorsque  $v \rightarrow +\infty$  ce qui entraîne  $\mathcal{H}_{\eta_1}(\infty) \cap \mathcal{H}_{\eta_2}(\infty) = \{\eta\}$  dans ce cas. Il semble que cette dernière égalité reste vraie dans le cas général mais ceci n'est pas démontré (voir remarque 1.14).

En revanche, on peut associer une isométrie axiale à un bout si et seulement si cette isométrie fixe *globalement* l'adhérence d'une composante connexe de  $O(\Gamma)$  et elle la fixe point par point si et seulement si le bout est cylindrique. Enfin, une isométrie parabolique simple n'est reliée à aucune composante connexe.

Ainsi, les couples de points qui ne peuvent pas être joints par une géodésique sont dans l'adhérence d'une même composante connexe de  $O(\Gamma)$  correspondant à un parabolique exceptionnel, ou, éventuellement, dans une même composante connexe de  $O(\Gamma)$  correspondant à un bout expansif ou cylindrique.

#### 1.4 ACTION DE $\Gamma$ SUR $\Lambda_\Gamma$

Notons  $\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma$  le produit cartésien de l'ensemble limite, privé de la diagonale. Nous précisons dans un premier temps la dynamique topologique de l'action de  $\Gamma$  sur son ensemble limite :

LEMME 1.18. *Soit  $\eta \in \Lambda_\Gamma$  ; il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et au plus deux points  $\eta_0, \eta_1 \in \Lambda_\Gamma$  tels que pour tout point  $\xi \in \Lambda_\Gamma \setminus \{\eta_0, \eta_1\}$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \cdot \xi = \eta.$$

*En particulier, l'action de  $\Gamma$  sur son ensemble limite est minimale.*

*Démonstration.* Soit  $(\bar{\gamma}_k)_k$  une suite d'éléments de  $\Gamma$  telle que  $\bar{\gamma}_k \cdot p \rightarrow \eta$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Supposons qu'il existe  $\eta_0 \in \Lambda_\Gamma$  tel que  $\bar{\gamma}_k \cdot \eta_0 \not\rightarrow \eta$ . Il existe alors une sous-suite  $\gamma_n := \bar{\gamma}_{k_n}$  telle que  $\gamma_n \cdot \eta_0 \rightarrow \eta' \neq \eta$ . Le point  $\eta_0$  est joignable à tout point de  $\Lambda_\Gamma$  sauf peut-être un point  $\eta_1$  et dans ce cas  $\eta_0, \eta_1$  bordent tous deux une même composante connexe associée à un bout parabolique exceptionnel. Soit  $\sigma$  une géodésique joignant  $\eta_0$  à  $\xi \in \Lambda_\Gamma \setminus \{\eta_0, \eta_1\}$  et  $V(\eta)$  un voisinage fermé de  $\eta$  dans  $\bar{X}$  bordé par une géodésique. Supposons que  $\gamma_n \xi \not\rightarrow \eta$  ; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\gamma_n \xi \rightarrow \eta'' \neq \eta$ . La suite de géodésiques  $\sigma_n(\mathbf{R}) := \gamma_n(\sigma(\mathbf{R}))$

rencontre nécessairement l'intérieur de  $V(\eta)$  pour  $n$  assez grand puisque  $\gamma_n \cdot \sigma(0) \rightarrow \eta$  et ses extrémités sont en dehors de  $V(\eta)$  puisque  $\eta'$  et  $\eta''$  sont distincts de  $\eta$ . Donc, pour  $n$  assez grand, les points d'entrée et de sortie de  $\sigma_n$  dans  $V$  sont conjugués; ceci est absurde. Conservons les notations précédentes; pour montrer la minimalité, il suffit de montrer que la trajectoire de tout point  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  sous l'action de  $\Gamma$  rencontre  $V(\eta) \cap X(\infty)$  pour tout point  $\eta \in \Lambda_\Gamma$ . Fixons ce dernier point ainsi que  $V(\eta)$  et soient  $\eta_0, \eta_1$  les deux points éventuellement définis par la discussion précédente. Si  $\xi \in \Lambda_\Gamma \setminus \{\eta_0, \eta_1\}$ , on a  $\{\gamma_n \cdot \xi; n \in \mathbb{N}\} \cap V(\eta) \neq \emptyset$ . Si les deux points  $\eta_0$  et  $\eta_1$  existent effectivement et si  $\varphi$  est une isométrie axiale quelconque,  $\varphi(\{\eta_0, \eta_1\}) \cap \{\eta_0, \eta_1\} = \emptyset$ , donc, pour  $i = 0, 1$ , on a  $\{(\gamma_n \varphi) \cdot \eta_i; n \in \mathbb{N}\} \cap V(\eta) \neq \emptyset$ . S'il n'existe qu'un seul point  $\eta_0$  tel que  $\gamma_n \cdot \eta_0 \not\rightarrow \eta$ , le raisonnement précédent vaut encore en choisissant une isométrie  $\varphi$  qui ne fixe pas  $\eta_0$ .  $\square$

REMARQUE 1.19. On déduit sans difficulté de la minimalité de l'action que toute paire de points  $(\xi, \eta) \in \Lambda_\Gamma^2$  est  $\Gamma$ -duale, c'est-à-dire qu'il existe une suite  $(\gamma_n)$  d'éléments de  $\Gamma$  telle que pour tout point  $p \in X$ , on a  $\gamma_n \cdot p \rightarrow \xi$  et  $\gamma_n^{-1} \cdot p \rightarrow \eta$ . C'est en général cette propriété de  $\Gamma$ -dualité qui permet d'obtenir la minimalité de l'action de  $\Gamma$  sur son ensemble limite (voir [10] Prop. 1.9.13 et [12]).

Soit  $\gamma$  une isométrie axiale et  $\sigma$  un axe orienté de  $\gamma$ . Les points de  $X(\infty)$ :  $\sigma(\pm\infty) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \gamma^n \cdot p$  ne dépendent pas de l'axe choisi et on les note  $\gamma^\pm$ . On déduit du résultat précédent le

COROLLAIRE 1.20.  $\mathcal{A} = \{(\gamma^+, \gamma^-); \gamma \text{ isométrie axiale}\}$  est dense dans  $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ .

*Démonstration* [1]. Il suffit de montrer la densité dans  $\Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma$ . Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts non vides de  $\Lambda_\Gamma$ , d'intersection vide. Soit  $\gamma_0^+$  le point fixe attractif d'une isométrie axiale. D'après le lemme précédent, l'orbite sous  $\Gamma$  de  $\gamma_0^+$  rencontre  $U$ . Elle est constituée de points fixes attractifs donc il existe  $\gamma$  isométrie axiale telle que  $\gamma^+ \in U$ . Soit  $g \in \Gamma$  une isométrie dont les points fixes ne sont pas ceux de  $\gamma$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, les deux points fixes attractif et répulsif de l'isométrie axiale  $a := \gamma^n g \gamma^{-n}$  sont dans  $U$ . On construit de la même manière une isométrie axiale  $b$  dont les deux points fixes sont dans  $V$ . Pour  $m$  assez grand, on a  $a^m(V) \subset a^m(U^c) \subset U$  et  $b^m(U) \subset b^m(V^c) \subset V$ . Par conséquent,  $a^m b^m(U) \subset U$  et  $a^m b^m(V) \subset V$  donc,

par le théorème du point fixe, l'isométrie axiale  $a^m b^m$  admet un point fixe dans  $U$  et un point fixe dans  $V$ .  $\square$

REMARQUE 1.21. Une isométrie est dite axiale hyperbolique si elle admet un axe qui ne borde pas de demi-plan plat. Les seules isométries axiales qui ne sont pas hyperboliques sont les relevés des rotations d'angle  $2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) dans les bouts cylindriques (pour la paramétrisation tubulaire riemannienne). Ainsi, dans l'énoncé du corollaire 1.20, on peut se restreindre aux isométries axiales hyperboliques. De ce corollaire, on déduit alors, comme dans [10], Prop. 4.5.15, le *lemme de fermeture*: si  $\epsilon > 0$  est assez petit, s'il existe  $U_\epsilon \subset T_1 S$  voisinage de  $v$  de diamètre inférieur ou égal à  $\epsilon$  et  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $g_t(v) \in U_\epsilon$ , on peut trouver  $v' \in U_\epsilon$  et  $t' \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$  tels que  $g_{t'}(v') = v'$ . Ce lemme de fermeture est utile pour démontrer le Théorème A.

## 2. PRODUIT DE GROMOV ET BIRAPPORT

### 2.1 UNE PSEUDO-DISTANCE SUR L'ENSEMBLE LIMITE

Le produit de Gromov de deux points  $q$  et  $r$  de  $X$  vus d'un point  $p$  est la quantité positive

$$(q|r)_p = \frac{1}{2} \left( d(p, q) + d(p, r) - d(q, r) \right).$$

L'interprétation géométrique est la suivante: si  $S_p(q)$  et  $S_p(r)$  sont respectivement les sphères de centre  $q$  et  $r$  passant par  $p$ , le segment géodésique  $\sigma_{qr}$  rencontre  $S_p(q) \cup S_p(r)$  en deux points  $x, y$  et l'on a  $(q|r)_p = d(x, y)/2$ . Il résulte de l'inégalité triangulaire que  $0 \leq (q|r)_p \leq d(p, \sigma_{qr})$ ; d'autre part, pour tout  $\gamma \in Is(X)$ , on a  $(\gamma q|\gamma r)_{\gamma p} = (q|r)_p$ .

Lorsque la courbure de  $X$  est majorée par  $-a^2$  avec  $a > 0$ , on peut prolonger de façon continue le produit de Gromov sur  $X(\infty) \times X(\infty) \setminus Diagonale$ , prolongement dont l'interprétation géométrique est la suivante: si  $\xi$  et  $\xi'$  sont deux points quelconques de  $X(\infty)$ , la demi-longueur du segment géodésique  $(\xi\xi') \cap \mathcal{H}_\xi(p) \cap \mathcal{H}_{\xi'}(p)$  vaut  $(\xi|\xi')_p$ . D'autre part, l'application

$$D_p: X(\infty) \times X(\infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$$

$$(\xi, \eta) \mapsto \begin{cases} e^{-a(\xi|\eta)_p} & \text{si } \xi \neq \eta \\ 0 & \text{si } \xi = \eta \end{cases}$$

est une distance (voir [5]). L'intérêt majeur de cette famille de distances (indexée par  $p \in X$ ) est qu'elle permet de définir une structure conforme

sur  $X(\infty)$ . En effet, les isométries de  $X$  agissent comme des transformations conformes sur  $(X(\infty), D_p)$ , comme il résulte de la formule des accroissements finis :

$$(AF) \quad D_p(\gamma \cdot \xi, \gamma \cdot \xi') = |\gamma'(\xi)|_p^{1/2} |\gamma'(\xi')|_p^{1/2} D_p(\xi, \xi'),$$

le facteur conforme en  $\xi \in X(\infty)$  pour l'action de  $\gamma \in Is(X)$  sur le bord étant

$$|\gamma'(\xi)|_p := \lim_{\xi' \rightarrow \xi} \frac{D_p(\gamma \cdot \xi, \gamma \cdot \xi')}{D_p(\xi, \xi')} = e^{-a\mathcal{B}_\xi(\gamma^{-1}p, p)}$$

comme il résulte de la formule de cocycle vérifiée par les fonctions de Busemann (voir encore [5] pour l'intérêt de considérer une structure conforme sur le bord).

Dans notre contexte, la présence de bouts cylindriques ou paraboliques exceptionnels produit des phénomènes singuliers que nous allons préciser. Toutefois, il est possible de construire par un procédé analogue une famille d'applications  $(D_p)_{p \in X}$  continues sur  $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ , en définissant un produit de Gromov à valeurs dans  $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . Pour  $p$  fixé, l'application  $D_p$  n'est pas une distance sur l'ensemble limite mais satisfait encore une inégalité des accroissements finis, puisque cette dernière se déduit mécaniquement des propriétés de cocycle et d'invariance des fonctions de Busemann, valables sans restriction sur la courbure.

*Démonstration du Théorème B.* Dans le courant de la démonstration,  $\xi, \xi'$  désignent deux points distincts de  $\Lambda_\Gamma$ , et  $(q_n)_n, (r_n)_n$  deux suites de points de  $X$  convergeant respectivement vers  $\xi$  et  $\xi'$ ; on notera alors  $\sigma_n$  l'unique géodésique joignant  $q_n$  à  $r_n$ . Lorsque  $\xi$  et  $\xi'$  bordent une composante connexe de  $O(\Gamma)$  associée à un bout cylindrique ou parabolique exceptionnel,  $\sigma_n(\mathbf{R})$  peut s'accumuler sur le bord à l'infini. Ce phénomène nous contraint de considérer deux cas, dans chacun des lemmes qui suivent. Dans le cas ii) de chaque lemme, nous sommes tenus de supposer que les points  $q_n$  et  $r_n$  restent à l'extérieur des horoboules centrées respectivement en  $\xi$  et  $\xi'$ . Un raisonnement élémentaire dans le cas euclidien permet de se convaincre que cette hypothèse est indispensable. Toutefois, elle n'altère pas la propriété de continuité du produit de Gromov sur l'ensemble limite.

LEMME 2.1. *Supposons que  $\xi$  et  $\xi'$  sont joignables par une géodésique  $\sigma$ . Si  $q$  est un point de  $\sigma(\mathbf{R})$ , alors la longueur du segment géodésique  $\sigma \cap \mathcal{H}_\xi(p) \cap \mathcal{H}_{\xi'}(p)$  vaut*

$$l = \mathcal{B}_\xi(p, q) + \mathcal{B}_{\xi'}(p, q).$$

Cette longueur ne dépend ni de la géodésique choisie reliant  $\xi$  à  $\xi'$ , ni du point  $q$  sur cette géodésique. De plus :

- i) Si la géodésique  $\sigma$  (toute géodésique  $\sigma$ ) joignant  $\xi$  à  $\xi'$  ne borde pas de demi-plan plat, alors  $((q_n|r_n)_p)_n$  converge vers  $l/2$ .
- ii) Si la géodésique  $\sigma$  borde un demi-plan plat et si les points  $q_n$  et  $r_n$  restent à l'extérieur de ce demi-plan plat,  $((q_n|r_n)_p)_n$  converge encore vers  $l/2$ .

*Démonstration.* L'indépendance de  $l$  par rapport à la géodésique  $\sigma$  vient directement de ce que deux géodésiques joignant les deux mêmes points à l'infini bordent une bande plate et l'indépendance par rapport au point choisi sur la géodésique résulte directement de la propriété de cocycle satisfaite par les fonctions de Busemann.

Fixons deux horoboules disjointes  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  basées respectivement en  $\xi$  et  $\xi'$ , telles que  $p$  est extérieur à ces horoboules. Notons  $H$  (resp.  $h$  et  $h'$ ) la longueur de  $\sigma \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{H}')^c$  (resp.  $[p\xi] \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{H}')^c$  et  $[p\xi'] \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{H}')^c$ ). Posons  $(\xi|\xi')_p = h + h' - H$  et remarquons que ce nombre est indépendant du choix des horoboules  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  et de la géodésique  $\sigma$  (lorsque plusieurs choix sont possibles).

Posons  $x = [p\xi] \cap \partial\mathcal{H}$  et  $x' = [p\xi'] \cap \partial\mathcal{H}'$ . Comme  $q_n \rightarrow \xi$  et  $r_n \rightarrow \xi'$ , pour  $n$  assez grand, les segments géodésiques  $[pq_n]$  et  $[pr_n]$  coupent respectivement  $\partial\mathcal{H}$  et  $\partial\mathcal{H}'$  en  $x_n$  et  $x'_n$  et l'on a  $x_n \rightarrow x$  et  $x'_n \rightarrow x'$ ; par conséquent  $d(p, x_n) \rightarrow d(p, x) = h$  et  $d(p, x'_n) \rightarrow d(p, x') = h'$ . De plus, pour  $n$  assez grand, le segment  $[q_n r_n]$  coupe les horosphères  $\partial\mathcal{H}$  et  $\partial\mathcal{H}'$  et l'on pose  $[y_n y'_n] = [q_n r_n] \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{H}')^c$ .

i) La géodésique  $\sigma$  ne borde pas un demi-plan plat. Il existe  $R \geq 0$  tel que  $\sigma$  ne borde pas de bande plate de largeur  $> R$ ; on note  $R_\sigma$  la borne inférieure de ces réels  $R$ . Le lemme III.3.1 de [2] montre alors que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe dans  $\bar{X}$  des voisinages  $U$  de  $\xi$  et  $U'$  de  $\xi'$  tels que tout point de  $U$  peut être joint à tout point de  $U'$  par une géodésique passant à une distance inférieure à  $R_\sigma + \epsilon$  de  $\sigma(0)$ . On fixe  $\epsilon > 0$ ; pour  $n$  assez grand, on a donc  $d([q_n r_n], \sigma(0)) < R_\sigma + \epsilon$ . Ainsi, le segment géodésique  $[q_n, r_n]$  reste dans un  $\epsilon$ -voisinage de la bande plate de largeur maximale bordée par  $\sigma$  (si celle-ci existe); le choix de  $\epsilon$  étant arbitraire, on conclut que  $d(y_n, y'_n) \rightarrow H$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

ii) La géodésique  $\sigma$  borde un demi-plan plat. Elle se projette alors sur la surface en une géodésique périodique bordant un bout cylindrique. Il existe alors  $\eta$  entre  $\xi$  et  $\xi'$  tel que  $\bar{\mathcal{H}} \cap X(\infty) = [\xi, \eta]$  et  $\bar{\mathcal{H}}' \cap X(\infty) = [\eta, \xi']$ . L'hypothèse faite sur  $q_n$  et  $r_n$  entraîne que  $\sigma_n(\mathbf{R}) \cap \sigma(\mathbf{R}) = \emptyset$  et par conséquent

la suite  $(d(p, \sigma_n(\mathbf{R})))_n$  est bornée. Par le théorème d'Ascoli, la suite  $\sigma_n$  est relativement compacte et ses valeurs d'adhérence sont des géodésiques joignant  $\xi$  et  $\xi'$  restant à distance bornée de  $p$ . Ce dernier point, ajouté à un argument élémentaire de géométrie euclidienne, montre que  $d(y_n, y'_n) \rightarrow H$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

En conclusion, on a  $d(p, x_n) + d(p, x'_n) - d(y_n, y'_n) \rightarrow h + h' - H$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Il nous reste à montrer que  $d(x_n, q_n) + d(x'_n, r_n) - d(y_n, q_n) - d(y'_n, r_n)$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Puisque  $(q_n)_n$  converge vers  $\xi$ , la suite de fonctions  $(x, y) \mapsto d(x, q_n) - d(y, q_n)$  converge uniformément sur les compacts vers  $B_\xi(\cdot, \cdot)$ ; en reprenant les deux cas ci-dessus et en remarquant que  $x_n$  et  $y_n$  appartiennent à  $\partial\mathcal{H}'$  on vérifie que  $d(x_n, q_n) - d(y_n, q_n)$  tend vers 0. Il en est de même pour  $d(x'_n, q_n) - d(y'_n, r_n)$ .

Notons que par définition  $(\xi|\xi')_p$  ne dépend pas du choix de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$ . On peut par conséquent s'affranchir de la condition  $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \emptyset$ ; en particulier, lorsque  $\partial\mathcal{H}$  et  $\partial\mathcal{H}'$  passent toutes les deux par  $p$ , on retrouve la définition «classique», à savoir que  $(\xi|\xi')_p$  est égal à l'opposé de la demi-longueur du segment géodésique  $(\xi\xi') \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ .

Lorsque  $\xi = \eta_1$  et  $\xi' = \eta_2$  sont les points fixes respectivement répulsif et attractif d'une isométrie parabolique exceptionnelle  $\varphi$ , ils ne sont plus joignables de sorte que  $(\eta_1|\eta_2)_p$  ne peut pas être défini comme précédemment. Pour tout  $t > 0$  et  $i = 1, 2$ , on note  $\mathcal{H}_i(t)$  l'horoboule centrée en  $\eta_i$  et située à distance  $t \geq 0$  du point  $p$  et  $\partial\mathcal{H}_i(t)$  l'horosphère qui la borde. Avec ces notations, on a le

LEMME 2.2. *Soient  $(q_n)_n$  et  $(r_n)_n$  deux suites de  $X$  convergeant respectivement vers  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .*

- i) *Supposons  $\mathcal{H}_1(s) \cap \mathcal{H}_2(t) \neq \emptyset$  pour tous réels positifs  $s$  et  $t$ . Alors,*  

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n|r_n)_p = +\infty.$$
- ii) *Supposons a contrario que  $t_0 = \sup\{t/\mathcal{H}_1(0) \cap \mathcal{H}_2(t) \neq \emptyset\} < +\infty$ . Alors, si, pour tout  $n$ , les points  $q_n$  et  $r_n$  sont extérieurs aux horoboules  $\mathcal{H}_1(0)$  et  $\mathcal{H}_2(t_0)$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n|r_n)_p = t_0/2.$$

Notons que, de la propriété de cocycle, il résulte l'égalité:

$$t_0 = \sup\{s + t/\mathcal{H}_1(s) \cap \mathcal{H}_2(t) \neq \emptyset\}$$

et en particulier  $t_0 = \sup\{t/\mathcal{H}_1(t) \cap \mathcal{H}_2(0) \neq \emptyset\}$ .

*Démonstration.* Si  $\mathcal{H}_1(s) \cap \mathcal{H}_2(t) \neq \emptyset$ , les horosphères  $\partial\mathcal{H}_1(s)$  et  $\partial\mathcal{H}_2(t)$  se coupent en un point unique noté  $x$ ; on a alors

$$2(q_n|r_n)_p \geq d(p, q_n) - d(x, q_n) + d(p, r_n) - d(x, r_n),$$

si bien que

$$(*) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} (q_n|r_n)_p \geq \frac{\mathcal{B}_{\eta_1}(p, x) + \mathcal{B}_{\eta_2}(p, x)}{2} = \frac{s+t}{2}.$$

Lorsque  $\mathcal{H}_1(s) \cap \mathcal{H}_2(t) \neq \emptyset$  pour tous réels positifs  $s$  et  $t$ , on peut choisir  $s$  et  $t$  arbitrairement grands dans  $(*)$  d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n|r_n)_p = +\infty$ . Le point i) est montré.

Supposons *a contrario* que  $t_0 = \inf\{t/\mathcal{H}_1(0) \cap \mathcal{H}_2(t) = \emptyset\} < +\infty$ . En appliquant  $(*)$  avec  $s = 0$  et  $t$  arbitrairement proche de  $t_0$  par valeurs inférieures, on obtient  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (q_n|r_n)_p \geq t_0/2$ .

Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, on utilise le fait que les points  $q_n$  et  $r_n$  sont extérieurs aux horoboules  $\mathcal{H}_1(0)$  et  $\mathcal{H}_2(0)$  si bien que le segment géodésique  $[q_n r_n]$  rencontre successivement  $\partial\mathcal{H}_1(0)$  et  $\partial\mathcal{H}_2(t_0)$  en  $q'_n, q''_n, r'_n$  et  $r''_n$ . On a  $d(q_n, r_n) \geq d(q_n, q''_n) + d(r_n, r''_n)$  car les horoboules  $\mathcal{H}_1(0)$  et  $\mathcal{H}_2(t_0)$  sont disjointes. Par ailleurs, chaque point  $q_n$  étant extérieur à l'horosphère  $\mathcal{H}_1(0)$ , la sphère de centre  $q_n$  et de rayon  $d(q_n, q''_n)$  rencontre transversalement  $\partial\mathcal{H}_1(0)$  en deux points, l'un situé près de  $q'_n$ , l'autre étant égal à  $q''_n$ . Par convexité des sphères et des horosphères, on a  $d(p, q_n) \leq d(q_n, q''_n)$ . De même, si  $r := \sigma_{p\xi}(t_0)$ , on a  $d(r, r_n) \leq d(r_n, r''_n)$ . Ainsi

$$\begin{aligned} (q_n|r_n)_p &\leq (d(p, q_n) - d(q_n, q''_n) + d(p, r_n) - d(r_n, r''_n))/2 \\ &\leq (d(p, r_n) - d(r, r_n))/2 \end{aligned}$$

et donc  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (q_n|r_n)_p \leq \mathcal{B}_{\eta_2}(p, r)/2 = t_0/2$ .  $\square$

On applique maintenant ces deux lemmes pour démontrer le Théorème B. Soient  $(\xi_n)_n$  et  $(\xi'_n)_n$  deux suites de  $\Lambda_\Gamma$  convergeant respectivement vers  $\xi$  et  $\xi'$ .

Dans un premier temps supposons que  $\xi$  et  $\xi'$  sont joignables par une géodésique  $\sigma$ ; on peut alors supposer que toutes les paires de points  $(\xi_n, \xi'_n)$  sont aussi joignables par des géodésiques (qui ne sont pas nécessairement uniques) puisque les seuls couples de points qui ne sont pas joignables bordent une même composante connexe de  $O(\Gamma)$ . On note  $\sigma_n$  une géodésique joignant  $\xi_n$  à  $\xi'_n$ . Rappelons que  $\xi_n \rightarrow \xi$  si et seulement si il existe des suites  $R_n \rightarrow +\infty$  et  $\epsilon_n \rightarrow 0$  telles que  $\xi_n \in U(\xi, R_n, \epsilon_n)$  où l'on a posé

$$U(\xi, R, \epsilon) = \{x \in \bar{X}/x \notin B(o, R) \text{ et } d(\sigma_{o\xi}(R), \sigma_{o\xi}(R)) < \epsilon\}.$$

Remarquons que pour tout  $n$ , on peut choisir  $\sigma_n$  de telle sorte qu'elle traverse l'ensemble  $U(\xi, R_n, \epsilon_n) \cap X$  et l'on peut alors fixer un point  $q_n \in U(\xi, R_n, \epsilon_n) \cap \sigma_n$ . Quitte à modifier les valeurs de  $R_n$  et  $\epsilon_n$  on peut de même supposer que  $\xi'_n \in U(\xi', R_n, \epsilon_n)$  et choisir un point  $r_n \in U(\xi', R_n, \epsilon_n) \cap \sigma_n$ ; sans perdre en généralité on peut prendre  $q_n$  et  $r_n$  assez proches respectivement de  $\xi_n$  et  $\xi'_n$  de façon à avoir  $(\xi_n | \xi'_n)_p - (q_n | r_n)_p \rightarrow 0$ . Comme  $R_n \rightarrow +\infty$  et  $\epsilon_n \rightarrow 0$  on a  $q_n \rightarrow \xi$  et  $r_n \rightarrow \xi'$  si bien que la suite  $((q_n | r_n)_p)_n$  converge d'après le lemme 2.1. Il en est de même pour la suite  $((\xi_n | \xi'_n)_p)_n$ .

Supposons à présent que  $\xi$  et  $\xi'$  ne sont pas joignables par une géodésique. Puisque ces deux points appartiennent à  $\Lambda_\Gamma$ , ce sont nécessairement les points fixes attractif et répulsif d'une transformation parabolique exceptionnelle. Les points  $\xi_n, \xi'_n$  sont eux nécessairement extérieurs à  $[\xi\xi']$  et sont donc joignables par une géodésique  $\sigma_n$ . Comme précédemment, on choisit des points  $q_n$  et  $r_n$  sur  $\sigma_n$ , proches respectivement de  $\xi_n$  et  $\xi'_n$ , de façon à avoir  $(\xi_n | \xi'_n)_p - (q_n | r_n)_p \rightarrow 0$ , et on peut supposer que ces points vérifient encore les hypothèses du lemme 2.2. On conclut de la même façon.

Enfin, si  $\xi_n \in \Lambda_\Gamma \rightarrow \xi \in \Lambda_\Gamma$ , pour  $n$  assez grand, les points  $\xi_n$  et  $\xi$  sont joignables par une géodésique  $\sigma_n$  et l'on a, pour  $p_n \in \sigma_n(\mathbf{R})$  quelconque,

$$(\xi_n | \xi)_o = \frac{1}{2} (\mathcal{B}_{\xi_n}(o, p_n) + \mathcal{B}_\xi(o, p_n)) \geq d(o, \sigma_n(\mathbf{R})) \rightarrow +\infty$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

Cette démonstration permet ainsi de proposer une définition explicite du produit de Gromov entre points distincts de  $\Lambda_\Gamma$  :

DÉFINITION 2.3. Soient  $\xi$  et  $\xi'$  deux points de  $\Lambda_\Gamma$  et  $\mathcal{H}(s)$  (resp.  $\mathcal{H}'(t)$ ) l'horoboule centrée en  $\xi$  (resp. en  $\xi'$ ) et située à distance  $s \geq 0$  (resp.  $t \geq 0$ ) de  $p$ .

- 1)  $(\xi | \xi')_p = +\infty$  si  $\xi = \xi'$ ,
- 2) Si  $\xi$  et  $\xi'$  sont les points fixes attractif et répulsif d'une transformation parabolique exceptionnelle, on pose

$$(\xi | \xi')_p = \frac{1}{2} \sup\{s + t / \mathcal{H}(s) \cap \mathcal{H}'(t) \neq \emptyset\}.$$

- 3) Si  $\xi$  et  $\xi'$  sont joignables par une géodésique  $\sigma$ , la longueur  $l$  du segment  $\sigma \cap \mathcal{H}(0) \cap \mathcal{H}'(0)$  ne dépend pas de  $\sigma$  lorsque plusieurs choix sont possibles; on pose alors

$$(\xi | \xi')_p = l/2.$$

On pose enfin

$$D_p(\xi, \xi') = \begin{cases} e^{-(\xi|\xi')_p} & \text{si } \xi \neq \xi' \\ 0 & \text{si } (\xi|\xi')_p = +\infty \end{cases}$$

pour  $(\xi, \xi') \in \Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$ .

## 2.2 PRODUIT DE GROMOV ET BOUTS DE RÉVOLUTION

Donnons des exemples explicites où le produit de Gromov entre points fixes attractifs et répulsifs d'une isométrie parabolique exceptionnelle  $\varphi$  est fini ou infini. D'après ce qui précède, ce produit est la limite de la suite :

$$\begin{aligned} P_{nm} &= d(o, \varphi^n.o) + d(o, \varphi^{-m}.o) - d(\varphi^{-m}.o, \varphi^n.o) \\ &= d(o, \varphi^n.o) + d(o, \varphi^m.o) - d(o, \varphi^{n+m}.o) \end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de la quantité  $P_{nm}$  (dans le cas général) est la suivante : si l'on note  $\partial\mathcal{H}$  une horosphère basée au point privilégié  $\eta$ , et  $l_n$  la longueur de l'unique lacet géodésique basé en un point  $o \in \pi(\partial\mathcal{H}) = \text{Im}(u \mapsto x(u, 0))$  et qui fait  $n$  tours exactement avant de revenir en  $o$ , on a

$$P_{nm} = l_n + l_m - l_{n+m}.$$

Notons  $\sigma_n$  le lacet géodésique pointé en  $o$  qui fait  $n$  tours dans le bout parabolique exceptionnel avant de revenir en  $o$ ,  $v_n$  la hauteur à laquelle  $\sigma_n$  monte dans le bout et  $\theta_n = \angle_o(x^*(\frac{\partial}{\partial u}(0, 0), \dot{\sigma}_n(0)))$  l'angle entre la géodésique  $\gamma_n$  et l'horosphère centrée en  $\eta$  passant par  $o$ . Lorsque le bout parabolique exceptionnel est muni d'une métrique de révolution écrite en coordonnées locales dans un voisinage :  $dg^2 = dv^2 + f(v)^2 du^2$ , les relations entre  $v_n$  et  $n$  puis entre  $l_n$  et  $v_n$  se déduisent directement de la version intégrée de la relation de Clairaut (voir par ex. [6]) :

$$(S) \quad \begin{cases} n\pi = f(v_n) \int_0^{v_n} \frac{dv}{f(v)\sqrt{f^2(v) - f^2(v_n)}} \stackrel{\text{def}}{=} g_1(v_n), & (s_1) \\ l_n = 2 \int_0^{v_n} \frac{f(v)dv}{\sqrt{f^2(v) - f^2(v_n)}} \stackrel{\text{def}}{=} g_2(v_n). & (s_2) \end{cases}$$

EXEMPLE 1.  $f(v) = \sqrt{1 + \frac{1}{v}}$  ( $v \geq 1$ ) ; on trouve après un calcul élémentaire :

$$\begin{cases} g_1(x) = \sqrt{2(x^2 - 1)} + \frac{1}{2} \sqrt{(x^2 - 1)(x - 1)} \left( \pi - 2 \text{Arcsin} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1}} \right) \right), \\ g_2(x) = 2\sqrt{x} \left( (x+1) \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left( \frac{2}{x-1} \right) \right\} + \sqrt{2(x-1)} \right). \end{cases}$$

EXEMPLE 2.  $f(v) = \sqrt{1 + e^{-v}}$  ( $v \geq 0$ ); on trouve après un calcul analogue :

$$\begin{cases} g_1(x) = 2e^{x/2} \sqrt{1 + e^{-x}} \operatorname{Arctan} \left( e^{x/2} \sqrt{\frac{1 - e^{-x}}{2}} \right), \\ g_2(x) = e^{x/2} \left( 2\pi - 4 \operatorname{Arctan} \left( \sqrt{\frac{2}{e^x - 1}} \right) \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - e^{-x}}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 - e^{-x}}} \right). \end{cases}$$

Il est immédiat de constater, pour les deux exemples, que  $g_1$  et  $g_2$  sont strictement croissantes et continues donc inversibles ; le développement asymptotique de  $g_2 \circ g_1^{-1}$  (fastidieux mais élémentaire) donne :

$$l_n = 2n\pi + 2^{5/3} n^{2/3} (1 + \epsilon(n)) \quad (\text{exemple 1}),$$

$$l_n = 2n\pi + \ln(3 + 2\sqrt{2}) + \epsilon(n) \quad (\text{exemple 2}),$$

où  $\epsilon(n) \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, pour le premier exemple,  $P_{nm} \rightarrow +\infty$  tandis que pour le second,  $P_{nm} \rightarrow P_o < +\infty$  lorsque  $n$  et  $m$  convergent vers  $+\infty$ .

### 2.3 BIRAPPORT

Soient  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  quatre points deux à deux distincts de  $\Lambda_\Gamma$ . On souhaite définir le *birapport* de ces quatre points, à la manière de [14] par la quantité

$$(B) \quad [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] = \frac{D_p(\xi_1, \xi_3) D_p(\xi_2, \xi_4)}{D_p(\xi_1, \xi_4) D_p(\xi_2, \xi_3)}.$$

Lorsque aucun couple parmi les quatre points considérés ne borde une composante connexe  $C$  de  $O(\Gamma)$  associée à un bout parabolique exceptionnel, chaque quantité  $D_p(\xi_i, \xi_j)$  ( $i \neq j$ ) est strictement positive donc l'expression précédente est bien définie. Lorsque deux des quatre points bordent la composante  $C$ , chacun des deux est joignable aux deux autres (qui peuvent aussi border une autre composante connexe du même type). Par conséquent, dans le birapport, un ou les deux facteurs du dénominateur (ou du numérateur) peuvent s'annuler simultanément. Mais, si un des facteurs du numérateur s'annule, les deux facteurs du dénominateur *ne s'annulent pas*, et réciproquement. Par conséquent, on ne rencontre pas dans l'expression (B) de forme indéterminée du type  $\frac{0}{0}$  et le birapport, à valeurs dans  $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , est bien défini.

Notons que ce birapport est indépendant du point base  $p$  et invariant par l'action des isométries. Ceci résulte directement de la formule

$$(\xi|\xi')_{p'} = (\xi|\xi')_p + \frac{1}{2} \{ \mathcal{B}_\xi(p', p) + \mathcal{B}_{\xi'}(p', p) \}$$

valable pour tout  $(\xi, \xi') \in (\Lambda_\Gamma)^2$ .

Plus généralement, l'expression (B) est valable pour quatre points distincts de  $\bar{X}$  deux à deux joignables puisque le produit de Gromov entre tous les couples de points choisis parmi ces quatre points est fini. Cette remarque permet d'établir le lemme de J.P. Otal :

LEMME 2.4 ([14]). i) Soit  $\gamma$  une isométrie axiale. Alors, pour tout  $\xi \in X(\infty) \setminus \{\gamma^+, \gamma^-\}$  et pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , le birapport  $[\xi, \gamma^k(\xi), \gamma^+, \gamma^-]$  est bien défini et vaut  $e^{km_\gamma}$ .

ii) Soit  $\varphi$  une isométrie parabolique exceptionnelle qui fixe point par point l'adhérence de la composante connexe  $I = ]\eta_1, \eta_2[$  de  $O(\Gamma)$  avec  $\eta_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^n \cdot p$ . Alors, pour tout  $\xi \in X(\infty) \setminus \bar{I}^c$  et pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , le birapport  $[\xi, \varphi^k(\xi), \eta_2, \eta_1]$  est bien défini et vaut  $e^{km_\varphi}$ .

*Démonstration.* Elle est la même que celle de [14], en considérant pour le point i) un axe quelconque joignant  $\gamma^+$  à  $\gamma^-$  et pour le second point, une horosphère joignant  $\varphi^- := \eta_1$  à  $\varphi^+ := \eta_2$ , sur laquelle  $\varphi$  agit par translation.  $\square$

### 3. NON ARITHMÉTICITÉ DU SPECTRE ET CONSÉQUENCES

Nous nous contentons, pour éviter la paraphrase, de détailler les points de démonstration qui diffèrent du cas de la courbure négative majorée, cas traité dans [7] et [8]. Cela met en lumière le phénomène de l'hyperbolicité combinatoire (au sens de Gromov). En d'autres termes, il existe un rapport étroit entre la topologie de  $S$  et les propriétés dynamiques du flot géodésique sur la surface, indépendamment de la métrique choisie sur  $S$  : c'est la topologie de la surface ( $\Gamma$  est un groupe libre - les sous-groupes paraboliques maximaux ne contiennent pas de facteur  $\mathbf{Z}^k$  avec  $k \geq 2$ ) qui impose l'existence de points où la courbure est négative et par conséquent le caractère hyperbolique des systèmes dynamiques considérés.

#### 3.1 QUELQUES RAPPELS

On rappelle que le groupe  $\Gamma$  est à spectre arithmétique si l'ensemble  $\{m_\varphi ; \varphi \in \Gamma\}$  engendre un sous-groupe discret de  $\mathbf{R}$ . Le spectre des longueurs de  $\Gamma$  inclut par conséquent les longueurs asymptotiques dans les bouts paraboliques exceptionnels (voir la preuve du lemme 1.16). Ce point de vue justifie la terminologie d'isométrie mixte adoptée dans [4], puisqu'une isométrie parabolique exceptionnelle agit comme une translation sur une famille

d'horosphères dont la courbure géodésique converge vers zéro et la longueur de translation vers  $l$ , lorsque la suite des projections de ces horosphères converge dans le bout. Cet ajout, cependant, n'intervient pas de manière essentielle dans ce qui suit.

Fixons une origine  $o \in X$  ; l'ensemble des horosphères de  $X$  centrées en un point de  $\Lambda_\Gamma$  s'identifie à  $H_\Gamma := \Lambda_\Gamma \times \mathbf{R}_*^+$  par l'application qui à l'horosphère  $\partial\mathcal{H}_\xi(t) = \{x \in X ; \mathcal{B}_\xi(x, o) = t\}$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) associe  $(\xi, e^t)$ . Cette paramétrisation est naturelle au sens où l'action de  $\Gamma$  sur cette famille d'horosphères se traduit par l'action de  $\Gamma$  sur son ensemble limite et par la multiplication par l'inverse du facteur conforme, i.e.

$$\gamma.(\xi, s) = (\gamma.\xi, s|\gamma'(\xi)|_o^{-1}).$$

La densité d'une feuille  $\mathcal{F}(\pi(v))$  pour  $v \in T_1X$  tel que  $\xi = \sigma_v(+\infty) \in \Lambda_\Gamma$  se traduit exactement par  $\overline{\Gamma.(\xi, 1)} = H_\Gamma$ .

Le résultat qui suit correspond au lemme 1.3 de [7] et se démontre sans modification, compte tenu de la continuité de la fonction  $D = D_o$  démontrée dans la section 2.

LEMME 3.1 ([7]). *Soit  $\gamma_1$  une isométrie axiale ou parabolique exceptionnelle et  $\gamma_2$  une isométrie axiale n'ayant pas de point fixe en commun avec  $\gamma_1$ . On suppose qu'il existe une suite  $(r_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$  convergeant vers  $+\infty$  et une suite  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$  telles que  $r_n m_{\gamma_2} + s_n m_{\gamma_1}$  converge vers zéro. Alors,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_2^{r_n} \gamma_1^{s_n}.(\gamma_1^+, 1) = \left( \gamma_2^+, \frac{D^2(\gamma_1^+, \gamma_2^-)}{D^2(\gamma_2^+, \gamma_2^-)} \right).$$

### 3.2 LA PREUVE DU THÉORÈME A

On suit pas à pas la preuve de [7] pour établir i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  iii)  $\Rightarrow$  i).

i)  $\Rightarrow$  ii): on fixe une isométrie axiale ou parabolique exceptionnelle  $\gamma$ . Le lemme 3.1 et la densité des orbites périodiques dans la partie récurrente du flot géodésique (corollaire 1.20) donnent immédiatement

$$\left\{ h_\eta(\xi) := \left( \xi, \frac{D^2(\gamma^+, \eta)}{D^2(\xi, \eta)} \right) ; (\xi, \eta) \in \Lambda_\Gamma \overset{\Delta}{\times} \Lambda_\Gamma \right\} \subset \overline{\Gamma.(\gamma^+, 1)}.$$

La projection de  $\overline{\Gamma.(\gamma^+, 1)}$  sur le premier facteur étant égale à  $\Lambda_\Gamma$ , il suffit d'examiner la section  $\overline{\Gamma.(\gamma^+, 1)} \cap (\gamma^+, \mathbf{R}^+)$  et d'établir

$$\left\{ (\gamma^+, \exp\{2 \sum_{i=1}^p n_i m_{\gamma_i}\}) ; \gamma_i \text{ axiale, } n_i \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{N}^* \right\} \subset \overline{\Gamma.h_\eta(\gamma^+)}.$$

Ceci découle d'une nouvelle application du lemme 3.1 à des éléments bien choisis (pour faire apparaître un birapport) et de l'utilisation du lemme d'Otal qui relie birapport et spectre des longueurs. Cette preuve établit en particulier la densité des feuilles qui se relèvent en des horosphères centrées aux points fixes des éléments axiaux, lorsqu'il existe une feuille dense.

ii)  $\Rightarrow$  iii): on raisonne par l'absurde en supposant simultanément l'existence d'une feuille dense pour  $\mathcal{F}_+$  et l'existence de deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\Omega$  et d'une suite  $t_n \rightarrow -\infty$  tels que  $U \cap g_{t_n}(V) = \emptyset$ . La densité des orbites périodiques permet de trouver un élément périodique  $v \in V$  de période  $T$ . On trouve dans l'orbite de  $v$  un autre élément (périodique!)  $w$  qui définit une feuille dense, cette dernière rencontrant  $U$  en  $u$ . En remarquant que  $u$  et  $w$  sont dans la même feuille fortement stable, on montre que pour  $t$  voisin de zéro bien choisi,  $g_t(u) \in U \cap g_{t_n}(V)$ .

iii)  $\Rightarrow$  i): la preuve est classique et repose encore sur la densité des orbites périodiques dans la partie récurrente du flot, démontrée au corollaire 1.20. L'idée est de prendre un voisinage de petit diamètre dans lequel on revient après tout temps  $t \geq t_0$  et d'utiliser le lemme de fermeture qui entraîne l'existence d'une orbite périodique de longueur proche de  $t$ .

Pour achever la preuve du Théorème A, il reste à établir le

LEMME 3.2 ([8]). *Tout sous-groupe discret non cyclique du groupe fondamental de  $S$  est à spectre non arithmétique.*

*Schéma de démonstration.* Par l'absurde. On prend deux isométries axiales  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  d'axe  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  respectivement qui se croisent (la propriété d'intersection ne dépend pas du choix éventuel des axes). En posant  $g_n = \gamma_1 \gamma_2^n$ , on montre que  $m_{g_n} - m_{g_{n-1}} \rightarrow m_{\gamma_2}$ . Si le groupe  $\Gamma$  est à spectre arithmétique, la suite précédente est constante à partir d'un certain rang mais l'identité  $m_{g_n} - m_{g_{n-1}} = m_{\gamma_2}$  ne peut jamais être satisfaite car les axes de  $g_n$  et  $\gamma_2$  se coupent.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BABILLOT, M. Exposé au séminaire de Probabilité et Théorie Ergodique de Tours (2000).
- [2] BALLMANN, W. *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*. DMV Seminar 25 (1995).
- [3] — Axial isometries of manifolds of nonpositive curvature. *Math. Ann.* 259 (1982), 131–144.

- [4] BALLMANN, W., M. GROMOV and V. SCHROEDER. *Manifolds of Nonpositive Curvature*. Progress in Mathematics 61, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [5] BOURDON, M. Structures conformes au bord des  $CAT(-1)$  espaces. *L'Enseignement Math.* (2) 41 (1995), 63–102.
- [6] DO CARMO, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [7] DAL'BO, F. Topologie du feuilletage fortement stable. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 50 (2000), 981–993.
- [8] — Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.)* 30 (1999), 199–221.
- [9] EBERLEIN, P. Surfaces of nonpositive curvature. *Mem. Amer. Math. Soc.* 20 (1979).
- [10] — *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics, 1996.
- [11] EBERLEIN, P. and B. O'NEILL. Visibility manifolds. *Pacific J. Math.* 46 (1973), 45–110.
- [12] KNIEPER, G. *Hyperbolic Dynamics and Riemannian Geometry*. Handbook of Dynamical Systems, Vol. 1.A, 453–545, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [13] — The uniqueness of the measure of maximal entropy for geodesic flows on rank 1 manifolds. *Ann. of Math.* (2) 148 (1998), 291–314.
- [14] OTAL, J.P. Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative. *Rev. Mat. Iberoamericana* 8 (1992), 441–456.

(Reçu le 4 avril 2005)

Gabriele Link

Mathematisches Institut II  
 Universität Karlsruhe  
 Englerstr. 2  
 D-76128 Karlsruhe  
 Allemagne  
*e-mail*: gabi.link@gmx.de

Marc Peigné

Jean-Claude Picaud

Fédération Denis Poisson, LMPT, UMR 6083  
 Faculté des Sciences et Techniques  
 Parc de Grandmont  
 F-37200 Tours  
 France  
*e-mail*: peigne@univ-tours.fr,  
 jean-claude.picaud@univ-tours.fr