

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 52 (2006)  
**Heft:** 3-4: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Invariant d'Hermite du réseau des flots entiers d'un graphe pondéré  
**Autor:** Balacheff, Florent  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2235>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INVARIANT D'HERMITE DU RÉSEAU DES FLOTS ENTIERS  
D'UN GRAPHE PONDÉRÉ

par Florent BALACHEFF

RÉSUMÉ. A tout graphe pondéré de premier nombre de Betti  $b$  est naturellement associé un réseau de dimension  $b$ : le réseau des flots entiers. Nous démontrons ici une majoration de l'invariant d'Hermite d'un tel réseau en fonction de  $b$  dont l'ordre de grandeur est  $\ln b$ . Cet ordre de grandeur est optimal: il est réalisé par l'invariant d'Hermite du réseau des flots entiers associé à un graphe systoliquement économique.

ABSTRACT. To any weighted graph with first Betti number  $b$  is naturally associated a lattice of dimension  $b$ : the lattice of integral flows. We give here an upper bound of the Hermite invariant of such a lattice in terms of  $b$ , of order  $\ln b$ . This order is optimal: it is realized by the Hermite invariant of the lattice of integral flows associated to a systolically economic graph.

INTRODUCTION

L'étude de la densité des réseaux d'un espace euclidien  $(\mathbf{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un sujet classique: étant donné un réseau  $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ , le déterminant de  $\Lambda$ , noté  $\det(\Lambda)$ , est le carré du volume euclidien du domaine fondamental du réseau et sa norme minimale est définie par

$$N(\Lambda) = \min\{\langle \lambda, \lambda \rangle \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}\}.$$

L'invariant d'Hermite du réseau est la quantité

$$\mu(\Lambda) = \frac{N(\Lambda)}{\sqrt[n]{\det(\Lambda)}}$$

et mesure la densité du réseau. La densité maximale en dimension  $n$  correspond à la *constante d'Hermite*:

$$(1) \quad \gamma_n = \sup\{\mu(\Lambda) \mid \Lambda \text{ réseau de } \mathbf{R}^n\}.$$

Cette quantité est bien définie et vérifie l'encadrement suivant (voir [6]):

$$(2) \quad \frac{n}{2\pi e} \lesssim \gamma_n \lesssim \frac{1.744n}{2\pi e}.$$

Dans la définition (1), on peut considérer la borne supérieure des invariants d'Hermite non plus de tous les réseaux mais d'un sous-ensemble de réseaux de  $\mathbf{R}^n$ . P. Buser et P. Sarnak ont étudié dans [5] la borne supérieure des invariants d'Hermite des réseaux symplectiques et ont montré qu'elle vérifiait l'inégalité inférieure dans la formule (2). Ils ont également montré le résultat suivant: la borne supérieure des invariants d'Hermite de l'ensemble des réseaux associés aux jacobiniennes de surfaces de Riemann de genre  $g$ , que l'on notera  $\eta_{2g}$ , vérifie

$$(3) \quad c \ln g \lesssim \eta_{2g} \lesssim \frac{3}{\pi} \ln(4g + 3),$$

où  $c$  est une constante positive et  $\ln$  désigne le logarithme naturel. Rappelons que si  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $f_1 \lesssim f_2$  signifie  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (f_1(n)/f_2(n)) \leq 1$ .

Le but de cet article est de prouver un résultat analogue pour la borne supérieure des invariants d'Hermite de l'ensemble des réseaux des flots entiers de graphes pondérés de premier nombre de Betti fixé. En effet, le réseau des flots entiers d'un graphe pondéré est un des analogues unidimensionnels du réseau associé à la jacobienne d'une surface de Riemann. Rappelons tout d'abord quelques définitions.

Un *graphe*  $\Gamma = (V, E)$  est un complexe simplicial de dimension 1. C'est la donnée d'une paire d'ensembles  $(V, E)$ , où  $V$  désigne les sommets et  $E$  les arêtes. La *valence* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet et un graphe sera dit *k-régulier*, pour  $k \in \mathbf{N}^*$ , si la valence de chacun de ses sommets est constante égale à  $k$ . Dans ce qui suit, les graphes seront supposés connexes, finis et leurs sommets de valence au moins 2. Un *graphe pondéré* est une paire  $(\Gamma, w)$  où  $\Gamma = (V, E)$  est un graphe et  $w: E \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  est une *fonction poids* sur les arêtes. Nous dirons d'un graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  qu'il est *combinatoire* si la fonction poids  $w$  est constante égale à 1, et nous le noterons simplement  $\Gamma$ . Le type d'homotopie d'un graphe donné  $\Gamma = (V, E)$  est caractérisé par le nombre  $b_1(\Gamma)$  de cycles indépendants, appelé *premier nombre de Betti* ou *nombre cyclomatique*. On a la formule  $b_1(\Gamma) = |E| - |V| + 1$  où  $|X|$  désigne le cardinal d'un ensemble fini  $X$ . Notons qu'à premier nombre de Betti fixé, les graphes considérés sont en nombre fini à homéomorphisme près.

Étant fixé un graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b \geq 1$ , nous rappelons la construction du réseau des flots entiers associé à ce graphe (voir [2]). Nous introduisons pour cela l'ensemble  $\mathbf{E}$  des arêtes orientées de  $\Gamma$  (à chaque arête dans  $E$  correspondent deux arêtes orientées dans  $\mathbf{E}$ ) et nous noterons  $\bar{e} \in \mathbf{E}$  l'opposée d'une arête orientée  $e \in \mathbf{E}$ . Le poids  $w(e)$  d'une arête orientée  $e \in \mathbf{E}$  est naturellement défini comme le poids de l'arête géométrique correspondante dans  $E$ . Soit

$$C^1(\Gamma, \mathbf{R}) = \{g: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R} \mid \forall e \in \mathbf{E}, g(\bar{e}) = -g(e)\}$$

l'espace des arêtes. C'est un espace euclidien pour le produit scalaire défini par

$$\langle g_1, g_2 \rangle_w = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbf{E}} w(e) g_1(e) g_2(e)$$

pour tous  $g_1, g_2 \in C^1(\Gamma, \mathbf{R})$ . Nous pouvons définir un laplacien

$$\Delta: C^1(\Gamma, \mathbf{R}) \rightarrow C^1(\Gamma, \mathbf{R})$$

par la formule

$$(\Delta g)(e) = 2g(e) - \sum_{\{e' \in \mathbf{E} \mid e' \neq \bar{e} \text{ et } e'_+ = e_-\}} g(e') - \sum_{\{e'' \in \mathbf{E} \mid e'' \neq \bar{e} \text{ et } e''_- = e_+\}} g(e'')$$

où  $e_+$  et  $e_-$  désignent respectivement la tête et la queue d'une arête orientée  $e \in \mathbf{E}$ . Le noyau  $\ker(\Delta)$  de ce laplacien est un sous-espace vectoriel  $b$ -dimensionnel de  $C^1(\Gamma, \mathbf{R})$  appelé *sous-espace des cycles* (cet espace peut être pensé comme l'espace des 1-formes harmoniques sur  $\Gamma$ ) et dont l'intersection avec le réseau  $C^1(\Gamma, \mathbf{Z}) \subset C^1(\Gamma, \mathbf{R})$  des fonctions sur  $\mathbf{E}$  à valeurs entières définit le *réseau des flots entiers*

$$\Lambda(\Gamma, w) = C^1(\Gamma, \mathbf{Z}) \cap \ker(\Delta) \subset (\ker(\Delta), \langle \cdot, \cdot \rangle_w).$$

Posons

$$\rho_b = \sup\{\mu(\Lambda(\Gamma, w)) \mid (\Gamma, w) \text{ graphe pondéré de premier nombre de Betti } b\}.$$

Notre résultat principal s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME. Pour  $b \geq 2$ ,

$$(4) \quad \frac{1}{6e} \log_2 b \lesssim \rho_b \leq 4 \log_2 b,$$

où  $\log_2$  désigne le logarithme en base 2.

Nous pouvons, sous certaines restrictions, améliorer ces deux inégalités.

(i) Pour une infinité de valeurs  $\{b_m\}_m$ , il existe un graphe combinatoire 3-régulier  $G_m$  de premier nombre de Betti  $b_m$  (construit dans [8]) pour lequel (voir l'inégalité (9))

$$\mu(\Lambda(G_m)) \gtrsim \frac{4}{9e} \log_2 b_m.$$

(ii) Tout graphe combinatoire  $\Gamma$  de premier nombre de Betti  $b \geq 2$  dont la valence en chaque sommet est au moins 3 vérifie (voir l'inégalité (10))

$$\mu(\Lambda(\Gamma)) \lesssim 2 \log_2 b.$$

La suite de cet article est consacrée aux démonstrations de ces résultats. L'étude de l'invariant d'Hermite du réseau des flots entiers d'un graphe pondéré est équivalente (voir les lemmes 2 et 3) à l'étude du problème combinatoire suivant: étant donné un graphe combinatoire  $\Gamma$  dont les sommets sont de valence 2 ou 3, borner inférieurement sa *complexité*, définie comme le nombre d'arbres maximaux qu'il contient, par sa *systole* ou *tour de taille* (la plus petite longueur d'un de ses circuits simples). Dans le premier chapitre, nous donnons la démonstration de l'inégalité supérieure dans la formule (4), le point clef étant une majoration classique de la systole d'un graphe combinatoire 3-régulier en fonction de son premier nombre de Betti (voir le lemme 4). Dans le second chapitre, nous majorons pour tout graphe sa complexité par son volume unidimensionnel, et obtenons ainsi à l'aide de graphes systoliquement économiques – graphes dont le rapport volume sur systole est suffisamment petit – l'estimée inférieure annoncée pour  $\rho_b$ . Nous démontrons pour finir les améliorations (i) et (ii).

## 1. COMPLEXITÉ ET SYSTOLE D'UN GRAPHE

Nous allons prouver la proposition suivante, qui démontre la majoration de  $\rho_b$  annoncée dans le théorème.

PROPOSITION 1. *Pour tout graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b \geq 2$ ,*

$$(5) \quad \mu(\Lambda(\Gamma, w)) \leq 4 \log_2 b.$$

*Démonstration.* Nous commençons par réduire le problème :

LEMME 2. *Il suffit de démontrer la proposition pour tout graphe combinatoire de premier nombre de Betti  $b \geq 2$  dont les sommets sont de valence 2 ou 3.*

*Démonstration.* Étant donné un graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b$ , nous pouvons construire facilement un graphe  $\Gamma' = (V', E')$  également de premier nombre de Betti  $b$  dont les sommets sont de valence 2 ou 3 et une fonction poids  $w' : E' \rightarrow \mathbf{R}_+$  sur  $\Gamma'$  tels que  $(\Gamma, w)$  soit obtenu à partir de  $(\Gamma', w')$  en contractant les arêtes de poids nul en un point (voir figure 1).

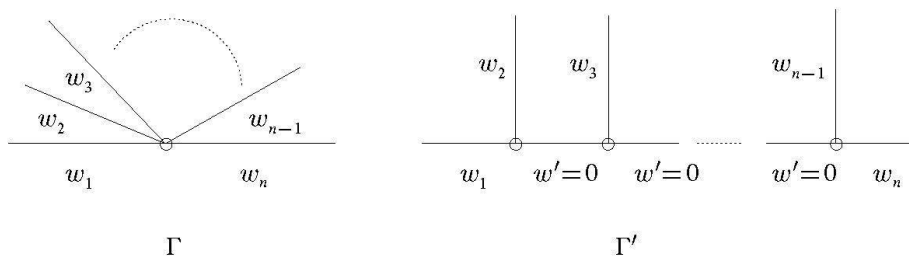


FIGURE 1

Modification du graphe  $\Gamma$  au voisinage d'un sommet de valence  $n \geq 4$

La forme bilinéaire symétrique définie sur  $C^1(\Gamma', \mathbf{R})$  par

$$\langle g'_1, g'_2 \rangle_{w'} = \frac{1}{2} \sum_{e' \in E'} w'(e') g'_1(e') g'_2(e')$$

n'est pas nécessairement un produit scalaire, puisqu'elle est dégénérée lorsqu'il existe une arête orientée  $e'$  de poids  $w'(e') = 0$ . Mais il résulte de ce qui suit que cette forme est un produit scalaire sur le sous-espace des cycles, de sorte que le réseau des flots entiers est encore bien défini, et que  $\mu(\Lambda(\Gamma, w)) = \mu(\Lambda(\Gamma', w'))$ .

Choisissons un arbre maximal  $T'$  de  $\Gamma'$ ; rappelons qu'il existe exactement  $b$  arêtes géométriques de  $\Gamma'$  qui ne sont pas dans  $T'$ . On note  $\mathbf{T}'$  le sous-ensemble de  $E'$  constitué des paires d'arêtes orientées associées aux arêtes de  $T'$ . Nous pouvons choisir une famille de chemins fermés simples et orientés  $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_b\}$  dans  $E'$  qui constitue une base du  $\mathbf{Z}$ -module  $H_1(\Gamma', \mathbf{Z})$  de sorte que pour chaque  $i \in \{1, \dots, b\}$ , les arêtes orientées de  $\gamma'_i$  sont toutes dans  $\mathbf{T}'$  sauf une que nous notons  $e'_i$  (voir par exemple le chapitre 5 de [3]). L'élément  $f'_i \in C^1(\Gamma', \mathbf{R})$  défini par

$$f'_i(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e' \in \gamma'_i \\ -1 & \text{si } \bar{e}' \in \gamma'_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est dans le réseau des flots entiers. Pour tout  $g' \in \Lambda(\Gamma', w')$ , on vérifie que  $g' - \sum_{i=1}^b g'(e'_i) f'_i$  est d'une part dans  $\ker(\Delta)$  et d'autre part à support dans  $\mathbf{T}'$ , de sorte que  $g' - \sum_{i=1}^b g'(e'_i) f'_i = 0$  et  $\{f'_1, \dots, f'_b\}$  engendre  $\Lambda(\Gamma', w')$ . Par ailleurs, les  $f'_1, \dots, f'_b$  sont linéairement indépendants puisque les arêtes géométriques sous-jacentes aux  $e'_i$  sont distinctes. La famille  $\{f'_1, \dots, f'_b\}$  est donc une  $\mathbf{Z}$ -base du réseau des flots entiers de  $(\Gamma', w')$ . Après contraction des arêtes de  $\Gamma'$  de poids nul, la famille  $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_b\}$  fournit une nouvelle famille  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_b\}$  qui est encore une base de l'homologie entière de  $\Gamma$  et dont la famille duale  $\{f_1, \dots, f_b\}$  est une base du réseau des flots entiers  $\Lambda(\Gamma, w)$  vérifiant  $\langle f_i, f_j \rangle_w = \langle f'_i, f'_j \rangle_{w'}$  pour  $1 \leq i, j \leq b$ . Les affirmations précédentes en découlent.

L'application  $\mu_{\Gamma'} : \mathbf{R}_+^{E'} \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $w' \mapsto \mu(\Lambda(\Gamma', w'))$  est continue et invariante par composition avec les dilatations, d'où l'on déduit que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une fonction poids  $w'_\epsilon$  sur  $\Gamma'$  telle que :

- pour toute arête  $e' \in E'$ ,  $w'_\epsilon(e') \in \mathbf{N}$ ,
- $|\mu(\Lambda(\Gamma, w)) - \mu(\Lambda(\Gamma', w'_\epsilon))| < \epsilon$ .

Nous subdivisons alors chaque arête  $e'$  de longueur  $w'_\epsilon(e') \in \mathbf{N}^*$  en  $w'_\epsilon(e')$  arêtes de longueur 1, ce qui ne modifie pas  $\mu$  (par un raisonnement analogue au précédent). Nous obtenons ainsi un graphe combinatoire  $\Gamma'_\epsilon$  dont les sommets sont de valence 2 ou 3 vérifiant  $|\mu(\Lambda(\Gamma, w)) - \mu(\Lambda(\Gamma'_\epsilon))| < \epsilon$  et ce pour tout  $\epsilon > 0$ . Ceci démontre le lemme.

Étant donné un graphe combinatoire  $\Gamma$ , nous introduisons les quantités suivantes :

- La *systole* (ou *tour de taille*), définie comme la plus petite longueur d'un circuit simple de  $\Gamma$  et notée  $\text{sys}(\Gamma)$ .
- La *complexité*, définie comme le nombre d'arbres maximaux du graphe  $\Gamma$  (voir [3]) et notée  $\kappa(\Gamma)$ .

LEMME 3. *Étant donné un graphe combinatoire  $\Gamma$  de premier nombre de Betti  $b \geq 1$ , nous avons l'égalité*

$$\mu(\Lambda(\Gamma)) = \frac{\text{sys}(\Gamma)}{\sqrt[b]{\kappa(\Gamma)}}.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 1 de [2],  $N(\Lambda(\Gamma)) = \text{sys}(\Gamma)$  et  $\det(\Lambda(\Gamma)) = \kappa(\Gamma)$ , d'où l'égalité annoncée.

Notre majoration revient donc à estimer inférieurement la complexité d'un graphe combinatoire dont les sommets sont de valence 2 ou 3 par sa systole. Nous aurons besoin pour ce faire du lemme suivant :

LEMME 4. *La systole d'un graphe  $\Gamma$  combinatoire 3-régulier de premier nombre de Betti  $b \geq 2$  vérifie*

$$\text{sys}(\Gamma) \leq 2 \log_2 b.$$

*Démonstration.* Le principe de démonstration de cette inégalité est classique (voir par exemple [7]). On commence par se fixer un sommet  $v$  de  $\Gamma$ .

Supposons tout d'abord que  $\text{sys}(\Gamma)$  est un entier pair. Nous minorons le nombre d'arêtes  $|E|$  de  $\Gamma$  par le nombre d'arêtes d'une boule centrée en  $v$  de rayon  $\text{sys}(\Gamma)/2$  :

$$|E| \geq 3(2^{\text{sys}(\Gamma)/2} - 1).$$

Comme le premier nombre de Betti vérifie  $b = |E|/3 + 1$  pour un graphe 3-régulier, nous obtenons le lemme dans ce cas.

Supposons maintenant que  $\text{sys}(\Gamma)$  est un entier impair. Nous minorons le nombre d'arêtes de  $\Gamma$  par le nombre d'arêtes d'une boule centrée en  $v$  de rayon  $(\text{sys}(\Gamma) - 1)/2$  auquel on ajoute le nombre minimal d'arêtes situées à une distance  $(\text{sys}(\Gamma) - 1)/2$  de  $v$  :

$$|E| \geq 3(2^{(\text{sys}(\Gamma)-1)/2} - 1) + \frac{3}{2} \cdot 2^{(\text{sys}(\Gamma)-1)/2}.$$

Ceci nous donne l'inégalité

$$\text{sys}(\Gamma) \leq 2 \log_2 \left( \frac{\sqrt{8}}{3} b \right),$$

d'où le lemme dans ce cas.

Le lemme suivant implique alors la proposition 1.

LEMME 5. *Pour tout graphe combinatoire  $\Gamma$  de premier nombre de Betti  $b \geq 2$  dont les sommets sont de valence 2 ou 3,*

$$(6) \quad \sqrt[b]{\kappa(\Gamma)} \geq \frac{\text{sys}(\Gamma)}{4 \log_2 b}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, supposons que  $b = 2$ . Comme les sommets de  $\Gamma$  sont de valence 2 ou 3, on a deux classes possibles pour  $\Gamma$  à homéomorphisme près: la classe  $\mathcal{S}_1$  et la classe  $\mathcal{S}_2$  (voir figure 2).

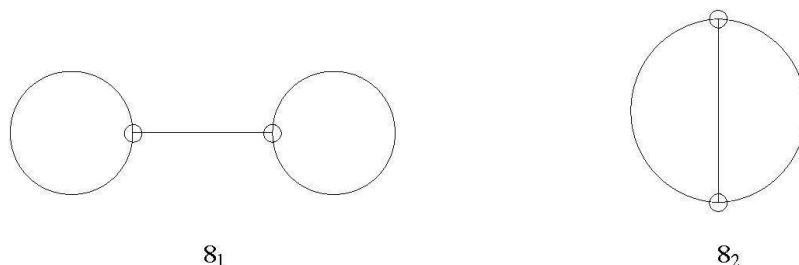


FIGURE 2  
Les classes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$

Dans un graphe de la classe  $\mathcal{S}_1$ , tout arbre maximal est obtenu en supprimant une arête de chaque boucle; la complexité d'un tel graphe est donc le produit des nombres d'arêtes dans les deux boucles, et on en déduit l'inégalité  $\kappa(\mathcal{S}_1) \geq (\text{sys}(\mathcal{S}_1))^2$ . Pour un graphe dans la classe  $\mathcal{S}_2$ , le choix d'une arête dans chacun des deux chemins de longueur plus grande que  $\text{sys}(\mathcal{S}_2)/2$  reliant les deux sommets de valence 3 nous fournit également un arbre maximal, donc nous avons  $\kappa(\mathcal{S}_2) \geq (\text{sys}(\mathcal{S}_2)/2)^2$ .

Nous obtenons ainsi pour  $b = 2$  l'inégalité  $\sqrt{\kappa} \geq \text{sys}/2$ , ce qui prouve le lemme dans ce cas.

On suppose maintenant que  $b > 2$ . Si

$$\left[ \frac{\text{sys}(\Gamma)}{2 \log_2 b} \right] = 0,$$

où  $[x]$  désigne la partie entière d'un réel  $x$ , le résultat est immédiat car la complexité d'un graphe est un entier non nul. Supposons donc

$$\left[ \frac{\text{sys}(\Gamma)}{2 \log_2 b} \right] \geq 1.$$

On note  $\tilde{\Gamma}$  le graphe défini à partir de  $\Gamma$  de la manière suivante. Étant donné un sommet  $v$  de valence 2, on considère le graphe obtenu en supprimant le sommet  $v$  et les deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  incidentes à ce sommet, et en ajoutant une nouvelle arête reliant les deux sommets restant de  $e_1$  et  $e_2$  (voir figure 3).

On répète l'opération pour tout sommet de valence 2 et on obtient ainsi le graphe  $\tilde{\Gamma}$ . C'est un graphe 3-régulier et on note  $f: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$  l'application

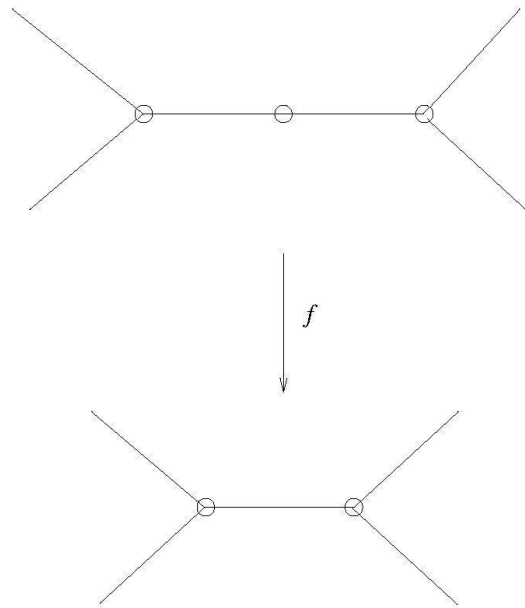


FIGURE 3

Élimination d'un sommet de valence 2

topologique naturelle qui envoie homéomorphiquement une suite maximale d'arêtes adjacentes de  $\Gamma$  dont les sommets intermédiaires sont de valence 2 sur l'arête correspondante de  $\tilde{\Gamma}$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  une courbe réalisant la systole de  $\tilde{\Gamma}$  et  $\gamma$  son image réciproque par  $f$ .

Comme  $\text{sys}(\tilde{\Gamma}) \leq 2 \log_2 b$  (par le lemme 4), nous déduisons l'existence d'une arête  $e \in \tilde{\gamma} \subset \tilde{\Gamma}$  telle que, si  $C = f^{-1}(e)$ , on a

$$\text{long}(C) \geq \frac{\text{sys}(\Gamma)}{2 \log_2 b}.$$

En effet, sinon,  $\text{long}(\gamma) < (\text{sys}(\Gamma)/2 \log_2 b) \cdot \text{sys}(\tilde{\Gamma}) \leq \text{sys}(\Gamma)$ , d'où une contradiction.

Soit  $\Gamma \setminus C$  le graphe complémentaire de la suite d'arêtes adjacentes  $C$  dans  $\Gamma$  : c'est un sous-graphe de  $\Gamma$  vérifiant  $b_1(\Gamma \setminus C) = b_1(\Gamma) - 1$ . Pour tout arbre maximal  $T$  de  $\Gamma \setminus C$  et toute arête  $e$  de  $C$ , la réunion de  $T$  et des arêtes de  $C$  distinctes de  $e$  est un arbre maximal de  $\Gamma$ . Les arbres maximaux de  $\Gamma$  ainsi obtenus sont distincts deux à deux, de sorte que

$$\kappa(\Gamma) \geq \kappa(\Gamma \setminus C) \cdot \left\lceil \frac{\text{sys}(\Gamma)}{2 \log_2 b} \right\rceil \geq \kappa(\Gamma \setminus C) \cdot \frac{\text{sys}(\Gamma)}{2(2 \log_2 b)}.$$

Comme  $\text{sys}(\Gamma \setminus C) \geq \text{sys}(\Gamma)$ , on obtient le résultat par récurrence sur  $b$ .

## 2. COMPLEXITÉ ET VOLUME D'UN GRAPHE

Nous allons dans ce chapitre définir la notion de constante systolique pour un graphe pondéré, et ensuite introduire une famille de graphes systoliquement économiques. Cette famille nous permet, à l'aide d'une majoration de la complexité d'un graphe par son volume, de démontrer l'inégalité inférieure annoncée dans la formule (4).

Étant donné un graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b \geq 2$ , le problème systolique peut être formulé comme suit. On définit le *volume systolique* de  $(\Gamma, w)$ ,

$$\sigma(\Gamma, w) = \frac{\text{Vol}(\Gamma, w)}{\text{sys}(\Gamma, w)},$$

où  $\text{Vol}(\Gamma, w)$  désigne le 1-volume de  $(\Gamma, w)$  (la somme des poids de ses arêtes), puis la *constante systolique* de  $\Gamma$ ,

$$\sigma(\Gamma) = \inf_w \sigma(\Gamma, w),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des fonctions poids de  $\Gamma$ . D'après [4],

$$(7) \quad \sigma(\Gamma) \geq \frac{3}{2} \frac{b-1}{\log_2(b-1) + \log_2 \log_2(b-1) + 4}.$$

Il a été démontré dans [1] qu'il existe pour chaque  $b \geq 2$  un graphe combinatoire de premier nombre de Betti  $b$ , que nous noterons  $\Gamma_b$  et que nous appellerons *systoliquement économique*, vérifiant asymptotiquement

$$\frac{\text{Vol}(\Gamma_b)}{\text{sys}(\Gamma_b)} \lesssim 6 \frac{b}{\log_2 b}.$$

Nous minorons maintenant l'invariant d'Hermité du réseau des flots entiers d'un graphe pondéré par son volume systolique comme suit :

PROPOSITION 6. *Pour tout graphe pondéré  $(\Gamma, w)$  de premier nombre de Betti  $b \geq 1$ ,*

$$\mu(\Lambda(\Gamma, w)) \geq \frac{\sqrt[b]{b!}}{\sigma(\Gamma, w)}.$$

*Démonstration.* Par une argumentation similaire à celle du lemme 2, nous nous ramenons à un graphe combinatoire. On estime supérieurement la complexité de ce graphe par son volume de la manière suivante. Tout arbre maximal  $T$  de  $\Gamma$  est entièrement déterminé par les  $b$  arêtes de  $\Gamma \setminus T$ , ce qui nous donne

$$\kappa(\Gamma) \leq \binom{\text{Vol}(\Gamma)}{b} \leq \frac{\text{Vol}(\Gamma)^b}{b!},$$

où  $\binom{\text{Vol}(\Gamma)}{b}$  désigne le coefficient binomial. On en déduit immédiatement le résultat.

Les graphes  $\Gamma_b$  vérifient donc

$$\mu(\Lambda(\Gamma_b)) \gtrsim \frac{1}{6} \frac{\sqrt[b]{b!}}{b} \log_2 b,$$

d'où la minoration annoncée en (4) par application de la formule de Stirling :

$$(8) \quad \mu(\Lambda(\Gamma_b)) \gtrsim \frac{1}{6e} \log_2 b.$$

Pour conclure, nous expliquons les améliorations (i) et (ii) annoncées en introduction.

(i) Nous pouvons, en utilisant les familles de graphes à grand tour de taille mises en évidence dans [8], améliorer pour certaines valeurs de  $b$  l'estimée (8). G. A. Margulis a construit, pour une famille infinie  $\{b_m\}_m$  de valeurs, une famille  $\{G_m\}_m$  de graphes 3-réguliers de premier nombre de Betti  $\{b_m\}_m$  pour lesquels

$$\text{sys}(G_m) \gtrsim \frac{4}{3} \log_2 b_m.$$

Nous en déduisons

$$(9) \quad \mu(\Lambda(G_m)) \gtrsim \frac{4}{9e} \log_2 b_m.$$

(ii) Si l'on se restreint à certains graphes, nous pouvons estimer supérieurement l'invariant d'Hermite du réseau des flots entiers par l'inverse du volume systolique :

PROPOSITION 7. *Pour tout graphe combinatoire  $\Gamma$  de premier nombre de Betti  $b \geq 2$  dont chaque sommet est de valence au moins 3,*

$$\mu(\Lambda(\Gamma)) \leq 3(b-1) \frac{\text{sys}(\Gamma)}{\text{Vol}(\Gamma)}.$$

*Démonstration.* Comme la valence en chaque sommet du graphe est au moins 3, on a l'inégalité

$$\text{Vol}(\Gamma) \leq 3(b-1).$$

Donc

$$\mu(\Lambda(\Gamma)) = \frac{\text{sys}(\Gamma)}{\sqrt[b]{\kappa(\Gamma)}} \leq \text{sys}(\Gamma) \leq \text{Vol}(\Gamma) \frac{\text{sys}(\Gamma)}{\text{Vol}(\Gamma)} \leq 3(b-1) \frac{\text{sys}(\Gamma)}{\text{Vol}(\Gamma)}.$$

On en déduit une amélioration de l'inégalité (5) pour cette classe de graphes, en vertu de l'estimée systolique (7) : pour tout graphe  $\Gamma$  dont chaque sommet est de valence au moins trois et de premier nombre de Betti  $b \geq 2$ ,

$$(10) \quad \mu(\Lambda(\Gamma)) \leq 2(\log_2(b-1) + \log_2 \log_2(b-1) + 4) \lesssim 2 \log_2 b.$$

REMERCIEMENTS. L'auteur remercie Roland Bacher de lui avoir suggéré cette étude, ainsi qu'Ivan Babenko et Hugo Akrouit pour les discussions partagées sur le sujet. L'auteur remercie également les rapporteurs pour leurs remarques sur la version préliminaire de ce texte. L'auteur a été partiellement soutenu par le Fonds National Suisse de la recherche scientifique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BABENKO, I. et F. BALACHEFF. Géométrie systolique des sommes connexes et des revêtements cycliques. *Math. Ann.* 333 (2005), 157–180.
- [2] BACHER, R., P. DE LA HARPE and T. NAGNIBEDA. The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph. *Bull. Soc. Math. France* 125 (1997), 167–198.
- [3] BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1974.
- [4] BOLLOBÁS, B. and E. SZEMERÉDI. Girth of sparse graphs. *J. Graph Theory* 39 (2002), 194–200.
- [5] BUSER, P. and P. SARNAK. On the period matrix of a Riemann surface of large genus. *Inv. Math.* 117 (1994), 27–56.
- [6] CONWAY, J. and N. SLOANE. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [7] ERDŐS, P. and H. SACHS. Reguläre Graphen gegebener Tailenweite mit minimaler Knotenzahl. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe* 12 (1963), 251–257.
- [8] MARGULIS, G. A. Explicit group-theoretic constructions of combinatorial schemes and their applications in the construction of expanders and concentrators. *Problems Inform. Transmission* 24 (1988), 39–46.

(Reçu le 15 mars 2006)

Florent Balacheff

Section de Mathématiques  
 Université de Genève  
 C.P. 64  
 CH-1211 Genève 4  
 e-mail : Florent.Balacheff@math.unige.ch