

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 52 (2006)  
**Heft:** 3-4: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Vector fields in the presence of a contact structure  
**Autor:** Ovsienko, Valentin

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2232>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

where  $(F_i, G_j)$  in a  $2n$ -tuple of smooth functions on  $M$ . The space  $\text{TVect}(M)$  is now identified with the direct sum

$$\text{TVect}(M) \cong \underbrace{C^\infty(M) \oplus \cdots \oplus C^\infty(M)}_{2n \text{ times}}.$$

Let us calculate explicitly the action of  $\text{CVect}(M)$  on  $\text{TVect}(M)$ .

PROPOSITION 5.4. *The action of  $\text{CVect}(M)$  on  $\text{TVect}(M)$  is given by the first-order  $(2n \times 2n)$ -matrix differential operator*

$$(14) \quad X_H \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \left( X_H \cdot \mathbf{1} - \begin{pmatrix} AB(H) & BB(H) \\ -AA(H) & -BA(H) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

where  $F$  and  $G$  are  $n$ -vector functions,  $\mathbf{1}$  is the unit  $(2n \times 2n)$ -matrix,  $AA(H)$ ,  $AB(H)$ ,  $BA(H)$  and  $BB(H)$  are  $(n \times n)$ -matrices, namely

$$AA(H)_{ij} = A_i A_j(H),$$

and the three other expressions are similar.

*Proof.* Straightforward from (11) and (13).  $\square$

PROPOSITION 5.5. *The bilinear map (7) has the following explicit expression:*

$$H_{X, \tilde{X}} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} F_i & \tilde{F}_i \\ G_i & \tilde{G}_i \end{vmatrix},$$

where  $X = \sum_{i=1}^n (F_i A_i + G_i B_i)$ , and  $\tilde{X} = \sum_{j=1}^n (\tilde{F}_j A_j + \tilde{G}_j B_j)$ .

*Proof.* This follows from definition (7) and formula (12).  $\square$

Note that formula (14) implies that  $H_{X, \tilde{X}}$  transforms as a contact Hamiltonian according to (3) since the partial traces of the  $(2n \times 2n)$ -matrix in (14) are  $A_i B_i(H) - B_i A_i(H) = Z(H)$ .

ACKNOWLEDGEMENTS. I am grateful to C. Duval and S. Tabachnikov for their interest in this work and a careful reading of a preliminary version of this paper.

#### REFERENCES

- [1] ARNOLD, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics. Third edition.* Nauka, Moscow, 1989.

- [2] ARNOLD, V. and A. GIVENTAL. *Symplectic Geometry*. Encycl. of Math. Sci., Dynamical Systems 4. Springer-Verlag, 1990.
- [3] FUKS, D. B. *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*. Consultants Bureau, New York, 1986.
- [4] KIRILLOV, A. Local Lie algebras. *Russ. Math. Surv.* 31 (1976), 57–76.
- [5] OVSIENKO, V. Contact analogues of the Virasoro algebra. *Funct. Anal. Appl.* 24 (1990), 306–314.
- [6] OVSIENKO, V. and S. TABACHNIKOV. *Projective Differential Geometry Old and New, from Schwarzian Derivative to the Cohomology of Diffeomorphism Groups*. Cambridge Tracts in Mathematics 165, Cambridge University Press, 2005.

(Reçu le 22 décembre 2005)

V. Ovsienko

CNRS, Institut Camille Jordan  
Université Claude Bernard Lyon 1  
21, avenue Claude Bernard  
F-69622 Villeurbanne Cedex  
France  
*e-mail*: ovsienko@math.univ-lyon1.fr

Leere Seite  
Blank page  
Page vide