Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 52 (2006)
Heft: 3-4: L'enseignement mathématique

Artikel: Sous-groupes compacts d'homéomorphismes de la sphère
Autor: Kolev, Boris
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-2231

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique (2) 52 (2006), 193–214

SOUS-GROUPES COMPACTS D'HOMÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE

par Boris KOLEV *)

RÉSUMÉ. L'objet de cet article est d'exposer la démonstration du fait que tout sous-groupe compact d'homéomorphismes de la sphère est topologiquement conjugué à un sous-groupe fermé du groupe orthogonal O(3).

1. INTRODUCTION

Le résultat que nous nous proposons d'exposer dans cet article, à savoir que tout sous-groupe compact d'homéomorphismes de S^2 est topologiquement conjugué à un sous-groupe fermé du groupe orthogonal O(3), se situe dans le cadre plus général d'une suite de questions connue sous le nom de *5e problème de Hilbert* [20, 25]. Plus précisément, soit G un groupe localement compact qui agit fidèlement sur une variété M, on se pose les questions suivantes :

1. G est-il nécessairement localement[1]) euclidien ?
2. Si G est localement euclidien, est-ce un groupe de Lie ?
3. Si G est un groupe de Lie, existe-t-il une structure analytique sur M invariante par G ?

*) Je tiens à remercier le rapporteur pour sa relecture extrêmement attentive de cet article et pour ses nombreuses remarques qui m'ont aidé à améliorer ce texte.

[1]) Une autre terminologie pour désigner une variété topologique.

La réponse à la première question n'est pas connue en dehors de quelques cas particuliers. La réponse à la deuxième question est positive (cf. Gleason [13], Montgomery and Zippin [15]). La réponse à la troisième question est négative en général. Il existe des contre-exemples simples dans le cas non compact. Citons également la construction par Bing [2] d'une involution négative de S^3 non conjuguée à un élément de O(4), d'exemples d'homéomorphisme périodique de S^3 non conjugué à un élément de SO(4) (Bing [3], Montgomery and Zippin [15], Bredon [5]), d'une action de $\mathbf{U}(1)$ sur S^4 non linéarisable (Montgomery and Zippin [15]) et d'une action de $\mathbf{U}(1)$ sur S^{2n+2} non linéarisable [6]. Signalons enfin une preuve par Cairns et Ghys [6] que toute action topologique de SO(n) sur $\mathbf{R}^n$ qui préserve l'origine est globalement conjuguée à l'action standard.

Un groupe de Lie possède une propriété remarquable : il existe un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe non trivial. D'un groupe topologique qui possède cette propriété, on dit qu'il *n'a pas de petit sous-groupe*. Immédiatement après la démonstration par Haar, en 1933, d'une mesure invariante sur tout sous-groupe localement compact, von Neumann [21] établit, en utilisant la théorie des représentations unitaires, le résultat suivant (voir également [19]), considéré comme la première étape majeure dans la résolution du 5e problème :

THÉORÈME 1.1 (von Neumann). *Un groupe compact qui ne possède pas de petit sous-groupe est un groupe de Lie.*

Le but de cet article est de présenter une demonstration complète et moderne d'un théorème dû à Kerékjártó [10] qui donne une caractérisation topologique complète du groupe des rotations et de ses sous-groupes fermés.

THÉORÈME 1.2 (Kerékjártó). *Tout sous-groupe compact de* Homéo(S^2) *est topologiquement conjugué à un sous-groupe fermé de* O(3).

La preuve donnée par Kerékjártó consiste à établir d'abord qu'un sous-groupe compact d'homéomorphismes de la sphère qui possède un point fixe laisse invariant un disque topologique autour de ce point, et que tout groupe compact d'homéomorphismes du disque est topologiquement conjugué à un sous-groupe fermé du groupe des isométries euclidiennes O(2). Ces résultats essentiels se trouvent en réalité dans des travaux antérieurs de Kerékjártó [9] connus pour être extrêmement confus. C'est pourquoi nous reprenons dans les premières sections la démonstration complète dans un

langage moderne. Le reste de la preuve est une étude casuistique qui se base sur la nature et le nombre des sous-groupes qui fixent un point (les *stabilisateurs*). Dans [10], le cas qui apparaît le plus compliqué et qui occupe la majeure partie de l'article est celui où le groupe agit transitivement sur la sphère car Kerékjártó reconstruit dans ce cas «à la main» la géométrie euclidienne de la sphère. Dans notre démonstration, qui utilise le langage moderne de la géométrie différentielle, ce cas est, au contraire, le plus simple.

L'article original de Kerékjártó [10] traite également des sous-groupes compacts d'homéomorphismes des autres surfaces compactes, bien que la majeure partie de l'article soit consacrée à la sphère. En effet, pour les autres surfaces, on se ramène à des arguments élaborés pour la sphère et le disque. Ainsi, l'étude d'un groupe compact G de transformations d'une surface fermée M de caractéristique d'Euler $\chi(M) \leq 0$, consiste à traiter d'abord le sous-groupe G_0 des transformations isotopes à l'identité. Ce sous-groupe G_0 est fermé, distingué dans G et d'indice fini. Dans le cas où $\chi(M) < 0$, on montre en passant au revêtement universel que G_0 est trivial. Dans le cas du tore, une analyse analogue à celle de la section 3, où la notion de *nombre de rotation* est remplacée par celle de *vecteur de rotation*, permet de conclure que G_0 est conjugué à un sous-groupe de translations. Cette étude n'est pas détaillée dans cet article où nous nous concentrons essentiellement sur la sphère et le disque. On pourra consulter [4] pour plus de détails sur les autres surfaces.

Un prolongement naturel de ces questions consiste à rechercher également une caractérisation topologique du groupe homographique ou d'un de ses sous-groupes, question également envisagée par Kerékjártó [9]. L'étude de ce problème a fait apparaître la notion de groupe de convergence (Ghering and Martin [12]). Mais la réponse ne semble pas aussi simple que pour le groupe des rotations.

La section 2 de cet article est consacrée à quelques propriétés générales des sous-groupes compacts d'homéomorphismes d'un espace métrique (X, d) et à l'étude locale (au voisinage d'un point fixe) lorsque X est une surface. Dans la section 3, on détaille la classification complète des sous-groupes compacts d'homéomorphismes du cercle et dans la section 4, celle des sous-groupes compacts d'homéomorphismes du disque. La section 5 présente une démonstration élémentaire (due à M. H. A. Newman) du fait qu'un sous-groupe compact d'homéomorphismes de la sphère n'a pas de petit sous-groupe. Enfin, la section 6 contient l'étude détaillée des sous-groupes compacts d'homéomorphismes de la sphère.

2. Sous-groupes compacts d'homéomorphismes d'un espace métrique compact

Soit (X, d) un espace métrique compact. On définit la distance de deux applications continues $f, g\colon X \to X$ par la formule :

$$d(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)) .$$

Cette distance munit le groupe des homéomorphismes de (X, d) d'une structure de *groupe topologique*. Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soit G un sous-groupe fermé d'homéomorphismes de (X, d). Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G est compact.*

(2) *L'ensemble des éléments de G forme une famille équicontinue.*

(3) *Il existe une distance sur X pour laquelle les éléments de G sont des isométries.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (3) est une conséquence de l'existence de la mesure de Haar sur G. En effet, ceci nous permet de construire une distance invariante en prenant la « moyenne » pour la mesure de Haar des images de la distance d par les éléments de G. (3) $\Rightarrow$ (2) est trivial et (2) $\Rightarrow$ (1) est un corollaire direct du théorème d'Ascoli.

En particulier, l'ensemble des itérés d'un élément f appartenant à un groupe compact d'homéomorphismes forme une famille équicontinue. Nous introduirons la définition suivante :

Définition 2.2. Un homéomorphisme f d'un espace métrique compact (X, d) est *régulier* si la famille des itérés de f est équicontinue, autrement dit si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$d(x, y) < \alpha \Rightarrow d(f^n(x), f^n y)) < \varepsilon , \quad \forall n . \tag{2.1}$$

Citons quelques exemples : un homéomorphisme périodique, une isométrie pour la distance d sont des homéomorphismes réguliers. On peut montrer le résultat suivant [4] :

Lemme 2.3. *Soit f un homéomorphisme régulier, alors la fermeture du groupe engendré par f est compact.*

Dans le cas où X est la sphère S^2, ou plus généralement une surface compacte, nous pouvons expliciter complètement la dynamique d'un groupe compact d'homéomorphismes au voisinage d'un point fixe.

LEMME 2.4. *Soit G un sous-groupe compact d'homéomorphismes de la sphère S^2 et $D \subset S^2$ un disque topologique fermé. Alors le compact*

$$K = \bigcup_{g \in G} g(D)$$

est localement connexe.

Démonstration. Commençons par rappeler qu'un espace métrique compact est localement connexe si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut l'écrire comme une réunion finie de compacts connexes de diamètre inférieur à ε.

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons une triangulation de D dont les cellules $e_1, e_2, \ldots, e_r$, sont de diamètre inférieur à $\varphi(\varepsilon)$, où $\varphi(\varepsilon)$ est la borne supérieure des nombres positifs α tel que :

$$d(x, y) < \alpha \Rightarrow d(g(x), g(y)) < \varepsilon ,$$

pour $x, y \in S^2$ et $g \in G$.

Soit $\rho > 0$, tel que l'intérieur de toute cellule e_i contienne une boule $B(x_i, \rho)$. Alors

$$B(g(x_i), \varphi(\rho)) \subset g(e_i) , \quad \forall i, \ \forall g . \tag{2.2}$$

Par conséquent, l'aire de chaque cellule $g(e_i)$ est minorée par $4\pi \sin \varphi(\rho)$ et la famille $\{g(e_i)\}_{i,g}$ ne contient qu'un nombre fini de cellules deux à deux disjointes.

Dans cette famille, soit $\{e'_1, \ldots, e'_p\}$ une sous-famille finie, de cardinal maximal, de cellules deux à deux disjointes. Alors pour tout $g \in G$ et tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, il existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $e'_j \cap g(e_i) \neq \varnothing$. Pour $k \in \{1, \ldots, p\}$, notons M_k la fermeture de l'union de toutes les cellules $g(e_i)$ qui rencontrent e'_k. Alors M_k est un compact connexe de diamètre inférieur à 3ε (le diamètre de chaque cellule $g(e_i)$ étant majoré par ε) et

$$K = \bigcup_{k=1}^{p} M_k , \tag{2.3}$$

ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 2.5. *Soit G un sous-groupe compact d'homéomorphismes de la sphère S^2 et x_0 un point fixe de G. Alors il existe un système fondamental de voisinages de x_0, constitué par des disques topologiques invariants par G.*

REMARQUE 2.6. D'après le théorème 2.1, G laisse invariant une distance δ. On peut donc être tenté de croire que les boules (pour cette distance δ), centrées au point x_0, fournissent ce système de disques invariants. Mais ceci ne fonctionne pas car on ne sait rien, *a priori*, de cette distance invariante δ obtenue en moyennant par G la distance euclidienne : elle n'a pas de raison d'être riemannienne.

La démonstration du théorème 2.5 repose sur un résultat classique de topologie du plan qui se démontre à la fois par des méthodes purement topologiques [17, 24] et par des méthodes issues de la géométrie complexe [18].

THÉORÈME 2.7. *Soit K un compact, connexe, localement connexe, non vide de S^2, non réduit à un point et sans point de coupure* [2]*. Alors la frontière de chaque composante de $S^2 \setminus K$ est une courbe fermée simple.*

Démonstration du Théorème 2.5. Donnons-nous arbitrairement $\varepsilon > 0$. Nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que :

$$d(x,y) \leq \delta \Rightarrow d(g(x), g(y)) < \varepsilon\,, \qquad \forall x, y \in S^2\,,\ \forall g \in G\,, \tag{2.4}$$

puis $\eta > 0$ tel que

$$d(x,y) \leq \eta \Rightarrow d(g(x), g(y)) < \delta\,, \qquad \forall x, y \in S^2,\ \forall g \in G\,. \tag{2.5}$$

Soit D le disque euclidien (fermé) de centre x_0 et de rayon η. Formons le compact, connexe, invariant :

$$K = \bigcup_{g \in G} g(D)\,.$$

D'après (2.4), on a $K \subset B(x_0, \delta)$. Désignons par V_∞ la composante de $S^2 \setminus K$ qui contient $S^2 \setminus B(x_0, \delta)$. Soit $g \in G$. En vertu de (2.5), on a

$$g(S^2 \setminus B(x_0, \varepsilon)) \subset S^2 \setminus B(x_0, \delta)\,.$$

Par conséquent :

$$g(S^2 \setminus B(x_0, \varepsilon)) \subset V_\infty \cap g(V_\infty)\,,$$

[2]) Un point $x \in K$ est un *point de coupure* si $K \setminus \{x\}$ n'est pas connexe.

et donc $g(V_\infty) = V_\infty$.

Par ailleurs, d'après le lemme 2.4, K est localement connexe. On pourra vérifier que l'adhérence d'un ouvert connexe, non vide de la sphère ne possède pas de point de coupure. Il en est donc ainsi de K qui est l'adhérence de l'ouvert connexe, non vide

$$U = \bigcup_{g \in G} g(\mathrm{int}(D)).$$

Par suite, chaque composante connexe du complémentaire de K est un disque topologique en vertu du théorème 2.7. En particulier, la frontière de V_∞ est une courbe fermée simple invariante et le disque topologique bordé par cette courbe et contenant x_0 est invariant et contenu dans la boule $B(x_0, \varepsilon)$.

3. Sous-groupes compacts d'homéomorphismes du cercle

Commençons par démontrer les résultats élémentaires suivants :

Lemme 3.1. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ un homéomorphisme régulier et croissant, alors $f = Id$.*

Soit $f : S^1 \to S^1$ un homéomorphisme régulier, qui préserve l'orientation et possède un point fixe, alors $f = Id$.

Démonstration. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ un homéomorphisme régulier et croissant. Par l'absurde, supposons $f \neq Id$, et soit $]a,b[$ une composante de $[0,1] \setminus Fix(f)$. On a $f(a) = a$, $f(b) = b$ et (par exemple) :

$$f(x) > x, \quad \forall x \in]a,b[.$$

Alors, l'orbite par f de tout point de $]a,b[$ converge vers b, ce qui entre en contradiction avec la régularité de f qui impose que l'orbite d'un point voisin de a reste proche de a.

Soit maintenant $f : S^1 \to S^1$ un homéomorphisme régulier, qui préserve l'orientation et possède un point fixe. L'étude d'un relèvement de f,

$$\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

qui possède un point fixe $\tilde{x}$, nous ramène au résultat précédent en considérant la restriction de $\widetilde{f}$ à l'intervalle $[\tilde{x}, \tilde{x}+1]$.

Soit f un homéomorphisme de S^1 qui préserve l'orientation et $\widetilde{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un relèvement de f. On rappelle que la limite

$$\theta(\widetilde{f}) = \lim_n \frac{\widetilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n} \tag{3.1}$$

existe toujours et ne dépend pas du point $\tilde{x} \in \mathbf{R}$ (voir [11]). Si $\widetilde{f}'$ est un autre relèvement de f alors $\theta(\widetilde{f}) - \theta(\widetilde{f}')$ est un entier. On note $\rho(f)$ la classe résiduelle de ces nombres modulo $\mathbf{Z}$ et on l'appelle le *nombre de rotation* de f.

LEMME 3.2. *Soit G un sous-groupe compact d'homéomorphismes du cercle S^1 qui préservent l'orientation, alors l'application nombre de rotation*

$$\rho\colon G \to \mathbf{U}(1)$$

est un morphisme continu et injectif.

Démonstration. En moyennant les images par G de la mesure canonique de S^1 à l'aide de la mesure de Haar sur G, on obtient une mesure de probabilité μ sur le cercle invariante par G.

Soit $f \in G$. On peut réécrire l'expression (3.1) sous la forme

$$\theta(\widetilde{f}) = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{\widetilde{f}}(f^n(x))}{n} \tag{3.2}$$

où $\varphi_{\widetilde{f}} : S^1 \to \mathbf{R}$ est la fonction induite par l'application périodique

$$\tilde{x} \mapsto \widetilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x}, \qquad \tilde{x} \in \mathbf{R}.$$

Par conséquent, d'après le *théorème ergodique de Birkhoff* (voir par exemple [22]), on a

$$\theta(\widetilde{f}) = \int_{S^1} \varphi_{\widetilde{f}}\, d\mu\,. \tag{3.3}$$

Enfin, on démontre sans difficulté, à partir de la définition de $\varphi_{\widetilde{f}}$, la *relation de cocycle*:

$$\varphi_{\widetilde{f}\circ\tilde{g}} = \varphi_{\widetilde{f}} \circ g + \varphi_{\tilde{g}}\,.$$

Par suite, si f et g sont deux éléments quelconques du groupe G, on obtient

$$\theta(\widetilde{f} \circ \tilde{g}) = \int_{S^1} \varphi_{\widetilde{f}} \circ g\, d\mu + \int_{S^1} \varphi_{\tilde{g}}\, d\mu = \theta(\widetilde{f}) + \theta(\tilde{g})\,, \tag{3.4}$$

ce qui établit que ρ est bien un morphisme de groupe.

L'injectivité est une conséquence du Lemme 3.1 et du fait qu'un homéomorphisme du cercle qui a pour nombre de rotation 0, possède un point fixe (voir [11]).

La continuité résulte de l'inégalité suivante :

$$d(f, Id) \leq \varphi(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\theta(\widetilde{f})\right| \leq \varepsilon\,,$$

qui est elle-même conséquence de l'équicontinuité d'un élément f du groupe G.

4. Sous-groupes compacts d'homéomorphismes du disque

Le résultat suivant généralise un résultat connu pour les homéomorphismes périodiques du disque [7].

Lemme 4.1. *Un homéomorphisme régulier du disque D^2 qui est l'identité sur le bord est l'identité sur le disque tout entier.*

Démonstration. Formons le *double* de f, qui est un homéomorphisme de la sphère et que nous continuerons de désigner par f. Nous obtenons ainsi un homéomorphisme régulier, qui est l'identité sur une courbe fermée simple J (correspondant au bord de D^2) et que nous pouvons supposer être l'équateur.

Choisissons sur J deux points diamétralement opposés que nous noterons a et b. Soit d un cercle arbitraire séparant les points a et b. Reprenons la construction donnée dans la démonstration du Théorème 2.5, en prenant pour G, la fermeture dans Homéo(S^2) du groupe engendré par f et pour D, le disque (fermé) délimité par d et contenant a. Notons, comme précédemment

$$K = \bigcup_{g \in G} g(D)$$

et désignons par Δ la composante de b dans $S^2 \setminus K$. Alors Δ est un disque topologique invariant bordé par une courbe fermée simple que nous noterons δ. Cette courbe sépare les points a et b et rencontre donc nécessairement la courbe J. Par conséquent, en utilisant à nouveau le lemme 3.1, on en déduit que $f = Id$ sur δ. Or, par construction

$$\delta \subset \bigcup_{g \in G} g(d)\,,$$

et donc $\delta \subset d$ (car $\delta \subset Fix(G)$), ce qui n'est possible que si $\delta = d$. Le cercle d ayant été choisi arbitrairement, ceci montre que $f = Id$ sur S^2.

COROLLAIRE 4.2. *Soit $f \in \text{Homéo}^+(D^2)$ un homéomorphisme régulier, différent de l'identité. Alors f possède un point fixe unique et ce point est situé à l'intérieur du disque.*

Démonstration. D'après le théorème du point fixe de Brouwer, f possède au moins un point fixe x_0. Si $f \neq Id$, il résulte du lemme 4.1 et du lemme 3.1 que ce point fixe se trouve à l'intérieur du disque.

Nous allons maintenant montrer que si f possède un second point fixe x_1 alors $f = Id$. Pour cela, construisons à l'aide du théorème 2.5, une courbe fermée simple invariante $J \in \text{int}(D^2)$ qui sépare les deux points fixes et borde un disque topologique (ouvert) Δ contenant x_0. Par construction, l'anneau topologique (fermé) $A = D^2 \setminus \Delta$ et invariant par f et contient l'autre point fixe, x_1. Soit

$$\widetilde{f} : \mathbf{R} \times [0,1] \to \mathbf{R} \times [0,1]$$

un relèvement de la restriction de f à A. On peut vérifier que $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme régulier de $\mathbf{R} \times [0,1]$ (pour la métrique standard). Soit $\varphi_{\widetilde{f}} : A \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$x \mapsto p_1\left(\widetilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x}\right),$$

où p_1 est la projection sur le premier facteur du produit $\mathbf{R} \times [0,1]$. La régularité de f implique l'existence et l'unicité (indépendance par rapport à x) de la limite

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{\widetilde{f}}(f^n(x))}{n},$$

que nous noterons $\theta(\widetilde{f})$ comme dans la preuve du lemme 3.2. Soit $\tilde{x}_1$ un relèvement de x_1 et choisissons pour $\widetilde{f}$ un relèvement de f qui fixe $\tilde{x}_1$. Alors on a nécessairement $\theta(\widetilde{f}) = 0$ et ceci impose à f d'avoir un point fixe sur ∂D^2 (voir [11]). Il résulte alors du lemme 3.1 que f est l'identité sur ∂D^2, puis que que f est l'identité sur le disque d'après le lemme 4.1.

COROLLAIRE 4.3. *Soit G un sous-groupe compact d'homéomorphismes du disque D^2. La restriction au bord*

$$R : G \to \text{Homéo}(\partial D^2)$$

est un morphisme continu et injectif.

Démonstration. La restriction au bord d'un sous-groupe d'homéomorphismes du disque est toujours un morphisme continu mais n'est pas injectif

en général. Soit $g \in G$ un élément du noyau de R. Comme g est régulier, alors $g = Id$ en vertu du lemme 4.1 et donc R est injectif si G est compact.

En combinant le corollaire 4.3 avec le lemme 3.2, on obtient :

COROLLAIRE 4.4. *Tout sous-groupe compact G de* $\text{Homéo}^+(D^2)$ *est isomorphe (en tant que groupe topologique) à un sous-groupe fermé de* $\mathbf{U}(1)$.

Si G est fini, il est engendré par un élément périodique f. Dans ce cas, on montre que f est conjugué à une rotation euclidienne (voir [7]). Sinon, $G = \mathbf{U}(1)$ et nous allons établir le résultat suivant :

THÉORÈME 4.5. *Toute action continue et fidèle du groupe* $\mathbf{U}(1)$ *sur le disque est topologiquement conjuguée à l'action standard de* $\mathrm{SO}(2)$.

Nous diviserons la démonstration de ce résultat en deux étapes : nous montrerons d'abord que la structure des orbites d'un tel groupe est identique à celle de l'action standard et ensuite, ce qui est la partie la plus délicate, qu'il existe un *arc transverse* aux orbites, ce qui nous permettra de conclure.

LEMME 4.6. *Les orbites de toute action continue et fidèle de* $\mathbf{U}(1)$ *sur le disque D^2 sont constituées par un point fixe unique x_0 à l'intérieur du disque et des courbes fermées simples qui entourent ce point.*

Démonstration. Soit G l'image de $\mathbf{U}(1)$ dans $\text{Homéo}(D^2)$ et $f \in G$ un élément d'ordre infini. L'unique point fixe x_0 de f donné par le corollaire 4.2 est également un point fixe de G car les itérés de f forment un ensemble dense dans G. Par conséquent, x_0 est également l'unique point fixe de tout autre élément $g \neq Id$ de G. Il en résulte que la G-orbite de tout point x différent de x_0 est une courbe fermée simple. Cette courbe est invariante par f et borde un disque qui contient nécessairement un point fixe de f, en vertu du théorème du point fixe de Brouwer. Ce point fixe ne peut être que x_0, ce qui achève la démonstration du lemme 4.6.

LEMME 4.7. *Étant donné une action topologique et fidèle de* $\mathbf{U}(1)$ *sur le disque D^2, il existe un arc simple rencontrant chaque orbite en un point et un seul.*

REMARQUE 4.8. Je ne connais pas de preuve élémentaire de ce lemme. La démonstration proposée ici est une construction «à la main» de cet *arc transverse*. On pourra remarquer que ce résultat n'est pas une conséquence immédiate du lemme 4.6. Il existe en effet des partitions de l'anneau par des familles de courbes fermées simples essentielles qui n'admettent pas de transversale. On pourra consulter [23] pour plus de détails sur le sujet.

Soit G l'image de $\mathbf{U}(1)$ dans Homéo(D^2) et x_0, l'unique point fixe de G. Pour tout $x \in D^2$, on note $\gamma(x)$ la G-orbite de x.

SOUS-LEMME 4.9. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si x et y sont deux points distincts d'une même G-orbite γ et $d(x,y) < \delta$, alors un des deux arcs délimités par x et y sur γ a un diamètre inférieur à ε.*

Démonstration. Notons x_0, l'unique point fixe de G. Soit $\varepsilon > 0$ et Δ un disque contenant x_0, invariant par G et de diamètre inférieur à ε (voir théorème 2.5). On pose $A = D^2 \setminus \Delta$. Il suffit de démontrer le sous-lemme pour les orbites contenues dans l'anneau A, ce qui résulte de l'observation suivante. Il existe un voisinage ouvert connexe V de l'identité dans G tel que

$$d(x, g(x)) < \varepsilon/2\,, \tag{4.1}$$

pour tous $x \in A$ et $g \in V$. Comme de plus G agit librement sur A, il existe $\delta > 0$ tel que:

$$d(x, g(x)) \geq \delta\,, \tag{4.2}$$

pour tous $x \in A$ et $g \in G \setminus V$. Par conséquent, si x et y sont deux points d'une même G-orbite $\gamma \subset A$ tels que $d(x,y)) < \delta$ alors $y = g(x)$ avec $g \in V$ et l'arc $\{g(x);\, g \in V\}$ de γ a un diamètre inférieur à ε.

On munit l'ensemble des orbites de G d'un ordre total en définissant la relation suivante: $\gamma \leq \gamma'$ (respectivement $\gamma < \gamma'$) si et seulement si γ est contenue dans le disque fermé (respectivement ouvert) bordé par γ' (avec la convention $x_0 \leq x_0$).

DÉFINITION 4.10. Étant donnés deux points $x, y \in D^2$ tels que $\gamma(x) < \gamma(y)$, on appelle *μ-chaîne monotone* de x à y une collection $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y\}$ de points de D^2 tels que

$$d(x_k, x_{k+1}) < \mu \quad \text{et} \quad \gamma(x_k) < \gamma(x_{k+1}),$$

pour $k = 0, \ldots, n-1$.

SOUS-LEMME 4.11. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que deux points quelconques x, y n'appartenant pas à la même orbite et vérifiant $d(x,y) < \delta$ peuvent être joints par une μ-chaîne monotone de diamètre inférieur à ε pour tout $\mu > 0$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) comme dans le sous-lemme 4.9. Soient x, y deux points tels que $\gamma(x) < \gamma(y)$ et $d(x,y) < \delta/2$. Étant donné $\mu > 0$ ($\mu < \delta$), on peut trouver une suite finie de G-orbites

$$\gamma_0 = \gamma(x) < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n = \gamma(y)$$

telle que la *distance*[3]) *de Hausdorff* $d_H(\gamma_k, \gamma_{k+1})$ de deux courbes consécutives de la suite soit inférieure à $\mu/3$.

Le segment xy rencontre chacune des courbes intermédiaires γ_k. Choisissons pour chaque $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ un point

$$x_k \in xy \cap \gamma_k .$$

Si $d(x_k, x_{k+1}) < \mu$ pour tout k, nous avons construit notre μ-chaîne de diamètre inférieur à ε ; sinon, voilà comment raffiner cette chaîne pour en obtenir une.

Soit x_r, x_{r+1}, une paire de points consécutifs tels que $d(x_r, x_{r+1}) \geq \mu$. Comme $d_H(\gamma_r, \gamma_{r+1}) < \mu/3$, on peut trouver un point x'_{r+1} sur γ_{r+1} tel que

$$d(x_r, x'_{r+1}) < \mu/3 ,$$

et donc :

$$d(x_{r+1}, x'_{r+1}) \leq d(x_{r+1}, x_r) + d(x_r, x'_{r+1}) < \delta/2 + \mu/3 < \delta .$$

Alors, d'après le sous-lemme 4.9, un des deux arcs délimités par x_{r+1} et x'_{r+1} sur γ_{r+1} a un diamètre inférieur à ε. Subdivisons cet arc en s sous-arcs de diamètre inférieur à $\mu/3$ et notons les points intermédiaires de la façon suivante :

$$x'_{r+1} = z^0_{r+1} ,\ z^1_{r+1} , \ldots ,\ z^s_{r+1} = x_{r+1} .$$

Choisissons ensuite des courbes

$$\gamma_r = \gamma^0 < \gamma^1 < \cdots < \gamma^s = \gamma_{r+1} .$$

---

[3]) La distance de Hausdorff est définie sur les parties fermées d'un espace métrique compact (X, d) par la formule :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} d(a, B),\ \max_{b \in B} d(b, A) \right\} .$$

Comme $d_H(\gamma_r, \gamma_{r+1}) < \mu/3$ et $\gamma_r < \gamma^j < \gamma_{r+1}$ pour $1 \leq j \leq s-1$, il est possible de trouver, sur chaque courbe intermédiaire γ^j, un point x^j_{r+1} tel que $d(x^j_{r+1}, z^j_{r+1}) < \mu/3$. La suite

$$x_r = x^0_{r+1}\,,\ x^1_{r+1}\,, \ldots,\ z^s_{r+1} = x_{r+1}$$

est donc une μ-chaîne joignant x_r et x_{r+1} qui appartient à un 2ε-voisinage du segment $x_r x_{r+1}$. En effectuant les corrections nécessaires pour chaque paire x_r, x_{r+1} telle que $d(x_r, x_{r+1}) \geq \mu$, on obtient finalement une μ-chaîne monotone joignant x et y et de diamètre inférieur à 4ε.

Preuve du Lemme 4.7. En utilisant le sous-lemme 4.11, on peut construire une suite de nombres réels $\delta_n > 0$, qui tend vers 0, et telle que deux points quelconques x, y vérifiant $d(x, y) < \delta_n$, peuvent être joints, pour tout $\mu > 0$, par une μ-chaîne de diamètre inférieur à $1/2^n$.

Soit X_0 une δ_0-chaîne monotone joignant x_0, le point fixe du groupe à un point x_∞ sur le bord du disque D^2. Récursivement, ayant défini X_n, on joint chaque paire de points consécutifs x^n_k, x^n_{k+1} de X_n, par une δ_{n+1}-chaîne monotone de diamètre inférieur à $1/2^n$ afin d'obtenir X_{n+1} et on pose :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n\,.$$

C'est alors un exercice standard de topologie ([14, Theorem 2.27]) de montrer que l'adhérence $\overline{X}$ de X dans D^2 est un arc joignant x_0 et x_∞. Cet arc est simple et rencontre chaque orbite en un point unique, par construction, ce qui achève la démonstration.

Preuve du théorème 4.5. Pour compléter la preuve du théorème 4.5, on choisit un arc α, transverse aux orbites, donné par le lemme 4.7 et une paramétrisation $x(r), r \in [0, 1]$ de cet arc. L'application

$$h : re^{i\theta} \mapsto \Psi(e^{i\theta}, x(r))\,,$$

où $\Psi : \mathbf{U}(1) \times D^2 \to D^2$ dénote l'action, nous donne alors une conjugaison topologique avec le groupe des rotations euclidiennes, $\mathrm{SO}(2)$.

5. Un lemme de M. H. A. Newman

Avant d'entreprendre l'étude des sous-groupes compacts d'homéomorphismes de la sphère, nous présentons un lemme dû à M. H. A. Newman [16].

LEMME 5.1. *Soit f un homéomorphisme périodique de S^2 de période $p > 1$, alors parmi les itérés de f, il en existe un, disons f^r, tel que :*

$$d(f^r, Id) > 1\,. \tag{5.1}$$

De plus :

$$d(f, Id) > \frac{2}{p}\,. \tag{5.2}$$

Démonstration. Commençons par remarquer que (5.2) est une conséquence de (5.1). En effet, dans (5.1), on peut supposer $r \leq p/2$ car l'inégalité (5.1) est équivalente à

$$d(f^{p-r}, Id) > 1\,.$$

Par conséquent la négation de (5.2) conduit à

$$d(f^r(x), x) \leq \sum_{i=0}^{r-1} d(f^{i+1}(x), f^i(x)) \leq \frac{2r}{p} \leq 1, \quad \forall x\,,$$

et donc à la négation de (5.1).

La preuve de la première inégalité résulte de la remarque suivante : supposons au contraire que $d(f^k, Id) \leq 1$ pour tout k, alors l'orbite d'un point quelconque x est entièrement contenue dans l'hémisphère de pôle x et par suite, pour tout p-uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})$ de nombres positifs tels que $\sum \lambda_i = 1$:

$$g_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) \neq 0\,, \tag{5.3}$$

pour tout x. Ceci implique l'existence d'une homotopie dans $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ entre l'identité et la fonction

$$g(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} f^i(x)\,, \tag{5.4}$$

ce qui est incompatible avec le fait que $\deg(g) = 0$ modulo p.

COROLLAIRE 5.2. *La boule unité fermée de* Homéo(S^2) *ne contient aucun sous-groupe compact non trivial.*

Démonstration. En effet, si un tel groupe existait, on pourrait trouver un élément non trivial f de ce groupe tel que

$$d(f^n, Id) \leq 1\,,$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$. En vertu du lemme 5.1, f n'est pas périodique. Quitte à remplacer f par son carré, on peut supposer que f préserve l'orientation et donc possède au moins un point fixe. Alors, d'après le lemme 2.5, f laisse invariant un disque topologique et la fermeture du groupe engendré par f est isomorphe à $\mathbf{U}(1)$. Mais ce groupe contient des éléments périodiques g vérifiant également

$$d(g^n, Id) \leq 1\,,$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$, ce qui est en contradiction avec le lemme 5.1.

Il en résulte qu'un sous-groupe compact d'homéomorphismes de la sphère ne *possède pas de petit sous-groupe*. En vertu du théorème 1.1, on peut donc énoncer :

THÉORÈME 5.3. *Tout sous-groupe compact d'homéomorphismes de la sphère est un groupe de Lie*

6. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 1.2. Nous envisagerons dans un premier temps le cas d'un sous-groupe compact G qui ne contient que des éléments qui préservent l'orientation, puis le cas général.

6.1 G NE CONTIENT QUE DES ÉLÉMENTS QUI PRÉSERVENT L'ORIENTATION

LEMME 6.1. *Soit G un sous-groupe compact de* $\text{Homéo}^+(S^2)$. *Alors tout élément de G est topologiquement conjugué à une rotation euclidienne d'ordre fini ou non.*

Démonstration. Soit $g \in G$ un élément non trivial. En tant qu'homéomorphisme qui préserve l'orientation de la sphère, g possède un point fixe x_0 (théorème de Lefschetz, par exemple). Du théorème 2.5, on déduit l'existence d'un disque invariant Δ contenant x_0. Le disque $\overline{S^2 \setminus \Delta}$ est également invariant et contient donc un second point fixe x_0^* de g. En vertu du corollaire 4.2, $Fix(g)$ est réduit à ces deux points.

Si g est d'ordre fini, il est conjugué à une rotation euclidienne d'ordre fini (voir [7]). Sinon, l'adhérence H du groupe engendré par g est isomorphe à $\mathbf{U}(1)$ (voir corollaire 4.4). Les orbites de H sont constituées par les deux points fixes x_0, x_0^* et des courbes fermées simples qui séparent x_0 et x_0^*. Le

lemme 4.7 nous assure l'existence d'un arc transverse aux orbites, joignant x_0 et x_0^*, ce qui nous permet, comme dans la preuve du théorème 4.5, d'établir que g est topologiquement conjugué à une rotation euclidienne d'ordre infini.

Soit $x \in S^2$. Le *stabilisateur* de x, noté $Stab(x)$, est le sous-groupe des éléments g de G tels que $g(x) = x$. Le sous-groupe compact $Stab(x)$ laisse invariant un disque contenant x. Il est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe $\mathbf{U}(1)$ en vertu du corollaire 4.4.

Inversement, soit H un sous-groupe fermé de G. Si $Fix(H) \neq \varnothing$ alors $Fix(H)$ contient exactement deux points x_0, x_0^* et H est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe $\mathbf{U}(1)$.

LEMME 6.2. *Si G est infini, il possède un sous-groupe isomorphe à* $\mathbf{U}(1)$.

Démonstration. D'après le théorème 5.3, G est un groupe de Lie. Par conséquent, si G est infini, sa dimension est supérieure à 1 (car G est compact). Il possède donc un sous-groupe à un paramètre non trivial et contient des éléments d'ordre infini. Soit g un tel élément. Alors l'adhérence du groupe engendré par g est isomorphe à $\mathbf{U}(1)$.

Nous allons maintenant envisager les divers cas possibles.

6.1.1 CAS 1 : G EST FINI. Chaque élément non trivial de G possède exactement deux points fixes. Seulement un nombre fini de points de la sphère ont un stabilisateur non trivial. Soit Σ cet ensemble, alors la projection canonique $\pi : S^2 \to S^2/G$ est un revêtement ramifié et on a la *formule de Riemann-Hurwitz* :

$$\chi(S^2) = n\chi(S^2/G) - \sum_{\bar{s} \in \Sigma/G} (\nu_{\bar{s}} - 1) \tag{6.1}$$

où n désigne le cardinal de G et $\nu_{\bar{s}}$ est le cardinal des stabilisateurs des points de ramification $s \in \bar{s}$. De cette formule, il résulte que $\chi(S^2/G) = 2$ et donc que S^2/G est homéomorphe à S^2. Ces revêtements sont entièrement classifiés par l'action du groupe G sur l'ensemble fini Σ. A chaque solution donnée par la formule (6.1) correspond un sous-groupe fini de SO(3) et donc une conjugaison topologique de G avec ce sous-groupe.

6.1.2 CAS 2 : IL N'Y A QU'UN STABILISATEUR INFINI. Soit H ce stabilisateur et désignons par x_0 et x_0^* les points fixes de H. Soit g un élément

quelconque du groupe G. Alors le point $g(x_0)$ est également d'indice infini et donc nécessairement

$$g(x_0) \in Fix(H) = \{x_0, x_0^*\} .$$

Si de plus $g(x_0) = x_0$, alors $g \in H$.

– Si ceci se produit pour tous les éléments du groupe alors $G = H$ et le groupe G est topologiquement conjugué au sous-groupe des rotations euclidiennes autour d'un axe donné.

– Sinon, on peut trouver un élément σ dans G tel que $\sigma(x_0) = x_0^*$ et $\sigma(x_0^*) = x_0$. On a alors nécessairement $\sigma^2 = Id$ et $\sigma h \sigma = h^{-1}$, pour tout $h \in H$. G est donc isomorphe au groupe diédral infini

$$D_\infty = \mathbf{Z}_2 \ltimes \mathbf{U}(1) .$$

De plus, σ induit une involution continue sur l'espace des orbites de H, qui est homéomorphe à un intervalle, et échange ses deux extrémités. Par suite, σ laisse invariante une et une seule des orbites de H. Les points fixes de σ sont nécessairement sur cette courbe. On construit alors facilement une conjugaison entre ce groupe G est l'action euclidienne standard du groupe D_∞.

6.1.3 CAS 3 : IL Y A AU MOINS DEUX STABILISATEURS INFINIS DISTINCTS. Dans ce cas, le groupe G agit transitivement sur S^2 en vertu du résultat suivant.

LEMME 6.3. *S'il existe deux stabilisateurs infinis distincts (en tant que sous-groupes de G), alors le groupe G agit transitivement sur la sphère.*

Démonstration. Soient a et b deux points d'indice infini ayant des stabilisateurs distincts H_a et H_b respectivement. L'orbite du point a sous l'action du groupe H_b, que l'on notera $H_b(a)$ est une courbe fermée simple passant par a et qui rencontre toutes les orbites du sous-groupe H_a assez voisines de a. Par suite, la G-orbite du point a, $G(a)$, est ouverte et fermée dans S^2, ce qui achève la démonstration.

Fixons donc un point a de la sphère et désignons par H le stabilisateur de ce point (nécessairement isomorphe à $\mathbf{U}(1)$). L'espace homogène, $G/H \cong S^2$, est muni naturellement d'une structure de variété analytique sur laquelle G agit également de façon analytique. On a donc trouvé sur S^2 une structure analytique invariante par G. On peut alors construire, par moyennisation, une métrique riemannienne sur S^2 invariante par G. Comme l'action de G est

transitive, cette métrique est à courbure constante. Quitte à multiplier cette métrique par une constante, on peut supposer que cette courbure est 1. Par conséquent, cette variété riemannienne est isométrique à la sphère standard et cette isométrie définit la conjugaison recherchée entre G et $\mathrm{SO}(3)$.

6.2 G CONTIENT DES ÉLÉMENTS QUI RENVERSENT L'ORIENTATION

Commençons par rappeler les faits suivants. Soit s un homéomorphisme régulier de la sphère qui renverse l'orientation.

- Si s possède un point fixe, alors nécessairement $s^2 = Id$ et s est topologiquement conjugué à une réflexion orthogonale [7].
- Si $s^2 = Id$ mais s est sans point fixe, alors S^2/s est homéomorphe au plan projectif et par suite, du fait de l'unicité du revêtement universel, s est topologiquement conjugué à la symétrie centrale $x \mapsto -x$.

Soit G_0 le sous-groupe de G des éléments qui préservent l'orientation. G_0 est un sous-groupe distingué d'indice 2. Quitte à effectuer une première conjugaison, on peut supposer que $G_0 \subset \mathrm{SO}(3)$.

6.2.1 CAS 1: $G_0 = \mathrm{SO}(3)$. Soit $s \in G \setminus G_0$. Tout cercle (euclidien) de S^2 est une orbite du stabilisateur $Stab(x)$ d'un point dans G_0. Par conséquent, l'image par s de tout cercle de S^2 est un cercle. D'après un résultat bien connu, ceci entraîne que s est une *anti-homographie* de la sphère. Comme de plus s est régulier, s appartient nécessairement à $\mathrm{O}(3)$ et ceci permet de conclure que $G = \mathrm{O}(3)$

6.2.2 CAS 2: $G_0 \simeq \mathrm{SO}(2)$. Désignons par x_0 et x_0^* les points fixes de G_0 et soit $s \in G \setminus G_0$. Alors, s permute les orbites de G_0 et induit un homéomorphisme sur le quotient S^2/G_0 qui est un intervalle. Il y a donc deux possibilités:

– Si s fixe x_0 et x_0^*, alors $s^2 = Id$ et s est conjugué à une réflexion. G est un produit semi-direct de $\mathbf{Z}_2$ par $\mathbf{U}(1)$ et $sgs = g^{-1}$ pour tout $g \in G_0$. En effet, sinon on aurait $sgs = g$ pour tout $g \in G_0$ et la courbe $Fix(s)$ qui contient x_0 et x_0^* serait une orbite de G_0, ce qui n'est pas possible. Par ailleurs, s induit un homéomorphisme croissant sur l'intervalle S^2/G_0 de période 2 qui ne peut donc être que l'identité. Par suite, s préserve les orbites de G_0. Chaque orbite non triviale de G_0 rencontre $Fix(s)$ en deux points au moins. Mais si x et y sont deux points distincts de $Fix(s)$ appartenant à la même orbite de G_0, alors $y = g(x)$ pour un certain $g \in G_0$ et la relation $sgs = g^{-1}$ nous donne $g^2(x) = x$. Donc g est nécessairement d'ordre 2

et ceci nous permet de conclure que chaque orbite non triviale de G_0 ne rencontre $Fix(s)$ qu'en deux points seulement. On est alors en mesure de construire une conjugaison entre G et le sous-groupe de O(3) engendré par les rotations autour de l'axe $x_0x_0^*$ et la réflexion par rapport à un équateur contenant cet axe.

– Si s échange x_0 et x_0^*, alors s induit un homéomorphisme décroissant sur l'intervalle S^2/G_0. Cet homéomorphisme a un unique point fixe qui correspond à une orbite J de G_0 invariante par s. Alors, quitte à composer s avec une rotation de G_0 on peut supposer que s a un point fixe sur J et donc se ramener encore une fois au cas où $s^2 = Id$ et s est conjugué à une réflexion. On a $Fix(s) = J$ et donc $sgs = g$ pour tout $g \in G_0$. Dans ce cas, G est le produit direct de $\mathbf{Z}_2$ par $\mathbf{U}(1)$ et on construit facilement une conjugaison entre G et le sous-groupe de O(3) engendré par les rotations autour de l'axe $x_0x_0^*$ et la réflexion par rapport à l'équateur orthogonal à cet axe.

6.2.3 CAS 3: $G_0 \simeq D_\infty$. Dans ce cas G_0 est engendré par le groupe des rotations autour d'un axe $x_0x_0^*$ et par un retournement ρ qui échange x_0 et x_0^* et dont l'axe est perpendiculaire à la droite $x_0x_0^*$. Soit $s \in G \setminus G_0$, alors s permute également les points x_0 et x_0^* car le sous-groupe des rotations autour de l'axe $x_0x_0^*$ est invariant par s. Quitte à composer s avec ρ, on peut supposer que $s(x_0) = x_0$ et $s(x_0^*) = x_0^*$ et donc que s est une réflexion topologique. En conjuguant s par une rotation d'axe $x_0x_0^*$, on peut supposer également que $Fix(s)$ contient les points fixes de ρ. Alors $s\rho s = \rho$. On construit alors facilement une conjugaison entre G et le sous-groupe de O(3) engendré par G_0 et la réflexion plane par rapport au plan contenant l'axe $x_0x_0^*$ et l'axe du retournement ρ.

6.2.4 CAS 4: G_0 EST FINI. Dans ce cas G_0 appartient à un des cinq types bien connus de sous-groupes finis de SO(3) [1]. Il y a deux possibilités:

– $G\setminus G_0$ ne contient aucune *réflexion topologique*, autrement dit, $Fix(s) = \varnothing$ pour tout $s \in G \setminus G_0$. Alors S^2/G est homéomorphe au plan projectif et la projection canonique $\pi : S^2 \to S^2/G$ est un revêtement ramifié, ce qui permet de conclure que G est conjugué à un sous-groupe fini de O(3).

– $G\setminus G_0$ contient une *réflexion topologique*. Dans ce cas, G est un produit semi-direct

$$\mathbf{Z}_2 \ltimes G_0 .$$

Par ailleurs, si s et s' sont deux réflexions topologiques distinctes dans G alors le cardinal de l'ensemble $Fix(s) \cap Fix(s')$ est égal à 2. En effet, un point fixe

commun à s et s' est un point fixe de la rotation ss' qui en possède au plus 2 et si les deux courbes $Fix(s)$ et $Fix(s')$ ne s'intersectent pas, ou seulement en un point, alors la rotation ss' envoie un disque fermé à l'intérieur de lui-même (à l'exclusion éventuellement d'un point du bord), ce qui n'est pas possible pour une rotation. On est alors en mesure de construire « à la main », dans chacune des cinq situations possibles, des domaines fondamentaux et de montrer, chaque fois, que G est conjugué à un sous-groupe fini de O(3) (voir [7] et [8]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGER, M. *Géométrie. Vol. 1.* Seconde éd., Nathan, Paris, 1979.

[2] BING, R. H. A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres. *Ann of Math. (2) 56* (1952), 354–362.

[3] —— Inequivalent families of periodic homeomorphisms of E^3. *Ann. of Math. (2) 80* (1964), 78–93.

[4] BONATTI, C. and B. KOLEV. Surface homeomorphisms with zero-dimensional singular set. *Topology Appl. 90* (1998), 69–95.

[5] BREDON, G. E. Exotic actions on spheres.

[6] CAIRNS, G. and E. GHYS. The local linearization problem for smooth, SL(n)-actions. *L'Enseignement Math. (2) 43* (1997), 133–171.

[7] CONSTANTIN, A. and B. KOLEV. The theorem of Kerékjártó on periodic homeomorphisms of the disk and the sphere. *L'Enseignement Math. 40* (1994), 193–204.

[8] DE KERÉKJÁRTÓ, B. Über die endlichen topologischen Gruppen der Kugelfläche. *Proc. Acad. Amsterdam 22* (1919).

[9] —— Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen. *Acta scient. math. Szeged 6* (1934), 235–262. Ergänzung *ibid., 7* (1934), 58–59.

[10] —— Sur les groupes compacts de transformations topologiques des surfaces. *Acta Math. 74* (1941), 129–173.

[11] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* The Benjamin/Cumminggs Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1986.

[12] GHERING, F. W. and G. J. MARTIN. Discrete quasiconformal groups. *Proc. London Math. Soc. (3) 55* (1987), 231–358.

[13] GLEASON, A. M. Spaces with a compact Lie group of transformations. *Proc. Amer. Math. Soc. 1* (1950), 35–43.

[14] HOCKING, J. G. and G. S. YOUNG. *Topology.* Dover Publications Inc., New York, 1988.

[15] MONTGOMERY, D. and L. ZIPPIN. Topological transformation groups. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N. Y., 1974. (Reprint of the 1955 original.)

[16] NEWMAN, M. H. A. A theorem on periodic transformations of spaces. *Quart. J. Math. 2* (1931), 1–8.

[17] —— *Elements of the Topology of Plane Sets of Points.* Dover Publications Inc., New York, 1992. (Reprint of the 2nd ed.)

[18] POMMERENKE, CH. *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[19] PONTRYAGIN, L. S. *Topological Groups.* Gordon and Breach, New York, 1966.

[20] SERRE, J. P. Le cinquième problème de Hilbert. Etat de la question en 1951. *Bull. Soc. Math. France 80* (1952), 1–10.

[21] VON NEUMANN, J. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. *Ann. of Math. (2) 34* (1933), 170–190.

[22] WALTERS, P. *An Introduction to Ergodic Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol 79. Springer, New York, 1982.

[23] WHITNEY, H. On regular families of curves. *Bull. Amer. Math. Soc. 47* (1941), 145–147.

[24] WHYBURN, G. T. *Topological Analysis.* Second, revised edition. Princeton Mathematical Series, *23*. Princeton University Press, Princeton, 1964.

[25] YANG, C. T. Hilbert's fifth problem and related problems on transformation groups. *Proc. Sympos. Pure Math. 28, A.M.S., 1976.*

(Reçu le 30 septembre 2005)

Boris Kolev

CMI
39, rue F. Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13
France
e-mail : boris.kolev@cmi.univ-mrs.fr