

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	51 (2005)
Heft:	1-2: L'enseignement mathématique
 Artikel:	Classes d'homotopie de champs de vecteurs Morse-Smale sans singularité sur les fibrés de Seifert
Autor:	Dufraine, Emmanuel
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-3586

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CLASSES D'HOMOTOPIE DE CHAMPS DE VECTEURS
MORSE-SMALE SANS SINGULARITÉ SUR LES FIBRÉS DE SEIFERT

par Emmanuel DUFRAINE*)

RÉSUMÉ. Nous considérons les applications d'une variété de dimension trois, compacte, orientable et sans bord dans la sphère S^2 . Nous donnons un critère permettant de décider si deux applications données sont homotopes, en fonction de l'ensemble des points où les applications sont égales et de celui où elles sont opposées. Nous étendons ces résultats aux champs de vecteurs non-singuliers et aux champs de plans co-orientés sur les variétés de dimension trois. Finalement, nous appliquons ce critère à l'étude des champs Morse-Smale non-singuliers sur les variétés de Seifert.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	4
1.1 Critère d'homotopie pour les applications	5
1.2 Critère d'homotopie pour les champs de vecteurs	7
1.3 Champs de vecteurs Morse-Smale non-singuliers	8
2. Entrelacs encadrés et modèles de Pontryagin'	10
2.1 Enlacement avec un entrelacs quelconque	11
2.2 Classification des entrelacs encadrés	12
2.3 Modèles de Pontryagin	15
3. Comparaison d'applications	16
3.1 Première obstruction	17
3.2 Seconde obstruction	17
3.3 Exemple	19
4. Application aux champs de vecteurs non-singuliers	20
5. Champs de Morse-Smale sur les variétés de Seifert	22
5.1 Construction initiale	22
5.2 Opération de Wada	22
5.3 Orbites périodiques sur la surface de base	23
5.4 Preuve du théorème 1.1	26
5.5 Discussion	28

*) Ce travail est financé par une bourse européenne «Marie Curie».

1. INTRODUCTION

De nombreuses recherches actuelles portent sur l'étude de champs de 2-plans ou de champs de vecteurs partout non nuls, tangents à une variété de dimension trois (structures de contact, feuilletacts, champs de Morse-Smale non-singuliers ... voir en particulier [5, 7, 12, 14, 15]). La classification de certaines structures particulières (structures de contact tendues par exemple) dans les différentes classes d'homotopie est un sujet très actif actuellement. Le fibré tangent d'une variété de dimension trois, compacte, orientable est trivialisable ; si la trivialisation est fixée, un champ de 2-plans co-orienté ou un champ de vecteurs non-singulier est alors uniquement associé à une application de M dans la sphère S^2 .

Nous donnons dans cette note un critère géométrique pour décider si deux applications de M dans S^2 sont homotopes ou non (proposition 1.5). L'avantage de ce critère est qu'il se généralise aux champs de vecteurs non-singuliers (ou champs de plans co-orientés) et qu'il ne dépend pas du choix d'une trivialisation du fibré tangent de la variété.

Nous utilisons ce critère pour redémontrer de manière élémentaire (sans utiliser les décompositions en anses rondes d'Asimov et Morgan) le résultat suivant, conséquence des travaux de Yano [25, 26] et de Wilson [24] :

THÉORÈME 1.1. *Pour chaque variété de Seifert M^3 , il existe un nombre $n(M)$ tel que tout champ de vecteurs non-singulier sur M est homotope à un champ de Morse-Smale non-singulier ayant au plus $n(M)$ orbites périodiques.*

Les champs de vecteurs Morse-Smale non-singuliers sur les variétés de dimension trois admettent beaucoup de propriétés intéressantes, malgré leur apparente simplicité. On pourra en particulier se reporter aux articles de Franks et Wada [8, 23] concernant la topologie des orbites périodiques des champs de la sphère S^3 . Les bifurcations des entrelacs d'orbites périodiques ont été étudiées dans [3]. Enfin des liens étonnantes ont été mis en évidence avec les hamiltoniens intégrables dans [4].

Le théorème 1.1 montre en particulier que l'on peut toujours « simplifier » par une homotopie n'importe quelle dynamique sur une variété de Seifert. On voit aussi que le nombre d'orbites périodiques d'un champ de Morse-Smale non-singulier, que l'on peut interpréter comme une mesure de complexité pour ces champs, n'est pas relié à sa classe d'homotopie.

Dans [15, § 6], MacKay propose d'étudier l'influence de la géométrie de la variété (au sens de Thurston) sur l'existence de *dynamique compliquée*, à homotopie près (il emploie le terme *isotopy* pour l'homotopie de champs non-singuliers). En particulier, il rappelle que l'on peut rendre périodique, par une homotopie, le flot géodésique sur une surface. Le théorème 1.1 entraîne l'existence d'une homotopie du flot géodésique vers un champ de Morse-Smale non-singulier.

Le critère d'homotopie et le processus de construction de champs de Morse-Smale présentés ici sont des généralisations de [6] où nous menions cette étude sur la sphère S^3 . Nous espérons que les techniques employées ici pourront être utilisées dans d'autres situations.

1.1 CRITÈRE D'HOMOTOPIE POUR LES APPLICATIONS

Considérons une variété M de dimension trois, compacte, orientable, sans bord. Nous nous intéressons aux applications lisses de M dans la sphère S^2 , à homotopie près.

Si la variété de départ est la sphère S^3 (ou une sphère d'homologie), Hopf associe à une application f un nombre, $H(f)$, en calculant l'enlacement entre les images réciproques de deux valeurs régulières de f . Ce nombre ne dépend pas du choix des valeurs régulières et est invariant à homotopie de f près. De plus, il classe ces applications à homotopie près (cf. [16] par exemple).

Plus généralement, si f est une application de M dans S^2 , l'image réciproque d'une valeur régulière y est une sous-variété orientée de codimension 2 de M . Le choix d'une base du plan tangent à S^2 au point y permet de trivialiser le fibré normal de $f^{-1}(y)$, on dit que cette sous-variété associée à f est *encadrée* (*framed* en anglais). Dans [21, 22] (voir aussi [16, § 7]), Pontryagin montre que la variété encadrée associée à f ne dépend pas, à *cobordisme encadré* près, du choix de la valeur régulière ou du choix de la base du plan tangent à S^2 . Sa classe de cobordisme encadré est indépendante de f dans sa classe d'homotopie et les classes de cobordisme encadré des entrelacs encadrés d'une variété de dimension trois sont en bijection, par cette association, avec les classes d'homotopie des applications de M dans S^2 .

L'existence d'une homologie entre deux entrelacs d'une variété de dimension trois étant équivalente à l'existence d'un cobordisme entre ces entrelacs (cf. remarque 2.3), on associe donc à une application f une *classe caractéristique*, c_f , dans $H_1(M, \mathbf{Z})$ qui est la classe d'homologie de $f^{-1}(y)$ pour une valeur régulière y . Cette classe caractéristique ne dépend pas du choix de y et est invariante si on change f par une homotopie. D'après le résultat

de Pontryagin, il reste donc à comprendre la partie «encadrement» pour caractériser la classe d'homotopie de f . Pour cela, nous rappelons qu'un élément τ de $H_1(M, \mathbf{Z})$ est *de torsion* s'il existe un entier k non nul tel que $k\tau = 0$.

DÉFINITION 1.2. Le *diviseur maximal (libre)* d'une classe d'homologie c de $H_1(M, \mathbf{Z})$ est

- le plus grand entier non nul p vérifiant $c = pg$ pour g dans $H_1(M, \mathbf{Z})$ si c n'est pas de torsion,
- nul si c est de torsion.

Un élément dont le diviseur maximal est égal à 1 est appelé *générateur* ou *élément primitif*.

Pontryagin montre dans [21, §4] la proposition suivante (voir aussi [2, Theorem 6.2.7], [10, Proposition 4.1] et [13, Proposition 2.1] pour des preuves plus modernes).

PROPOSITION 1.3. *La classe d'homotopie d'une application f de M dans S^2 est décrite par sa classe caractéristique c_f dans $H_1(M, \mathbf{Z})$ et un «degré de Hopf» d dans un espace affine \mathbf{Z}_{2p_f} , où p_f est le diviseur maximal de c_f .*

Nous expliquons plus précisément cette description à la section 2. Le problème de cette description est qu'il n'y a pas de manière canonique d'identifier l'espace affine \mathbf{Z}_{2p_f} avec \mathbf{Z}_{2p_f} (voir l'exemple au §3.3). On peut montrer qu'une telle identification existe si c_f est nulle ou de torsion; en particulier, on retrouve l'invariant de Hopf dans \mathbf{Z} si $M = S^3$ (cf. [21]).

Dans [13], Kuperberg remarque après la preuve de la proposition 2.2 que, si l'on compare deux applications f et g ayant même classe caractéristique c , la différence des degrés de Hopf de f et g est un élément de \mathbf{Z}_{2p_f} de manière canonique.

Le premier objectif de cette note est de donner une preuve géométrique de ce fait. Pour cela, nous considérons les ensembles

$$C_+(f, g) = \{x \in M, \quad f(x) = g(x)\}$$

et

$$C_-(f, g) = \{x \in M, \quad f(x) = -g(x)\}.$$

On montre que C_+ et C_- sont, quitte à perturber f et g , des entrelacs orientés de M . Nous montrons alors :

LEMME 1.4. *Pour deux applications f et g de M dans S^2 , on a*

$$[C_-(f, g)]_{H_1(M)} = c_f - c_g \quad \text{et} \quad [C_+(f, g)]_{H_1(M)} = c_f + c_g.$$

D'après le lemme précédent, si $c_f = c_g$, la classe d'homologie de $C_-(f, g)$ est nulle; comme C_+ et C_- sont disjoints, l'enlacement entre C_+ et C_- est donc bien défini dans \mathbf{Z}_{2p} où p est le diviseur maximal de $c_f = c_g$ (voir la section 2.1). On obtient alors le premier résultat de cette note :

PROPOSITION 1.5. *Deux applications f et g de M dans S^2 sont homotopes si et seulement si*

- $[C_-(f, g)]_{H_1(M)} = 0$
et, en notant p le diviseur maximal de c_f et c_g ,
- $\text{Enl}(C_+(f, g), C_-(f, g)) \equiv 0 \text{ modulo } 2p$.

REMARQUE 1.6. On peut définir une *distance en classes d'homotopie* entre deux applications :

- la classe d'homologie de C_- donne la différence en classes d'homologie entre les classes caractéristiques;
- si la distance entre les classes caractéristiques est nulle, l'enlacement $\text{Enl}(C_+, C_-)$ donne la distance, dans \mathbf{Z}_{2p} , en classes d'homotopie entre les deux applications.

1.2 CRITÈRE D'HOMOTOPIE POUR LES CHAMPS DE VECTEURS

Si X et Y sont deux champs de vecteurs non-singuliers sur M , on pose

$$C_+(X, Y) = \{x \in M, \quad X(x) = \lambda Y(x), \quad \lambda > 0\}$$

et

$$C_-(X, Y) = \{x \in M, \quad X(x) = \lambda Y(x), \quad \lambda < 0\}.$$

Comme pour les applications, le théorème de transversalité permet de supposer (après une éventuelle petite perturbation de X et Y) que C_+ et C_- sont des entrelacs orientés plongés dans M .

On note $\mathcal{E}(X) \in H_1(M, \mathbf{Z})$ le dual de Poincaré de la classe d'Euler de X^\perp (le champ de plans X^\perp est l'orthogonal de X pour une métrique riemannienne quelconque sur M). Pour les champs de vecteurs, la proposition 1.5 donne le résultat :

PROPOSITION 1.7. *Deux champs de vecteurs non-singuliers X et Y sur M sont homotopes si et seulement si*

- $[C_-(X, Y)]_{H_1(M)} = 0$, ce qui entraîne $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(Y)$, et en notant p le diviseur maximal de $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{E}(Y)$,
- $\text{Enl}(C_+(X, Y), C_-(X, Y)) \equiv 0 \pmod{p}$.

La proposition 1.7 est une généralisation de [19, Proposition 1.1] (voir aussi [6, Lemma 23]) où ce résultat est prouvé dans le cas de la sphère S^3 .

REMARQUE 1.8. Pour les champs de plans co-orientés (feuilletages, structures de contact, feuilletacts, ...), il suffit de remplacer C_+ (resp. C_-) par l'ensemble des points où les deux champs de plans coïncident avec la même orientation (resp. orientation opposée) pour que la proposition précédente soit valide.

1.3 CHAMPS DE VECTEURS MORSE-SMALE NON-SINGULIERS

DÉFINITION 1.9. Un champ de vecteurs X sur M est de type *Morse-Smale non-singulier* si

- aucun point de M n'est fixé par le flot ϕ de X ,
- l'ensemble non-errant de ϕ est réduit à un nombre fini d'orbites périodiques hyperboliques, et
- les variétés stables et instables des orbites périodiques s'intersectent transversalement.

Asimov montre dans [1] que sur toute variété de dimension supérieure ou égale à 4 et de caractéristique d'Euler nulle, tout champ de vecteurs non-singulier est homotope à un champ de Morse-Smale non-singulier. Morgan montre ensuite [18] que ce résultat ne peut être vrai en dimension trois puisque beaucoup de variétés n'admettent aucun champ de Morse-Smale non-singulier. En généralisant la notion de décomposition en anses rondes d'Asimov, il montre en effet que les seules variétés de dimension trois orientables, à bord torique et premières pour la décomposition en somme connexe admettant des champs Morse-Smale non-singuliers sont les variétés graphées (recollement de variétés de Seifert le long de leurs bords).

Sur les variétés de dimension trois admettant des champs Morse-Smale non-singuliers, Yano donne dans [26] une caractérisation des classes d'homotopie admettant des champs de Morse-Smale non-singuliers. En particulier, il montre

que sur les variétés de Seifert, toute classe d'homotopie de champs de vecteurs admet un champ Morse-Smale non-singulier. Sur la sphère S^3 , il existe un champ de vecteurs Morse-Smale non-singulier avec au plus 6 orbites périodiques dans chaque classe d'homotopie (voir [24] et [6]). Yano en déduit l'existence d'un nombre $n(M)$ tel qu'il existe un champ de type Morse-Smale avec au plus $n(M)$ orbites périodiques dans chaque classe d'homotopie de champs de vecteurs possible sur M .

L'idée de Yano est tout d'abord de montrer que s'il existe un champ de Morse-Smale ayant une classe d'Euler donnée, alors toutes les classes d'homotopie ayant cette classe d'Euler admettent un champ de Morse-Smale. Puis il montre, sur les variétés de Seifert, que l'on peut construire un champ de Morse-Smale ayant n'importe quelle classe d'Euler.

Nous utilisons la même stratégie, mais quand Yano utilise la somme connexe avec S^3 pour réaliser la première étape, nous utilisons le critère donné à la proposition 1.7 pour construire les champs de vecteurs (proposition 5.9). En outre, nous n'utilisons pas la décomposition en anses rondes de la variété, élément essentiel de la preuve de Yano. Enfin, nous précisons les résultats de [25], afin de prouver l'existence du nombre $n(M)$.

L'avantage de notre approche est d'une part que nous construisons explicitement des champs de vecteurs Morse-Smale dans chaque classe d'homotopie ; d'autre part, les orbites périodiques des champs de vecteurs que nous construisons ne sont en général pas homologues à zéro. En particulier, ces champs sont transverses à un feuilletage, grâce à un résultat de Goodman ([11], voir aussi [27]). Cela nous amène à discuter d'une classification des entrelacs essentiels (sans composante homologue à zéro) similaire à celle de Wada [23] dans le cas de la sphère (section 5.5).

REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier Pierre Derbez pour son aide «homologique» et l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je remercie aussi Max Forester, Robert MacKay et Colin Rourke pour de nombreuses discussions très motivantes, ainsi que Daniel Lines pour son aide précieuse. Alexis Marin m'a aidé à corriger certaines erreurs contenues dans cet article, je l'en remercie vivement. Enfin je suis reconnaissant à Étienne Ghys pour ses encouragements.

2. ENTRELACS ENCADRÉS ET MODÈLES DE PONTRYAGIN

Nous considérons M une variété de dimension trois, compacte, connexe et orientée.

DÉFINITION 2.1. Un entrelacs L dans M est *encadré* s'il est orienté et s'il existe une trivialisation \mathfrak{v} du fibré normal à L , compatible avec l'orientation de M .

Deux entrelacs encadrés (L, \mathfrak{v}) et $(\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{v}})$ sont *e-cobordants* s'il existe une surface S , plongée dans $M \times I$, telle que S rencontre le bord de $M \times I$ transversalement, $\partial S = L \times \{0\} \cup -\tilde{L} \times \{1\}$ et s'il existe \mathfrak{V} une trivialisation du fibré normal de S coïncidant avec \mathfrak{v} et $-\tilde{\mathfrak{v}}$ le long de $L \times \{0\}$ et de $-\tilde{L} \times \{1\}$. Une classe pour cette relation d'équivalence est appelée une classe de *cobordisme encadré*.

REMARQUE 2.2. Dans cette définition, la surface S est nécessairement orientable.

La donnée d'une trivialisation du fibré normal à un entrelacs orienté L dans M (resp. à une surface (orientable) S dans $M \times I$) est équivalente à la donnée d'un champ de vecteurs non-singulier (tangent à M (resp. $M \times I$)) normal à L (resp. S).

Réciproquement, étant donnée une trivialisation \mathfrak{v} du fibré normal de L dans M (resp. d'une surface S dans $M \times I$), nous appellerons *champ de vecteurs constant dans \mathfrak{v}* un champ de vecteurs au voisinage de L (resp. S) dont la restriction à L (resp. S) est envoyée sur une constante par \mathfrak{v} .

REMARQUE 2.3. Deux entrelacs orientés L et \tilde{L} sont *cobordants* s'il existe une surface S plongée dans $M \times I$, telle que S rencontre le bord de $M \times I$ transversalement, $\partial S = L \times \{0\} \cup -\tilde{L} \times \{1\}$. Il est clair que si L et \tilde{L} sont cobordants, ils sont homologues. La réciproque est vraie aussi: si L et \tilde{L} sont homologues, il existe σ une 2-chaîne dans $M \times I$ entre L et \tilde{L} . Il est facile de réaliser σ comme une surface immergée dans $M \times I$, plongée partout sauf en un nombre fini d'auto-intersections. En passant localement en coordonnées complexes et en raisonnant comme en dimension réelle 1, ces auto-intersections s'éliminent facilement pour obtenir un cobordisme S .

2.1 ENLACEMENT AVEC UN ENTRELACS QUELCONQUE

On considère deux entrelacs disjoints K et L , orientés et homologues à zéro dans M . Soit σ_K une 2-chaîne bordant K (la 2-chaîne σ_K existe car K est homologue à zéro), σ_K est orientée de sorte que l'orientation qu'elle induit sur son bord soit celle de K . On compte le nombre algébrique de points d'intersection entre σ_K et L (généralement, ils s'intersectent transversalement) et on pose $\text{Enl}(K, L) = \sigma_K \cdot L$. Ce *nombre d'enlacement* ne dépend pas du choix de σ_K car L est aussi homologue à zéro; on montre aussi que $\text{Enl}(K, L) = \text{Enl}(L, K)$.

Nous aurons besoin d'une définition d'enlacement plus générale. Soit K un entrelacs orienté de M , d'homologie c (on note p le diviseur maximal de c), si L est un entrelacs orienté disjoint de K d'homologie nulle, il existe une 2-chaîne orientée σ_L bordant L et intersectant K de manière transverse. En comptant le nombre algébrique d'intersections, on pose $\text{Enl}_{\sigma_L}(K, L) = \sigma_L \cdot K$. Ce nombre dépend du choix de σ_L , mais sa réduction modulo p ne dépend que de K et L . En effet, si σ'_L est une autre 2-chaîne orientée bordant L , la réunion $\Sigma = \sigma_L \cup -\sigma'_L$ représente un élément de $H_2(M)$. Ainsi la différence $\text{Enl}_{\sigma_L}(K, L) - \text{Enl}_{\sigma'_L}(K, L)$ est naturellement dans $H_0(M) = \mathbf{Z}$ et vaut $[K]_{H_1} \cdot [\Sigma]_{H_2}$.

- Si $[K]_{H_1}$ est un élément de torsion, le produit $[K]_{H_1} \cdot [\Sigma]_{H_2}$ est un élément de torsion de \mathbf{Z} , il est donc nul et $\text{Enl}_{\sigma_L}(K, L) = \text{Enl}_{\sigma'_L}(K, L)$.
- Si $[K]_{H_1}$ n'est pas de torsion, son diviseur maximal p divise le produit $[K]_{H_1} \cdot [\Sigma]_{H_2}$ et $\text{Enl}_{\sigma_L}(K, L) - \text{Enl}_{\sigma'_L}(K, L) \equiv 0 \pmod{p}$.

DÉFINITION 2.4. L'*enlacement* de L avec K est défini par

$$\text{Enl}(K, L) \equiv \sigma_L \cdot K \pmod{p}.$$

Soient K un nœud orienté de M^3 et \mathcal{T} une paramétrisation de son voisinage tubulaire (i.e. un difféomorphisme $\mathcal{T}: D^2 \times S^1 \rightarrow M$ tel que $\mathcal{T}(D^2 \times S^1)$ soit un voisinage de $K = \mathcal{T}(\{0\} \times S^1)$). L'image par \mathcal{T} d'un cercle $\{x\} \times S^1$ sera appelée un *1-câble* de K . Plus généralement, en remarquant que les disques transverses à K sont naturellement orientés :

DÉFINITION 2.5. Un *n-câble* L (pour n un entier non nul) de K est un nœud orienté, dans un voisinage tubulaire de K , intersectant les disques transverses à K de manière positive en n points.

Si K est homologue à zéro, on peut définir plus précisément, pour p et q deux entiers premiers entre eux (p non nul) :

DÉFINITION 2.6. Un (p, q) -câble L de K est un p -câble de L tel que l'enlacement entre L et K soit égal à q .

L'image d'un nœud (p', q') de $\partial D^2 \times S^1$ par une paramétrisation du voisinage tubulaire de K donne un $(p', q' + k)$ -câble de K . Comme K est homologue à zéro, il existe une paramétrisation du voisinage tubulaire de sorte que k soit nul.

Si γ est un entrelacs dans M et que \mathfrak{v} est une trivialisation de son fibré normal, on note $\mathfrak{v}\gamma$ l'entrelacs obtenu en poussant γ le long d'un champ de vecteurs constant dans \mathfrak{v} .

DÉFINITION 2.7. Pour γ un nœud homologue à zéro dans M , on note \mathfrak{w}_n une trivialisation de son fibré normal telle que $\mathfrak{w}_n\gamma$ soit un $(1, n)$ -câble de γ .

2.2 CLASSIFICATION DES ENTRELACS ENCADRÉS

Soient (L, \mathfrak{v}) et $(\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{v}})$ deux entrelacs encadrés, tels que L et \tilde{L} sont homologues ; on note c la classe d'homologie de L et de \tilde{L} et p son diviseur maximal.

Soit $S \subset M \times I$ un cobordisme réalisant cette homologie, on suppose pour l'instant que S est connexe. Soit D un disque de S , on peut trivialiser le fibré normal de $S \setminus D$ en étendant \mathfrak{v} et $-\tilde{\mathfrak{v}}$, on note $\mathfrak{V}_{S \setminus D}$ une telle trivialisation. On considère un petit disque dans le complément de $L \cup \tilde{L}$ dans $M \times \{1\}$, on note γ son bord.

Il existe un entier n tel que (L, \mathfrak{v}) et $(\tilde{L} \coprod \gamma, \tilde{\mathfrak{v}} \coprod \mathfrak{w}_n)$ sont e-cobordants, le cobordisme étant obtenu en collant un cylindre à S le long de ∂D et en prolongeant $\mathfrak{V}_{S \setminus D}$ à ce cylindre, voir la figure 1 (cette construction peut être trouvée aussi dans [9, §3.3.3]). Comme nous avons supposé S connexe, ce nombre n est indépendant du choix de D dans S . De plus, on a le lemme suivant.

LEMME 2.8. *Le nombre n ne dépend pas du choix de S ou de $\mathfrak{V}_{S \setminus D}$ modulo $2p$.*

Démonstration. Notons $n(S, \mathfrak{V})$ le nombre obtenu avec S et $\mathfrak{V}_{S \setminus D}$ pour D un disque de S . Considérons S' un autre cobordisme entre L et \tilde{L} , pour D' un disque de S' et $\mathfrak{V}'_{S' \setminus D'}$ une trivialisation du fibré normal

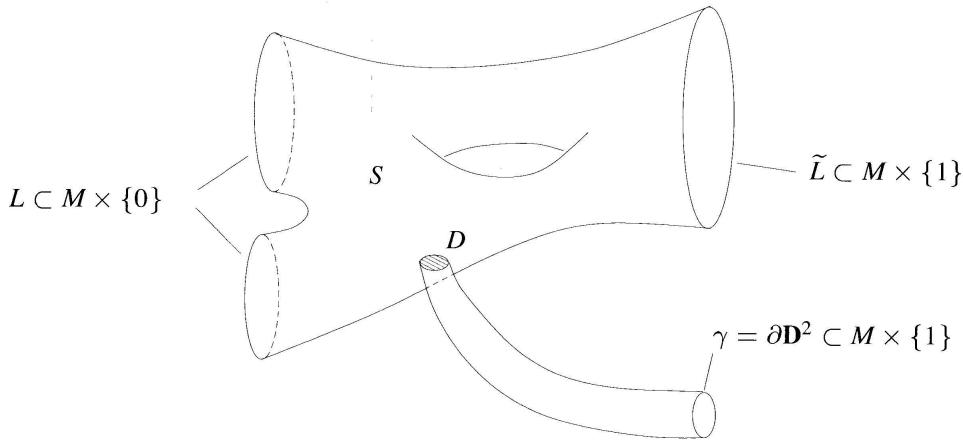


FIGURE 1
La surface S privée de D , et son cylindre

de $S' \setminus D'$, nous notons $n(S', \mathfrak{V}')$ le nombre obtenu. Notre objectif est de prouver $n(S, \mathfrak{V}) \equiv n(S', \mathfrak{V}') \pmod{2p}$.

- Soit \mathfrak{V}_0 un champ de vecteurs, tangent à $M \times I$, défini sur $S \setminus D$, constant dans \mathfrak{V} . Le champ de vecteurs \mathfrak{V}_0 est partout normal à $S \setminus D$, on le prolonge en un champ X_0 au voisinage de $S \setminus D$ et on note S_0 la surface obtenue en poussant $S \setminus D$ le long de X_0 ; on note γ_0 la composante de bord de S_0 correspondant à ∂D . On remarque que les surfaces $S \setminus D$ et S_0 ne s'intersectent jamais.

LEMME 2.9. *Il est possible de coller un disque à S_0 , le long de γ_0 , pour obtenir une surface S_1 ayant un nombre d'intersection avec S égal à $n(S, \mathfrak{V})$.*

Démonstration. Pour cela, il suffit de remarquer que, par définition de $n(S, \mathfrak{V})$, on peut coller un cylindre C à $S \setminus D$ le long de ∂D de sorte que son autre bord γ soit dans $M \times \{1\}$ le bord d'un disque F . Nous pouvons étendre \mathfrak{V}_0 le long de ce cylindre et ainsi, en poussant γ le long de \mathfrak{V}_0 , on obtient un nœud s'enlaçant $n(S, \mathfrak{V})$ fois autour de γ .

La surface S est homotope à l'union $\bar{S} = (S \setminus D) \cup C \cup F$, de même, la surface S_0 est homotope à la surface \bar{S}_0 obtenue en poussant $(S \setminus D) \cup C$ le long de \mathfrak{V}_0 . Les surfaces \bar{S} et \bar{S}_0 se coupent exactement en $n(S, \mathfrak{V})$ points, tous dans F . Il est maintenant facile de coller un disque à \bar{S}_0 ne coupant pas \bar{S} ailleurs qu'en ces points. Nous obtenons ainsi la surface S_1 , en faisant une homotopie dans l'autre sens pour que S_1 ne rencontre $M \times \{0, 1\}$ qu'en son bord, le nombre d'intersection étant préservé par homotopie, on obtient le lemme. \square

• Nous recollons deux copies de $M \times I$ le long de leurs bords (en renversant l'orientation d'une des copies) afin d'obtenir la variété de dimension 4, sans bord, $M \times S^1$. On recolle les surfaces S et $-S'$ le long de $L \times \{0\}$ et $\tilde{L} \times \{1\}$ pour obtenir une surface fermée Σ dans $M \times S^1$. De même, les surfaces S_1 et $-S'_1$ construites comme ci-dessus se recollent le long des 1-câbles de $L \times \{0\}$ et $\tilde{L} \times \{1\}$ obtenus en poussant $L \times \{0\}$ et $\tilde{L} \times \{1\}$ par des champs de vecteurs constants dans les trivialisations \mathfrak{v} et $\tilde{\mathfrak{v}}$ respectivement. On obtient ainsi une surface Σ_1 . En prenant garde aux orientations, on voit que Σ et Σ_1 s'intersectent en $n(S, \mathfrak{V}) - n(S', \mathfrak{V}')$ points (au signe près).

• Nous terminons la preuve comme [2, Theorem 6.2.7] ou [10, Proposition 4.1]. La classe d'homologie (dans $H_2(M \times S^1)$) de Σ est la même que celle de Σ_1 et elle s'écrit, d'après la formule de Künneth :

$$[\Sigma] = [a \times S^1] + [b \times \{w\}]$$

avec a un 1-cycle de M et b un 2-cycle de M . On voit facilement que $[a] = c$ la classe d'homologie de L et de \tilde{L} . Ainsi,

$$[\Sigma] \cdot [\Sigma_1] = [a \times S^1] \cdot [a \times S^1] + 2[a \times S^1] \cdot [b \times \{w\}] + [b \times \{w\}] \cdot [b \times \{w\}],$$

d'où :

$$n(S, \mathfrak{V}) - n(S', \mathfrak{V}') = [\Sigma] \cdot [\Sigma_1] = 2c \cdot [b]$$

avec le dernier produit dans $H_*(M)$.

On en déduit que si c est de torsion, $2c \cdot [b]$ est de torsion dans $H_3(M) = \mathbf{Z}$, ce qui entraîne $n(S, \mathfrak{V}) - n(S', \mathfrak{V}') = 0$. Si c n'est pas de torsion, p divise c et $n(S, \mathfrak{V}) - n(S', \mathfrak{V}') \equiv 0 \pmod{2p}$. \square

DÉFINITION 2.10. La différence de degré de Hopf entre (L, \mathfrak{v}) et $(\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{v}})$ est l'élément de \mathbf{Z}_{2p} défini par $n((L, \mathfrak{v}), (\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{v}})) \equiv n(S, \mathfrak{V}) \pmod{2p}$ pour S et \mathfrak{V} comme ci-dessus.

Le théorème de Hopf sur les applications de S^3 dans S^2 peut se généraliser pour obtenir :

LEMME 2.11. Deux noeuds L et \tilde{L} homologues à zéro dans M , dont le fibré normal est trivialisé par \mathfrak{w}_n et $\mathfrak{w}_{\tilde{n}}$ respectivement, sont e-cobordants si et seulement si $n = \tilde{n}$. De plus, on a la formule $n((L, \mathfrak{w}_n), (\tilde{L}, \mathfrak{w}_{\tilde{n}})) = n - \tilde{n}$, au signe près.

On en déduit les deux résultats suivants. Le premier nous permet de déduire que l'hypothèse « S connexe », dans la définition 2.10 de la différence de degré de Hopf, ne restreint pas la portée de cette définition.

LEMME 2.12. *Si deux entrelacs encadrés (L, \mathfrak{v}) et $(\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{v}})$ sont e-cobordants, on peut trivialiser le fibré normal de tout cobordisme S orientable pour obtenir un cobordisme encadré dès que S est connexe.*

LEMME 2.13. *Deux entrelacs encadrés (L, \mathfrak{v}) et $(\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{v}})$ sont e-cobordants si et seulement si*

- $[L] = [\tilde{L}]$
- et, en notant p le diviseur maximal de $[L] = [\tilde{L}]$,*
- $n((L, \mathfrak{v}), (\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{v}})) \equiv 0 \pmod{2p}$.

Pontryagin montre que les classes de cobordisme encadré d'entrelacs encadrés de M sont en bijection avec les classes d'homotopie des applications de M dans S^2 . En conséquence du lemme 2.13, nous obtenons (voir § 3.3 pour un exemple) :

THÉORÈME 2.14 ([21], §4). *La classe d'homotopie de $f: M \rightarrow S^2$ est caractérisée par :*

- *sa classe caractéristique $c_f = [f^{-1}(y)]_{H_1(M)}$, et*
- *un « degré de Hopf » appartenant à \mathbf{Z}_{2p_f} , affine dans \mathbf{Z} .*

2.3 MODÈLES DE PONTRYAGIN

Soit c un élément de $H_1(M)$ et γ un nœud réalisant cette classe d'homologie. Nous considérons $T(\gamma)$ un voisinage tubulaire de γ , identifié avec $S^1 \times D^2$ par un difféomorphisme \mathcal{T} .

Nous paramétrons le cercle S^1 par $\omega \in [0, 2\pi]$, le disque D^2 avec les coordonnées polaires usuelles (r, θ) avec $r \in [0, 1]$ et $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. On identifie la sphère S^2 privée du pôle Sud (noté S) avec le disque D^2 , en envoyant le pôle Nord sur 0 et les méridiens sur les rayons $\{(r, \theta_0), r \in [0, 1[\}$.

Pour $n \in \mathbf{Z}$, on définit l'application $P_{c,n}: M \rightarrow S^2$ « rajoutant n twists à droite aux 1-câbles de γ donnés par \mathcal{T} » par

$$\begin{cases} P_{c,n} \equiv S & \text{sur } M \setminus \overline{T(\gamma)} \\ P_{c,n}(\mathcal{T}^{-1}(w, r, \theta)) = \mathcal{T}(w, r, n\omega + \theta) & \text{sur } T(\gamma). \end{cases}$$

On vérifie facilement que $P_{c,n}$ est continue, les points de $S^2 \setminus \{S\}$ sont des valeurs régulières et $P_{c,n}^{-1}(N) = \gamma$.

THÉORÈME 2.15 (Construction de Pontryagin). *Toute application f de M dans S^2 telle que $c_f = c$ est homotope à un $P_{c,n}$.*

De plus, $P_{c,n}$ est homotope à $P_{c,n'}$ si et seulement si $n \equiv n' \pmod{2p}$, où p est le diviseur maximal de c .

REMARQUE 2.16. Dans la construction précédente, l'utilisation des pôles Nord et Sud n'est pas essentielle, on peut construire un modèle ayant les mêmes propriétés avec n'importe quelle paire de points distincts de S^2 .

3. COMPARAISON D'APPLICATIONS

On définit $C_+(f,g)$ (resp. $C_-(f,g)$) comme l'ensemble des points de M où $f = g$ (resp $f = -g$). Quitte à perturber légèrement f et g (ce qui ne change pas les applications à homotopie près), le théorème de transversalité nous permet de supposer que $C_+(f,g)$ et $C_-(f,g)$ sont des sous-variétés plongées dans M , de codimension 2.

En choisissant une orientation sur M et sur S^2 , les entrelacs $C_+(f,g)$ et $C_-(f,g)$ héritent d'une orientation naturelle de la façon suivante : on associe à f un plongement $F: M \hookrightarrow M \times S^2$ qui envoie le point x sur le couple $(x, f(x))$. On note π la projection de $M \times S^2$ sur le premier facteur M . Généralement, les images $F(M)$ et $G(M)$ s'intersectent transversalement dans $M \times S^2$, le long d'une sous-variété de dimension 1, naturellement orientée, qui est en bijection via π avec $C_+(f,g)$. On peut tenir le même raisonnement pour orienter $C_-(f,g)$ avec l'intersection des images $F(M)$ et $-G(M) = (M, -g(M))$.

REMARQUE 3.1. L'orientation de l'intersection $F(M) \cap G(M)$ est l'opposée de l'orientation de $G(M) \cap F(M)$. Ainsi les orientations de $C_+(f,g)$ et de $C_-(f,g)$ dépendent de l'ordre des applications.

La classe d'homologie (dans $H_1(M, \mathbf{Z})$) de $C_+(f,g)$ et de $C_-(f,g)$ est invariante si on modifie f ou g par homotopie. D'autre part, $C_+(f,g)$ et $C_-(f,g)$ ne s'intersectant jamais, on en déduit que la classe d'homologie de $C_+(f,g)$, resp. $C_-(f,g)$, dans $H_1(M \setminus C_-(f,g), \mathbf{Z})$, resp. $H_1(M \setminus C_+(f,g), \mathbf{Z})$, est aussi invariante par homotopie des applications f et g .

3.1 PREMIÈRE OBSTRUCTION

Si f et g sont homotopes, il existe une application \tilde{f} , homotope à f , telle que $C_-(\tilde{f}, g) = \{\emptyset\}$; ainsi $[C_-(f, g)]_{H_1(M)} = 0$ est une condition nécessaire pour que f et g soient homotopes.

3.1.1 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. L'interprétation de cette première obstruction est donnée par le lemme 1.4 que nous rappelons ici.

LEMME 3.2. *Pour f et g de M dans S^2 , on a*

$$[C_-(f, g)]_{H_1(M)} = c_f - c_g \quad \text{et} \quad [C_+(f, g)]_{H_1(M)} = c_f + c_g.$$

Démonstration. On considère $y \in S^2$ une valeur régulière commune à f , g et $-g$. Comme y est valeur régulière de g , $-y$ est valeur régulière de $-g$. On note $\gamma_f = f^{-1}(y)$, $\gamma_{-g} = (-g)^{-1}(y)$ et $\beta_{-g} = (-g)^{-1}(-y)$; ils sont orientés comme images réciproques de y et $-y$ par f et $-g$ respectivement. Remarquons que la classe d'homologie de γ_{-g} et de β_{-g} est l'opposée de c_g : $[\gamma_{-g}] = [\beta_{-g}] = c_{-g} = -c_g$.

On peut supposer, en faisant une homotopie sur f et g , que γ_f et β_{-g} sont disjoints et que $f \equiv -y$ sur le complément d'un voisinage tubulaire de γ_f et $-g \equiv y$ sur le complément d'un voisinage tubulaire de β_{-g} . Ceci entraîne que $C_-(f, g) = \gamma_f \cup \beta_{-g}$ et que

$$[C_-(f, g)]_{H_1(M)} = c_f + c_{-g} = c_f - c_g.$$

Enfin, on remarque qu'en tenant compte de l'orientation, $C_+(f, g) = C_-(f, -g)$ et donc que $C_+(f, g) = c_f - c_{-g} = c_f + c_g$. \square

3.2 SECONDE OBSTRUCTION

Si M est la sphère S^3 , la première obstruction est toujours nulle, on montre facilement (en adaptant les résultats de [19, Proposition 1.1] ou [6, Lemma 23]) que deux applications f et g sont homotopes si et seulement si l'enlacement entre $C_+(f, g)$ et $C_-(f, g)$ est nul.

Supposons maintenant que la première obstruction à l'existence d'une homotopie entre f et g est nulle ($[C_-(f, g)]_{H_1(M)} = 0$) et de plus, supposons que l'on connaisse p , le diviseur maximal de $c_f = c_g$. En rappelant que dans ce cas, $[C_+(f, g)]_{H_1(M)} = 2c_f$ (lemme 3.2) et que l'enlacement $\text{Enl}(C_+, C_-)$ est bien défini modulo $2p$ (§ 2.1), nous montrons alors:

LEMME 3.3. *Les applications f et g comme ci-dessus sont homotopes si et seulement si l'enlacement entre $C_+(f, g)$ et $C_-(f, g)$ est nul modulo $2p$.*

Démonstration. Considérons f et g telles que $c_f = c_g$; soient γ_1 et γ_2 deux nœuds disjoints de M dont l'homologie est $c_f = c_g$ et tels qu'il existe un anneau \mathcal{A} plongé dans M , tel que $\partial\mathcal{A} = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (sans tenir compte de l'orientation). On considère U_1 , U_2 des voisinages tubulaires de γ_1 et γ_2 respectivement (U_1 et U_2 sont disjoints), paramétrés de sorte que la trace de \mathcal{A} dans U_1 (resp. U_2) soit l'image de $J \times S^1$ avec J un segment de D^2 . En notant \star un point de S^2 , distinct des deux pôles, la section précédente nous permet de construire deux modèles de Pontryagin P_{k_1} et P_{k_2} tels que $P_{k_1}^{-1}(N) = \gamma_1$, $P_{k_1}|_{M \setminus \overline{U_1}} \equiv S$, $P_{k_1}^{-1}(\star) = \gamma_2$, $P_{k_2}|_{M \setminus \overline{U_2}} \equiv -\star$ et P_{k_1} est homotope à f , P_{k_2} est homotope à g . Nous remarquons que pour tout point y de S^2 , différent de N et S , $P_{k_1}^{-1}(y)$ rencontre \mathcal{A} en k_1 points. Et pour tout point y de S^2 , différent de \star et $-\star$, $P_{k_2}^{-1}(y)$ rencontre \mathcal{A} en k_2 points.

Comme U_1 et U_2 sont disjoints, on montre facilement que

$$C_-(P_{k_1}, P_{k_2}) = P_{k_1}^{-1}(\star) \cup P_{k_2}^{-1}(N)$$

et

$$C_+(P_{k_1}, P_{k_2}) = P_{k_1}^{-1}(-\star) \cup P_{k_2}^{-1}(S).$$

De plus, comme $c_f = c_g$, le lemme 3.2 implique que $[C_+] = 2c_f$ et $[C_-] = 0$. D'autre part, $P_{k_1}^{-1}(\star)$, $P_{k_2}^{-1}(N)$, $P_{k_1}^{-1}(-\star)$ et $P_{k_2}^{-1}(S)$, orientés comme images réciproques de points de S^2 , sont homologues (et connexes). Ainsi, C_- est orienté de sorte qu'avec l'orientation induite, la composante $P_{k_1}^{-1}(\star)$ est homologue à l'opposé de la composante $P_{k_2}^{-1}(N)$. Nous supposons dorénavant que l'orientation induite par C_- sur $P_{k_1}^{-1}(\star)$ et $P_{k_1}^{-1}(-\star)$ coïncide avec l'orientation naturelle comme image réciproque de P_{k_1} . D'autre part, C_+ est orienté comme $P_{k_1}^{-1}(-\star)$ et $P_{k_2}^{-1}(S)$.

On utilise une modification de l'anneau \mathcal{A} , orienté, comme homologie de C_- à zéro pour calculer l'enlacement entre $C_+(P_{k_1}, P_{k_2})$ et $C_-(P_{k_1}, P_{k_2})$ pour en déduire :

$$\text{Enl}(C_+(P_{k_1}, P_{k_2}), C_-(P_{k_1}, P_{k_2})) \equiv k_1 - k_2 \pmod{2p}.$$

D'après le théorème de Pontryagin (théorème 2.15), P_{k_1} et P_{k_2} sont homotopes si et seulement si $k_1 \equiv k_2 \pmod{2p}$, donc f et g sont homotopes si et seulement si $\text{Enl}(C_+(P_{k_1}, P_{k_2}), C_-(P_{k_1}, P_{k_2})) = \text{Enl}(C_+(f, g), C_-(f, g)) \equiv 0 \pmod{2p}$. Ce qui achève la preuve du lemme. \square

Les lemmes 3.2 et 3.3 permettent de prouver la proposition 1.5.

3.3 EXEMPLE

Nous adaptons l'exemple de Pontryagin [21, §4] pour montrer l'utilité de notre critère. On considère les applications de $S^2 \times S^1$ dans S^2 ; le théorème 2.15 assure l'existence de deux applications distinctes à homotopie près ayant le générateur de $H_1(S^2 \times S^1)$ comme classe caractéristique.

Une de ces applications est donnée par $\pi: S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$ la projection sur le premier facteur. Soient p et q deux points diamétralement opposés de S^2 , sphère unité de \mathbf{R}^3 , on note ϕ_α la rotation d'angle α et d'axe pq . Dans les coordonnées polaires usuelles de l'espace (r, ω) ($r \in [0, \infty[$ et $\omega \in S^2$), on définit la suite de difféomorphismes $\varphi_n: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ par $\varphi_n(r, \omega) = (r, \phi_{nr}(\omega))$. On note encore φ_n la factorisation de φ_n comme difféomorphisme de $S^2 \times S^1$ (cf. figure 2) et on remarque que φ_n est homotope à φ_m si et seulement si $n \equiv m \pmod{2}$ ($\pi_1(\mathrm{SO}(3)) = \mathbf{Z}_2$ et φ_1 décrit un générateur de ce groupe). Ainsi, $\tilde{f}_n = \pi \circ \varphi_n: S^2 \times S^1 \rightarrow S^2$ est homotope à π si et seulement si n est pair; π et \tilde{f}_1 sont donc les deux seules applications, à homotopie près, ayant le générateur de $H_1(M)$ comme classe caractéristique.

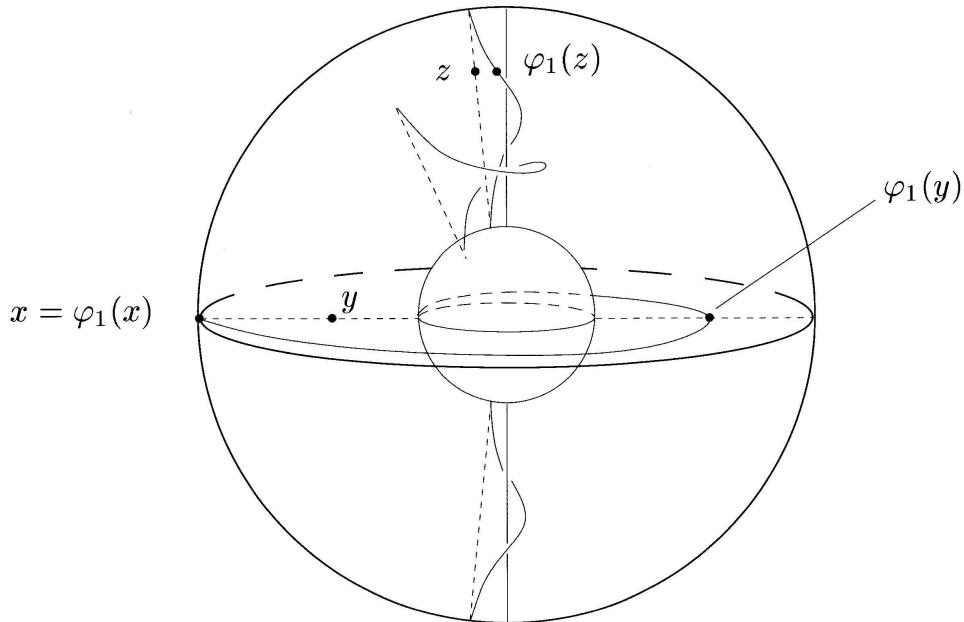


FIGURE 2
Action de φ_1 sur $S^2 \times S^1$

Les applications \tilde{f}_n et π sont égales le long de deux cercles correspondant à l'axe de rotation et le long d'une sphère. Cette situation n'est pas générique, une petite perturbation de \tilde{f}_n en $f_n = \phi_\varepsilon \circ \tilde{f}_n$ permet d'éliminer cette sphère.

Les applications f_n et π sont opposées le long de n cercles parallèles dans le plan $z = 0$. Le calcul de l'orientation nous permet de conclure que $\text{Enl}(C_+(f_n, \pi), C_-(f_n, \pi)) \equiv n \pmod{2}$. En appliquant le lemme 3.3, on retrouve le résultat : f_n est homotope à π si et seulement si n est pair.

4. APPLICATION AUX CHAMPS DE VECTEURS NON-SINGULIERS

Si M est une variété de dimension trois compacte, sans bord et orientable, son fibré tangent TM est trivialisable (voir [17, Problem 12.B] par exemple). En choisissant une trivialisation $\tau : TM \rightarrow M \times \mathbf{R}^3$, on identifie les classes d'homotopie des champs de vecteurs non-singuliers sur M (homotopie à travers les champs non-singuliers) avec les classes d'homotopie des applications de M dans S^2 . Cette remarque pose deux problèmes : a priori, l'identification dépend de la trivialisation choisie ; de plus, la construction explicite de trivialisations du fibré tangent est en général un problème difficile. Les résultats de la section précédente vont nous permettre de contourner en partie ces deux problèmes.

Soit X un champ de vecteurs non-singulier sur M et τ une trivialisation du fibré tangent ; on note $X_\tau : M \rightarrow S^2$ l'application induite et c_{X_τ} la classe d'homologie de l'image réciproque d'une valeur régulière de X_τ .

Rappelons que la *classe d'Euler* d'un champ de plans co-orienté sur une variété de dimension trois est l'obstruction (dans $H^2(M, \mathbf{Z})$) à compléter une trivialisation de ce champ de plans du 1-squelette d'une triangulation de la variété au 2-squelette. Nous appelons aussi classe d'Euler son dual de Poincaré (dans $H_1(M, \mathbf{Z})$) et nous définissons la classe d'Euler d'un champ de vecteurs non-singulier, notée $\mathcal{E}(X)$, comme étant la classe d'Euler du champ de plans orthogonal au champ de vecteurs, X^\perp , pour une métrique riemannienne quelconque.

Un résultat classique de topologie algébrique nous permet de calculer la classe d'Euler de la façon suivante : une section générique d'un champ de plans va couper la section nulle le long d'un entrelacs orienté, la classe d'homologie de cet entrelacs ne dépend pas du choix de la section générique, c'est la classe d'Euler du champ de plans.

Le résultat suivant est connu ; afin d'être complet, nous incluons la preuve de [2, Lemma 6.1.4].

LEMME 4.1. *Pour toute trivialisation τ et tout champ de vecteurs X , on a la formule*

$$\mathcal{E}(X) = 2c_{X_\tau}.$$

Démonstration. Construisons une section générique de X^\perp , pour cela on choisit y sur S^2 de sorte que y et $-y$ soient des valeurs régulières de X_τ . On définit $s: M \rightarrow X^\perp$ par $s(x) = \tau^{-1}(x, X_\tau(x) \wedge y)$ (\wedge représente ici le produit vectoriel usuel de \mathbf{R}^3). Cette section s'annule exactement quand $X_\tau(x)$ est colinéaire à y , c'est-à-dire sur l'ensemble $X_\tau^{-1}(y) \cup X_\tau^{-1}(-y)$. L'homologie de l'intersection de cette section avec la section nulle est donc égale à $2c_{X_\tau}$. \square

REMARQUE 4.2. La classe d'Euler est invariante à homotopie près et indépendante du choix de la trivialisation du fibré tangent; ce n'est donc pas le cas de c_{X_τ} , qui peut dépendre du choix de la trivialisation si $H_1(M, \mathbf{Z})$ contient des éléments d'ordre 2.

Le diviseur maximal de c_{X_τ} ne dépend pas du choix de la trivialisation car c'est la moitié du diviseur maximal de $\mathcal{E}(X)$.

DÉFINITION 4.3. Un champ de vecteurs X est *complétable* si $\mathcal{E}(X) = 0$.

Pour tout champ de vecteurs complétable, il existe une trivialisation τ_X telle que X_{τ_X} soit une application constante.

On retrouve facilement un joli résultat de Gompf [10, Corollary 4.10].

LEMME 4.4. *Un champ de vecteurs X est complétable si et seulement si X est homotope à $-X$.*

Démonstration. La première implication est évidente. Si X est homotope à $-X$, pour n'importe quelle trivialisation τ , $c_{X_\tau} = -c_{-X_\tau} = c_{-X_\tau}$. Ainsi $2c_{-X_\tau} = 0$ et $2c_{X_\tau} = 0$; donc $\mathcal{E}(X) = 0$. \square

Soient X et Y deux champs de vecteurs non-singuliers sur M , on définit $C_+(X, Y) = \{x \in M, X(x) = \lambda Y(x) \text{ avec } \lambda > 0\}$ et $C_-(X, Y) = \{x \in M, X(x) = \lambda Y(x) \text{ avec } \lambda < 0\}$. Comme conséquence des résultats de la section précédente, on obtient la proposition suivante qui donne un critère indépendant du choix de la trivialisation :

PROPOSITION 4.5. *Deux champs de vecteurs non-singuliers X et Y sur M sont homotopes si et seulement si*

- $[C_-(X, Y)]_{H_1(M)} = 0$, ce qui entraîne l'égalité des diviseurs maximaux des classes d'Euler de X et Y (on note p cet entier), et
- $\text{Enl}(C_+(X, Y), C_-(X, Y)) \equiv 0 \pmod{p}$.

5. CHAMPS DE MORSE-SMALE SUR LES VARIÉTÉS DE SEIFERT

5.1 CONSTRUCTION INITIALE

On considère une variété de Seifert M^3 de base une surface compacte S et de projection $p: M \rightarrow S$, on note x_i pour i allant de 1 à n les points de S où se projettent les fibres exceptionnelles de p . Si Y_0 est un champ de vecteurs Morse-Smale sans orbite périodique sur S , tel que tout x_i soit une singularité de Y_0 (de type *puits* ou *source*), on choisit une métrique riemannienne sur M et on relève Y_0 en un unique champ de vecteurs lisse, X_0 , orthogonal aux fibres de p . Le champ X_0 est nul le long de toutes les fibres se projetant sur des zéros de Y_0 . On note X_1 le champ de vecteurs unitaire, tangent aux fibres et on pose $X = X_0 + X_1$. Le champ de vecteurs X est un champ de Morse-Smale non-singulier lisse sur M , dont la dynamique se projette via p sur celle de Y_0 .

REMARQUE 5.1. Quitte à rajouter des extrema locaux (en particulier aux points x_i), une petite perturbation du champ de gradient d'une fonction de Morse sur S permet de construire un champ Y_0 comme ci-dessus (sans orbite périodique).

5.2 OPÉRATION DE WADA

Un entrelacs dans M est *indexé* si on attribue à chaque composante un indice, 0, 1 ou 2. L'entrelacs des orbites périodiques d'un champ de Morse-Smale est naturellement indexé par la dimension de la variété instable du point fixe de l'application de premier retour sur un disque transverse.

Dans [23], Wada donne une caractérisation des entrelacs indexés réalisables comme entrelacs d'orbites périodiques de champs de Morse-Smale sans singularité sur la sphère S^3 . Il définit 6 opérations sur les entrelacs indexés de la sphère et un générateur: l'entrelacs de Hopf indexé par 0 et 2.

Nous nous intéressons plus particulièrement ici à la cinquième opération de Wada qui consiste à remplacer un voisinage tubulaire d'une orbite périodique K , d'indice 0 ou 2, par un tore solide contenant trois orbites périodiques K_1 , K_2 et K_3 . L'âme du tore est l'une de ces orbites périodiques, K_1 , son plongement dans M a donc le même type de noeud que K . Les orbites K_2 et K_3 sont des n -câbles parallèles de K_1 . L'orbite K_2 est une selle et les indices de K_1 et K_3 sont 0 ou 2 mais au moins l'un des deux doit avoir l'indice de K . La suspension du difféomorphisme du disque décrit sur la figure 3 permet

d'obtenir une selle et un attracteur câblant l'attracteur de départ (centre du disque).

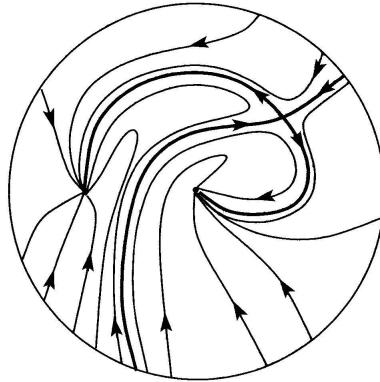


FIGURE 3
Une selle et deux attracteurs

Si le champ initial est de type Morse-Smale, il en est de même du champ obtenu en appliquant la cinquième opération de Wada (la transversalité des variétés stables et instables des selles étant facile à obtenir). De plus, le champ obtenu après cette opération est homotope au champ initial.

REMARQUE 5.2. Le fibré normal de l'orbite K n'est pas nécessairement trivialisable de manière canonique (contrairement au cas de la sphère S^3), on ne peut donc pas parler de (p, q) -câbles autour de K_1 , mais seulement de n -câbles a priori (cf. § 2.1).

5.3 ORBITES PÉRIODIQUES SUR LA SURFACE DE BASE

Si dans la construction initiale (§ 5.1), le champ de Morse-Smale Y_0 admet des orbites périodiques sur S , le relevé X n'est pas nécessairement Morse-Smale. Au-dessus de chaque orbite périodique, il laisse invariant un tore (ou une bouteille de Klein) attractif ou répulsif suivant la nature de l'orbite périodique de Y_0 . On modifie alors la dynamique sur ce tore (resp. cette bouteille de Klein) de la façon suivante. On ajoute 2 orbites périodiques, de pente $(1, 0)$ si la fibre de Seifert représente $(0, 1)$ sur le tore. Pour la dynamique sur le tore, une de ces orbites est attractive, l'autre est répulsive (figure 4). On peut plonger ce tore dans le tore épaissi, voisinage du tore invariant de départ de sorte que l'orbite répulsive du tore devienne une selle pour X .

La construction sur les bouteilles de Klein (cas où la surface de base n'est pas orientable) est similaire, on identifie les côtés verticaux de la figure 4 par un homéomorphisme renversant l'orientation verticale.

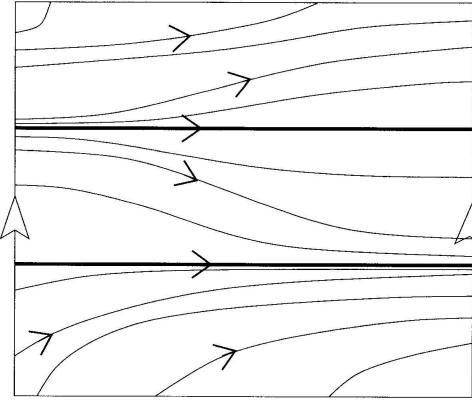


FIGURE 4
Dynamique sur les tores invariants

L'un des points essentiels de la preuve du théorème 1.1 est la construction de champs de vecteurs Y_0 sur la surface de base ayant des orbites périodiques dont la classe d'homologie est prescrite. Si la surface de base est orientable, nous faisons les choix suivants.

LEMME 5.3. • *Tout élément primitif de $H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ peut être représenté par une courbe fermée simple, plongée dans \mathbf{T}^2 .*

• *Si $S = \#_{i=1}^g \mathbf{T}^2$, pour tout élément c de $H_1(S, \mathbf{Z})$, il existe λ_i pour i allant de 1 à g tels que $c = \sum_{i=1}^g \lambda_i [\gamma_i]$, où les $[\gamma_i]$ sont des éléments primitifs de $H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ et les γ_i sont deux à deux disjoints.*

• *Soit M une variété de Seifert au-dessus de $S = \#_{i=1}^g \mathbf{T}^2$. Pour tout c de $H_1(M, \mathbf{Z})$, il existe λ_i pour i allant de 1 à g , λ et α_j pour j allant de 1 à n tels que*

$$c = \sum_{i=1}^g \lambda_i [\gamma_i] + \lambda [F] + \sum_{j=1}^n \alpha_j [F_j],$$

où F est une fibre générique, les F_j sont les fibres singulières et les projections des γ_i sur S sont comme dans le point précédent.

Démonstration. Les noeuds toriques (p, q) avec p et q premiers entre eux représentent, par une courbe fermée simple, les éléments primitifs de

$H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$. Le second point consiste simplement à effectuer la somme connexe des tores en dehors des γ_i .

Pour montrer le dernier point, nous remarquons que si l'on note \tilde{M} la variété obtenue en enlevant un voisinage tubulaire de chaque fibre singulière et d'une fibre régulière, l'inclusion de \tilde{M} dans M induit un homomorphisme surjectif de $H_1(\tilde{M})$ dans $H_1(M)$. La fibration de \tilde{M} est triviale, par un abus de notation, on pose γ_i le relevé dans \tilde{M} de $\gamma_i \subset \tilde{F}$ (où \tilde{F} est la surface F privée de $n+1$ points). \square

Nous laissons au lecteur le soin d'adapter ce lemme au cas où la surface de base est non-orientable.

REMARQUE 5.4. Le nombre de termes dans l'expression de c au dernier point du lemme 5.3 ne dépend que de la variété de Seifert, il est inférieur ou égal à $g+n+1$.

Étant donné un entrelacs sur la surface S , il est facile de construire un champ de Morse-Smale Y_0 sur S ayant cet entrelacs inclus dans l'ensemble de ses orbites périodiques attractives. En conséquence, on montre (en laissant encore au lecteur le soin de traiter le cas des surfaces non-orientables) :

LEMME 5.5. *Pour M une variété de Seifert, tout élément de $H_1(M, \mathbf{Z})$ est réalisable par la classe d'homologie d'un entrelacs d'orbites périodiques attractives d'un champ de Morse-Smale non-singulier sur M .*

Démonstration. Écrivons $c \in H_1(M, \mathbf{Z})$ comme la somme

$$c = \sum_{i=1}^g \lambda_i [\gamma_i] + \lambda [F] + \sum_{j=1}^n \alpha_j [F_j];$$

on construit un champ de vecteurs Y_0 sur la surface de base S ayant les projections des γ_i (dans $S \setminus \{x_i\}$) comme orbites périodiques, $n+1$ singularités de type puits aux points x_i et $x \in S \setminus \{x_i\} \cup \gamma_i$.

On relève Y_0 en un champ de Morse-Smale non-singulier \tilde{X} comme précédemment. On applique la cinquième opération de Wada aux orbites attractives qui correspondent aux γ_i avec le coefficient λ_i (i.e. on obtient des λ_i -câbles de γ_i), aux orbites qui correspondent aux x_j avec le coefficient α_j et à l'orbite se projetant sur x , avec le coefficient λ . On obtient ainsi un champ non-singulier X qui est Morse-Smale et qui admet un entrelacs d'orbites périodiques attractives dont l'homologie est c . \square

REMARQUE 5.6. D'après la remarque 5.4 et la preuve précédente, on déduit qu'il existe un nombre $n(M)$ tel que tout élément de $H_1(M, \mathbf{Z})$ est réalisable par la classe d'homologie d'un entrelacs d'orbites périodiques attractives d'un champ de Morse-Smale non-singulier sur M ayant au plus $n(M)$ orbites périodiques.

REMARQUE 5.7. En utilisant le résultat de Morgan [18], on retrouve un résultat de Yano [25] affirmant que tout élément de $H_1(M, \mathbf{Z})$, pour M une variété de Seifert, est représenté par un entrelacs graphé (i.e. dont le complément est une variété graphée).

5.4 PREUVE DU THÉORÈME 1.1

La preuve est divisée en deux étapes : dans un premier temps, on considère M une variété de dimension trois ; nous ne supposons pas que M soit une variété de Seifert.

Nous définissons l'opération permettant de modifier la classe d'Euler d'un champ de Morse-Smale (voir [1]).

LEMME 5.8. *Si X est un champ Morse-Smale non-singulier sur M et γ est une orbite périodique attractive de X , il existe un champ Morse-Smale non-singulier Y coïncidant avec X sur le complément d'un voisinage tubulaire de γ et ayant $-\gamma$ comme orbite périodique attractive.*

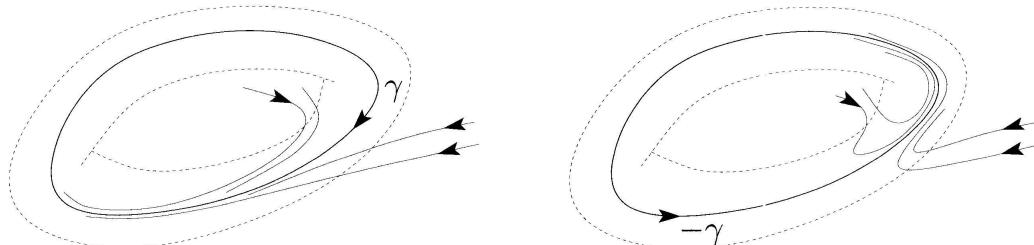


FIGURE 5
Changement de l'orientation d'une orbite attractive

Le lemme 3.2 nous permet de montrer que, pour τ une trivialisation du fibré tangent de M , les champs X et Y ci-dessus vérifient :

$$C_-(X, Y) = \gamma \quad \text{et ainsi} \quad c_{X_\tau} = c_{Y_\tau} + [\gamma].$$

PROPOSITION 5.9. *Si X_0 est Morse-Smale, tout champ de vecteurs X tel que $[C_-(X_0, X)] = 0$ est homotope à un champ de vecteurs Morse-Smale.*

Démonstration. La preuve consiste à construire un champ Morse-Smale dans chaque classe d'homotopie de champs X telle que $[C_-(X_0, X)] = 0$.

- Soit γ_0 une orbite périodique attractive de X_0 , on note $c = [\gamma_0]$. On applique la cinquième opération de Wada à γ_0 pour obtenir X_1 ayant une orbite périodique attractive γ_1 et une orbite selle de plus que X_0 qui sont des 1-câbles de γ_0 . Les orbites γ_0 et γ_1 sont donc homotopes, on note \mathcal{A} l'anneau (que l'on choisit plongé dans M) bordant $\gamma_0 \cup \gamma_1$.

- On considère maintenant le champ Morse-Smale Y_1 , ayant les mêmes orbites que X_1 avec l'orientation de γ_1 renversée. On a les relations : $C_-(X_1, Y_1) = \gamma_1$ et $[C_-(X_1, Y_1)] = c$.

- Nous utilisons la cinquième opération de Wada sur les champs X_1 et Y_1 sur les orbites $\pm\gamma_1$, pour obtenir deux champs de vecteurs possédant chacun une nouvelle orbite attractive $\pm\gamma'_1$, câble de $\pm\gamma_1$ et une selle s_1 . Cette fois, l'existence de l'anneau \mathcal{A} nous permet de définir les invariants (p_1, q_1) de l'opération de câblage. Nous choisissons ces invariants comme suit : $(p_1 = 1, q_1 = \lambda)$ pour λ un entier non nul et on note X_2^λ et \tilde{Y}_2^λ les champs obtenus.

- Enfin, on modifie \tilde{Y}_2^λ pour obtenir Y_2^λ en changeant l'orientation de $-\gamma'_1$. Ainsi, $C_-(\tilde{Y}_2^\lambda, Y_2^\lambda) = -\gamma'_1$, on en déduit $[C_-(Y_1, Y_2^\lambda)] = -c$ (cf. figure 6).

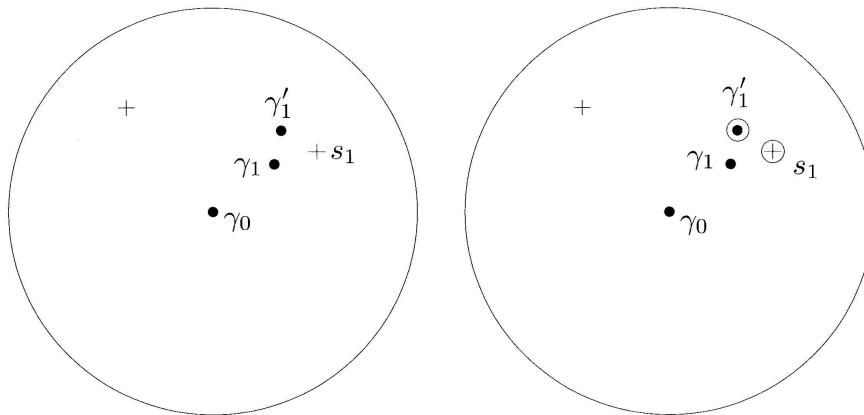


FIGURE 6
Les champs X_2^λ et Y_2^λ
(Légende : + selle, • puits, ○ orientation changée)

Nous venons de construire deux champs de vecteurs X_2^λ et Y_2^λ qui satisfont : $[C_-(X_2^\lambda, Y_2^\lambda)] = c - c = 0$, avec X_2^λ homotope à X_0 . Or $C_-(X_2^\lambda, Y_2^\lambda)$ est porté par s_1 et γ_1 , l'homologie à zéro de cet entrelacs peut être donnée par un anneau plongé dans un petit voisinage tubulaire de γ_1 , de sorte que $C_+(X_2^\lambda, Y_2^\lambda)$ soit réduit à γ'_1 dans ce voisinage. On en déduit que l'enlacement $\text{Enl}(C_+(X_2^\lambda, Y_2^\lambda), C_-(X_2^\lambda, Y_2^\lambda))$ est égal à λ .

La proposition 1.7 permet de conclure que l'on a effectivement construit au moins un champ Morse-Smale dans chaque classe d'homotopie ayant même «demi-classe d'Euler» que X_0 . \square

Pour la seconde étape de la preuve, nous considérons M une variété de Seifert et nous construisons un champ de vecteurs Morse-Smale non-singulier ayant une «demi-classe d'Euler» donnée.

Étant donnée τ une trivialisation du fibré tangent de M , on a :

LEMME 5.10. *Pour chaque c dans $H_1(M, \mathbf{Z})$, il existe un champ de Morse-Smale X , avec moins de $n(M)$ orbites périodiques, tel que $c_{X_\tau} = c$.*

Démonstration. Soit Y_0 un champ de Morse-Smale sur la surface S , sans orbite périodique et singulier aux points où les fibres singulières se projettent. On note X_0 le champ de vecteurs sur M associé à Y_0 par la construction initiale. Le champ X_0 est homotope au champ de vecteurs tangent aux fibres de M , on note e sa classe caractéristique pour la trivialisation τ .

Soit c un élément de $H_1(M, \mathbf{Z})$, on note $c' = e - c$ et on considère X' un champ de vecteurs Morse-Smale possédant un entrelacs Γ d'orbites périodiques attractives dont l'homologie est c' . Un tel champ, avec moins de $n(M)$ orbites périodiques, existe par le lemme 5.5 et la remarque 5.6.

On applique alors le lemme 5.8 à Γ pour obtenir un champ de vecteurs X tel que $C_-(X, X') = \Gamma$. Le lemme 3.2 permet d'obtenir $c_{X_\tau} = e - [\Gamma] = e - c' = c$. \square

Le théorème 1.1 est une conséquence du lemme 5.10 et de la proposition 5.9.

5.5 DISCUSSION

On peut diviser les champs Morse-Smale non-singuliers d'une variété de dimension 3 en trois catégories :

1. les champs dont aucune orbite périodique n'est homologue à zéro ;
2. les champs ayant des orbites périodiques homologues à zéro mais vérifiant la propriété d'enlacement de Goodman ([11], voir aussi [27]) : dès qu'une

orbite périodique borde un disque, celui-ci rencontre une autre orbite périodique;

3. les champs ne vérifiant pas la propriété d'enlacement.

Dans chaque classe d'homotopie de champs de vecteurs sur une variété de Seifert dont l'homologie n'est pas nulle, nous avons construit un champ de Morse-Smale appartenant à la première catégorie. En particulier, d'après [11, 27], ces champs de vecteurs sont transverses à un feuillement.

QUESTION. Peut-on classifier à la Wada les entrelacs indexés, sans composante homologue à zéro, d'une variété de Seifert réalisables comme entrelacs d'orbites périodiques d'un Morse-Smale ?

QUESTION. Les autres entrelacs réalisables sont-ils obtenus par somme connexe avec un entrelacs de Wada de S^3 ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ASIMOV, D. Homotopy of non-singular vector fields to structurally stable ones. *Ann. of Math.* (2) 102 (1975), 55–65.
- [2] BENEDETTI, R. and C. PETRONIO. *Branched Standard Spines of 3-Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics 1653. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [3] CAMPOS, B., J. MARTÍNEZ ALFARO and P. VINDEL. Bifurcations of links of periodic orbits in non-singular Morse-Smale systems on S^3 . *Nonlinearity* 10 (1997), 1339–1355.
- [4] CASASAYAS, J., J. MARTÍNEZ ALFARO and A. NUNES. Knots and links in integrable Hamiltonian systems. *J. Knot Theory Ramifications* 7 (1998), 123–153.
- [5] COLIN, V., E. GIROUX and K. HONDA. On the coarse classification of tight contact structures. In: *Topology and Geometry of Manifolds (Athens, GA, 2001)*, Proc. Sympos. Pure Math. 71, 109–120. Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 2003.
- [6] DUFRAINE, E. About homotopy classes of non-singular vector fields on the three-sphere. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 3 (2002), 361–376.
- [7] ELIASHBERG, YA. M. and W. P. THURSTON. *Confoliations*. University Lecture Series 13. Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1998.
- [8] FRANKS, J. The periodic structure of nonsingular Morse-Smale flows. *Comment. Math. Helv.* 53 (1978), 279–294.
- [9] GEIGES, H. Contact geometry. (arXiv: math. SG/0307242, 2003.) To appear in *Handbook of Differential Geometry, vol. 2*.
- [10] GOMPF, R. E. Handlebody construction of Stein surfaces. *Ann. of Math.* (2) 148 (1998), 619–693.
- [11] GOODMAN, S. Vector fields with transverse foliations. *Topology* 24 (1985), 333–340.

- [12] HONDA, K. Confoliations transverse to vector fields. Preprint, 1998.
- [13] KUPERBERG, G. Noninvolutory Hopf algebras and 3-manifold invariants. *Duke Math. J.* 84 (1996), 83–129.
- [14] KUPERBERG, K. A smooth counterexample to the Seifert conjecture. *Ann. of Math.* (2) 140 (1994), 723–732.
- [15] MACKAY, R. S. Complicated dynamics from simple topological hypotheses. *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 359 (2001), 1479–1496.
- [16] MILNOR, J. W. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1997. Based on notes by David W. Weaver. Revised reprint of the 1965 original.
- [17] MILNOR, J. W. and J. D. STASHEFF. *Characteristic Classes*. (Annals of Mathematics Studies 76.) Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1974.
- [18] MORGAN, J. W. Nonsingular Morse-Smale flows on 3-dimensional manifolds. *Topology* 18 (1979), 41–53.
- [19] NEUMANN, W. D. and L. RUDOLPH. Difference index of vectorfields and the enhanced Milnor number. *Topology* 29 (1990), 83–100.
- [20] PALIS, J. and S. SMALE. Structural stability theorems. In : *Global Analysis* (Proc. Sympos. Pure Math. XIV), 223–231. Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1970.
- [21] PONTRJAGIN, L. S. A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* 9 (1941), 331–363.
- [22] —— Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. In : *Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, Vol. 11*, 1–114. Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1959.
- [23] WADA M. Closed orbits of nonsingular Morse-Smale flows on S^3 . *J. Math. Soc. Japan* 41 (1989), 405–413.
- [24] WILSON, F. WESLEY JR. Some examples of nonsingular Morse-Smale vector fields on S^3 . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 27 (1977), 145–159.
- [25] YANO, K. Homology classes which are represented by graph links. *Proc. Amer. Math. Soc.* 93 (1985), 741–746.
- [26] —— The homotopy class of nonsingular Morse-Smale vector fields on 3-manifolds. *Invent. Math.* 80 (1985), 435–451.
- [27] —— Nonsingular Morse-Smale flows on 3-manifolds which admit transverse foliations. In : *Foliations (Tokyo, 1983)* (Adv. Stud. Pure Math. 5), 341–358. North-Holland, Amsterdam, 1985.

(*Reçu le 18 novembre 2003; version révisée reçue le 6 mai 2005*)

Emmanuel Dufraine

Mathematics Institute
 University of Warwick
 GB-Coventry CV4 7AL
 Grande-Bretagne
 e-mail : dufraine@maths.warwick.ac.uk