Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 51 (2005)
Heft: 3-4: L'enseignement mathématique

Artikel: Le Lambda-Calcul de Golomb et la conjecture de Bateman-Horn
Autor: Hindry, Marc / Rivoal, Tanguy
Bibliographie
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3599

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

pour tout $\varepsilon > 0$ (par la majoration classique $\tau(n) \ll n^{\varepsilon}$: voir [50, p. 83, Corollaire 11]). Comme (22) suggère que $\mathcal{G}(n) \overset{?}{\gg} n$, on déduit donc de (22) et (23) que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Lambda(k)\Lambda(n-k) \overset{?}{\sim} 2\prod_{p\geq 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \cdot \prod_{\substack{p|n \\ p\geq 3}} \frac{p-1}{p-2} \cdot n,$$

qui est l'une des variantes de l'estimation prédite par Hardy et Littlewood [28]. De tels arguments s'appliquent probablement à la conjecture de Schinzel énoncée au paragraphe 13.1. Enfin, rappelons que le théorème le plus proche de la conjecture de Goldbach est celui de Chen [9] : « *Tout entier pair suffisamment grand est la somme d'un nombre premier et d'un entier produit d'au plus deux nombres premiers.* »

REMERCIEMENTS. Ils vont à K. Conrad pour ses commentaires pertinents qui nous ont permis d'améliorer une version préliminaire de ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAIER, S. On the Bateman-Horn conjecture. *J. Number Theory 96* (2002), 432–448.

[2] —— A probabilistic model for primes in random sets. Prépublication (2002).

[3] BATEMAN, P. T. et R. A. HORN. A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers. *Math. Comp. 16* (1962), 363–367.

[4] BATEMAN, P. T. et R. M. STEMMLER. Waring's problem for algebraic numbers and primes of the form $(p^r - 1)/(p^d - 1)$. *Illinois J. Math. 6* (1962), 142–156.

[5] BOMBIERI, E. Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. *Astérisque 18*, 1974.

[6] BOUNIAKOWSKY, V. Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières. *Mémoires sc. math. et phys. 6* (1854), 306–329.

[7] BRUN, V. Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare. *Arch. f. Math. og Naturv. 34* (1915), 3–19.

[8] CANTOR, G. Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach. *Assoc. Franç. Caen XXIII* (1894), 117–134.

[9] CHEN, J. R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica 16* (1973), 157–176.

[10] CHERWELL. Note on the distribution of the intervals between prime numbers. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 17* (1946), 46–62.

[11] CHERWELL et E. M. WRIGHT. The frequency of prime-patterns. *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2) 11* (1960), 60–63.

[12] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L. et J.-J. SANSUC. Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une conjecture de Schinzel. *Acta Arith. 41* (1982), 33–53.

[13] COLLIOT-THÉLÈNE, J.-L., A. SKOROBOGATOV et P. SWINNERTON-DYER. Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points. *Invent. Math. 134* (1998), 579–650.

[14] CONRAD, K. Hardy-Littlewood constants. *Mathematical Properties of Sequences and Other Combinatorial Structures.* Los Angeles, CA, 2002, 133–154, Kluwer Acad. Publ., Boston, 2003.

[15] CONRAD, B. et K. CONRAD. The Möbius function and the residue theorem. *J. Number Theory 110* (2005), 22–36.

[16] CONRAD, B., K. CONRAD et R. GROSS. Irreducible specialization in genus 0. Prépublication (2005).

[17] DAVENPORT, H. et A. SCHINZEL. A note on certain arithmetical constants. *Illinois. J. Math. 10* (1966), 181–185.

[18] DICKSON, L. A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers. *Messenger of Math. 33* (1904), 155–161.

[19] DIRICHLET, G. L. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält. *Abh. Akad. Berlin* (1837), 45–71.

[20] EULER, L. Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs. *Bibliothèque impartiale 3* (1751), 10–31. (La citation reproduite ici se trouve dans la réédition de l'article dans les *Opera Posthuma 1* (1862), 76–84 et est disponible sur le site http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E175.pdf.)

[21] FRIEDLANDER, J. et H. IWANIEC. The polynomial X^2+Y^4 captures its primes. *Ann. of Math. (2) 148* (1998), 945–1040.

[22] FRÖHLICH, A. et M. J. TAYLOR. *Algebraic Number Theory.* Cambridge studies in advanced mathematics *27*, 1991.

[23] GOLDBACH, C. Lettre à L. Euler datée du 7 juin 1742. Facsimilé disponible sur le site http://www.mathstat.dal.ca/~joerg/pic/g-letter.jpg.

[24] GOLOMB, S. The lambda method in prime number theory. *J. Number Theory 2* (1970), 193–198.

[25] HADAMARD, J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. S. M. F. 24* (1896), 199–220.

[26] HARDY, G. H. *Divergent Series.* Oxford University Press, first edition, 1949.

[27] HARDY, G. H. et J. E. LITTLEWOOD. Tauberian theorem concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. *Proc. Lond. Math. Soc. (2) 13* (1914), 174–191.

[28] HARDY, G. H. et J. E. LITTLEWOOD. Some problems of 'Partitio Numerorum', III. On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Math. 44* (1923), 1–70.

[29] HARDY, G. H. et E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford Science Publications, fifth edition, 1979.

[30] HEATH-BROWN, D. R. Primes represented by x^3+2y^3. *Acta Math. 186* (2001), 1–84.

[31] IWANIEC, H. Primes represented by quadratic polynomials in two variables. *Acta Arith. 24* (1974), 435–459.

[32] KOREVAAR, J. A century of complex tauberian theory. *Bull. Amer. Math. Soc. 39* (2002), 475–531.

[33] —— Distributional Wiener-Ikehara theorem and twin primes. *Indag. Math. (N.S.) 16* (2005), 37–49.

[34] KUROKAWA, N. Special values of Euler products and Hardy-Littlewood constants. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 60* (1984), 325–338.

[35] —— On the meromorphy of Euler products I, II. *Proc. Lond. Math. Soc. (3) 53* (1986), 1–47; 209–236.

[36] LANDAU, E. Ueber die zahlentheoretische Function $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbach'schen Satz. *Gött. Nachr.* (1900), 177–186.

[37] LANG, S. La conjecture de Bateman-Horn. *Gaz. Math. 67* (1996), 82–84.

[38] —— *Algebraic Number Theory*. Addison-Wesley, 1970.

[39] MERTENS, F. Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Ueber die Vertheilung der Primzahlen. *Borchardts J. für Math. (J. reine angew. Math.) 78* (1874), 46–63.

[40] NEWMAN, D. J. Simple analytic proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly 87* (1980), 693–696.

[41] DE POLIGNAC, A. Six propositions arithmologiques déduites du crible d'Ératosthène. *Nouv. Ann. Math. 8* (1849), 423–429.

[42] PÓLYA, G. Heuristic reasoning in the theory of numbers. *Amer. Math. Monthly 66* (1959), 375–384.

[43] RIESZ, M. Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. *Acta Math. 40* (1916), 349–361.

[44] SCHINZEL, A. et W. SIERPIŃSKI. Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. *Acta Arith. 4* (1958), 185–208.

[45] SCHINZEL, A. A remark on a paper of Bateman and Horn. *Math. Comp. 17* (1963), 445–447.

[46] SERRE, J.-P. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, 1967.

[47] STÄCKEL, P. Ueber Goldbach's empirisches Theorem. *Gött. Nachr.* (1896), 292–299.

[48] SYLVESTER, J. J. On the partition of an even number into two primes. *Proc. Lond. Math. Soc. 4* (1872), 4–6.

[49] TCHEBICHEF, P. L. Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *J. de Liouville 17* (1852), 341–365.

[50] TENENBAUM, G. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Publication de l'Institut Élie Cartan *13*, Université de Nancy, 1990.

[51] TITCHMARSH, E. C. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford Science Publications, second edition, 1986.

[52] DE LA VALLÉE-POUSSIN, C. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. *Brux. S. sc. 21 B* (1897), 251–342 et 343–368.

Certaines des références anciennes peuvent être difficiles à trouver. Des versions scannées des articles [25, 36, 47, 49] sont accessibles sur certaines bibliothèques numériques recensées sur http://www.library.cornell.edu/math/digitalization.php. De

plus, la base de données *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* donne un lien direct vers la version scannée de nombreux articles datés d'avant 1942 : http://www.emis.de/MATH/JFM/.

(Reçu le 13 septembre 2005)

Marc Hindry

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Denis Diderot – Paris VII
Boîte 7012
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
France
e-mail : hindry@math.jussieu.fr

Tanguy Rivoal

Institut Fourier
CNRS UMR 5582 – Université Grenoble 1
100 rue des Maths, BP 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
France
e-mail : rivoal@ujf-grenoble.fr