

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 51 (2005)  
**Heft:** 3-4: L'enseignement mathématique

**Artikel:** In which dimensions does a division algebra over a given ground field exist?  
**Autor:** Darpö, Erik / Dietrich, Ernst / Herschend, Martin

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3598>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

In case  $k = \mathbf{R}$ , Theorem 4.3 is due to Zorn [29].

The proofs of Proposition 2.3 and Theorem 4.1 in the special case  $k = \mathbf{R}$  are strongly based on the topology of  $\mathbf{R}^n$ , and can therefore not easily be initiated for arbitrary real closed fields. Instead, Tarski's method enables us to use these results without considering their proofs.

The question arises to what extent Tarski's method can be used to deduce results on other classes of algebras over real closed fields, and possibly even over other types of ground fields. To our knowledge, no systematic attempt in this direction has hitherto been made.

#### REFERENCES

- [1] ARTIN, E. and O. SCHREIER. Algebraische Konstruktion reeller Körper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 5 (1926), 85–99.
- [2] ARTIN, E. and O. SCHREIER. Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 5 (1927), 225–231.
- [3] BENKART, G.M., D.J. BRITTEN and J.M. OSBORN. Real flexible division algebras. *Canad. J. Math.* 34 (1982), 550–588.
- [4] BOTT, R. and J. MILNOR. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* 64 (1958), 87–89.
- [5] BURDUJAN, I. Types of nonisomorphic two-dimensional real division algebras. Proceedings of the national conference on algebra. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Mat.* 31 (1985), suppl., 102–105.
- [6] CAVINESS, B.F. and J.R. JOHNSON. (ed.). *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*. Springer-Verlag, Vienna, 1998.
- [7] CUENCA MIRA, J. A., R. DE LOS SANTOS VILLODRES, A. KAIDI and A. ROCHDI. Real quadratic flexible division algebras. *Linear Algebra Appl.* 290 (1999), 1–22.
- [8] DARPÖ, E. On the classification of the real flexible division algebras. U.U.D.M. Report 2004: 6 (2004), 1–11. To appear in *Colloq. Math.*
- [9] — Normal forms for the  $\mathcal{G}_2$ -action on the real symmetric  $7 \times 7$ -matrices by conjugation. U.U.D.M. Report 2005: 28 (2005).
- [10] DIETERICH, E. Zur Klassifikation vierdimensionaler reeller Divisionsalgebren. *Math. Nachr.* 194 (1998), 13–22.
- [11] — Quadratic division algebras revisited (remarks on an article by J.M. Osborn). *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), 3159–3166.
- [12] DIETERICH, E. and J. ÖHMAN. On the classification of 4-dimensional quadratic division algebras over square-ordered fields. *J. London Math. Soc.* (2) 65 (2002), 285–302.
- [13] DIETERICH, E. Classification, automorphism groups and categorical structure of the two-dimensional real division algebras. *J. Algebra Appl.* 4 (2005), 517–538.
- [14] ECKMANN, B. Continuous solutions of linear equations - an old problem, its history, and its solution. *Exposition. Math.* 9 (1991), 351–365.

- [15] FROBENIUS, F. G. Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. *J. Reine Angew. Math.* 84 (1878), 1–63.
- [16] GOTTSCHLING, E. Die zweidimensionalen reellen Divisionsalgebren. Seminarber. Fachb. Math. FernUniversität–GHS in Hagen 63 (1998), 228–261.
- [17] GRILLET, P.-A. *Algebra*. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [18] HEFENDEHL, L. Vierdimensionale quadratische Divisionsalgebren über Hilbert-Körpern. *Geom. Dedicata* 9 (1980), 129–152.
- [19] HEFENDEHL-HEBEKER, L. Isomorphieklassen vierdimensionaler quadratischer Divisionsalgebren über Hilbert-Körpern. *Arch. Math. (Basel)* 40 (1983), 50–60.
- [20] HIRZEBRUCH, F. Divisionsalgebren und Topologie. In: *Zahlen*. Springer-Verlag, 3. verb. Auflage (1992), 233–252.
- [21] HOPF, H. Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra. *Comment. Math. Helv.* 13 (1940), 219–239.
- [22] HÜBNER, M. and H. P. PETERSSON. Two-dimensional real division algebras revisited. *Beiträge Algebra Geom.* 45 (2004), 29–36.
- [23] JENSEN, C. U. and H. LENZING. *Model Theoretic Algebra*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1989.
- [24] KERVAIRE, M. Non-parallelizability of the  $n$ -sphere for  $n > 7$ . *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 44 (1958), 280–283.
- [25] OSBORN, J. M. Quadratic division algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 105 (1962), 202–221.
- [26] TARSKI, A. Sur les ensembles définissables de nombres réels. I. *Fund. Math.* 17 (1931), 210–239.
- [27] ——— *A decision method for elementary algebra and geometry*. Manuscript, RAND Corp., Santa Monica, Calif., 1948.
- [28] ——— *A decision method for elementary algebra and geometry*. 2nd ed.. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.
- [29] ZORN, M. Theorie der alternativen Ringe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 8 (1930), 123–147.

(Reçu le 1 septembre 2005)

Erik Darpo  
Ernst Dieterich  
Martin Herschend

Matematiska institutionen  
Uppsala universitet  
Box 480  
SE-751 06 Uppsala  
Sweden

*e-mail*: Erik.Darpo@math.uu.se Ernst.Dieterich@math.uu.se  
Martin.Herschend@math.uu.se

Leere Seite

Blank page

Page vide