

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 51 (2005)  
**Heft:** 1-2: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Contrôle des bras articulés et transformations de Möbius  
**Autor:** Hausmann, Jean-Claude  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3589>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## CONTRÔLE DES BRAS ARTICULÉS ET TRANSFORMATIONS DE MÖBIUS

par Jean-Claude HAUSMANN\*)

RÉSUMÉ. Pour un  $m$ -uplet  $a = (a_1, \dots, a_m)$  de nombres réels positifs, le bras articulé de type  $a$  dans  $\mathbf{R}^d$  est l'application  $f^a: (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$  définie par  $f^a(z_1, \dots, z_m) = \sum_{j=1}^m a_j z_j$ . On se propose d'attaquer le problème cinématique inverse via les relevés horizontaux pour la distribution  $\Delta^a$  orthogonale aux fibres de  $f^a$ . On montre que les composantes connexes par courbes horizontales sont les orbites d'une action sur  $(S^{d-1})^m$  d'un produit de groupes de transformations de Möbius. On détermine également, dans plusieurs cas, les orbites d'holonomie de la distribution  $\Delta^a$ .

### 1. INTRODUCTION

Soit  $f: M \rightarrow N$  une application différentiable ( $C^\infty$ ) entre deux variétés  $M$  et  $N$ . Le *problème cinématique inverse* pour  $f$  consiste à trouver un procédé pour relever dans  $M$  les courbes lisses par morceaux dans  $N$ . Plus précisément, étant donné une courbe lisse par morceaux  $c(t) \in N$  et un point  $q^0 \in f^{-1}(c(0))$ , on aimerait disposer canoniquement d'une courbe lisse par morceaux  $\tilde{c}(t) \in M$  telle que  $\tilde{c}(0) = q^0$  et  $f(\tilde{c}(t)) = c(t)$ .

Si  $M$  est une variété riemannienne et  $f$  est une submersion propre, on peut alors procéder comme Ehresmann [Eh, § 1]. On considère une *distribution*  $\Delta^f$ , c'est-à-dire un champ de sous-espaces vectoriels  $\Delta_q^f \subset T_q M$  pour tout  $q \in M$ , en définissant  $\Delta_q^f$  comme le complément orthogonal à  $\text{Ker } T_q f$ , où  $T_q f: T_q M \rightarrow T_{f(q)} N$  est l'application tangente à  $f$  en  $q$ . Une courbe lisse par morceaux  $b(t) \in M$  dont le vecteur vitesse  $\dot{b}$  satisfait à  $\dot{b}(t) \in \Delta_{b(t)}^f$  est appelée une  $\Delta^f$ -*courbe*, ou *courbe horizontale*. Le problème cinématique

---

\*) Cette recherche a bénéficié du soutien du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique. L'auteur tient à remercier P. de la Harpe et D. Thurston pour d'utiles conversations.

inverse pour  $f$  est alors résolu de la manière suivante : une courbe  $c(t) \in N$  définie sur un intervalle au voisinage de 0 admet un unique relèvement horizontal  $\tilde{c}(t) \in M$  partant d'un point  $\tilde{c}(0) \in f^{-1}(c(0))$ . En effet,  $f: M \rightarrow N$  est ici un fibré différentiable sur lequel  $\Delta_q^f$  constitue une connexion [Eh, § 1]. Pour l'existence et l'unicité de  $\tilde{c}$  dans ce cas classique, voir [DNF, lemme 2, p. 212].

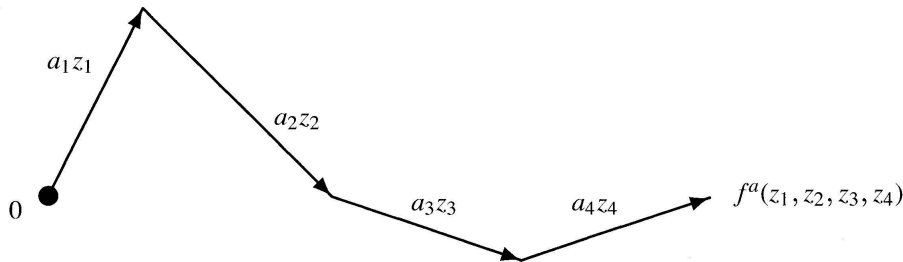
Pour une application différentiable  $f: M \rightarrow N$  quelconque, avec  $M$  riemannienne, on peut tout de même considérer la distribution  $\Delta^f$  où  $\Delta_q^f$  est le complément orthogonal à  $\text{Ker } T_q f$ . L'unicité du relèvement horizontal d'une courbe  $c(t) \in N$  est alors préservée puisque  $T_q f$  envoie  $\Delta_q^f$  isomorphiquement sur l'image de  $T_q f$ . Son existence est garantie en tout cas si  $c(t)$  reste dans les valeurs régulières de  $f$ , au-dessus desquelles  $f$  est une submersion. Cette solution horizontale du problème cinématique inverse est celle qui minimise *en chaque instant* l'énergie cinétique :  $\tilde{c}(t)$  est horizontale si et seulement si  $\dot{\tilde{c}}(t)$  est le vecteur au-dessus de  $\dot{c}(t)$  tel que  $|\dot{\tilde{c}}(t)|^2$  soit minimal. Observons que  $\Delta^f$  est une distribution de dimension non-constante :  $\dim \Delta_q^f = \text{rang}(T_q f)$ . Par exemple, si  $N = \mathbf{R}^d$  avec la métrique standard et que l'on écrit  $f(q) := (x_1(q), \dots, x_d(q))$ , alors  $\Delta^f$  est la distribution engendrée par les champs de gradients  $\{\text{grad } x_i\}_{i=1, \dots, d}$ . Plus généralement, pour  $f: M \rightarrow N$ , la distribution  $\Delta^f$  est engendrée par gradients de  $\phi \circ f$  pour toutes les fonctions  $\phi: N \rightarrow \mathbf{R}$ .

Comme distribution sur une variété riemannienne,  $\Delta^f$  définit sur  $M$  une *géométrie sous-riemannienne* ([Be], [Mo]) ou *géométrie de Carnot-Carathéodory* [Gr]. En tant que distribution engendrée par des champs de vecteurs,  $\Delta^f$  définit également sur  $M$  un problème de *théorie du contrôle* [Ju]. Ces théories s'accordent sur l'utilité du théorème de Sussmann [Su, Th. 4.1] qui décrit, pour une distribution sur  $M$ , les composantes connexes par  $\Delta$ -courbes comme les feuilles d'une distribution intégrable associée à  $\Delta$ . Il s'agit encore d'un "feuilletage" dont les feuilles ne sont pas toutes de même dimension, l'exemple standard étant les orbites d'une action différentiable d'un groupe de Lie sur  $M$ . Dans le cas qui nous occupe d'une distribution  $\Delta^f$ , obtenir une paramétrisation de ces feuilles peut être un pas préliminaire important pour la résolution du problème cinématique inverse car il réduit le nombre de variables dans les équations différentielles.

Le but de cet article est d'étudier les questions ci-dessus dans le cas où  $M = (S^{d-1})^m$  est le produit de  $m$  sphères standard  $S^{d-1}$  de rayon 1 (muni de la métrique produit) et  $f: (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$  est un bras articulé. Si  $a := (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^m$ , le *bras articulé* (de type  $a$ ) dans  $\mathbf{R}^d$  est l'application  $f^a: (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$  définie par

$$f^a(z_1, \dots, z_m) := \sum_{j=1}^m a_j z_j.$$

Les points de  $(S^{d-1})^m$  sont appelés des *configurations*. On peut s'imaginer un bras de robot dans  $\mathbf{R}^d$ , partant de l'origine, formé de  $m$  segments de longueurs  $a_1, \dots, a_m$  et dont l'extrémité est  $f^a(z)$ . Notons que certaines longueurs  $a_i$  peuvent être nulles, ce qui sera utile au paragraphe 2 pour certaines démonstrations par récurrence.



Dans le cas d'un bras articulé, le problème cinématique inverse prend la signification qu'il a habituellement en robotique: trouver, à partir d'une configuration initiale  $\tilde{c}(0)$  du bras, un mouvement  $\tilde{c}(t)$  des différents segments tel que  $f^a(\tilde{c}(t)) = c(t)$ . Ce point de vue nous paraît stimulant et suggestif de problèmes mathématiques intéressants.

Le lecteur trouvera une étude des bras articulés dans [Ha], par exemple la caractérisation des points critiques de  $f^a$  qui sont les configurations alignées  $z_i = \pm z_j \forall i, j$  (voir aussi la remarque 2.10 plus loin), ainsi qu'une première classification des préimages  $M_b := (f^a)^{-1}(\{b\})$  pour une valeur régulière  $b \in \mathbf{R}^d$ . Les espaces  $M_b$  sont reliés aux *espaces de polygones*. Par exemple, si  $d = 2$  et  $b \neq 0$ , l'espace  $M_b$  s'identifie à l'espace des configurations planaires d'un  $(m+1)$ -gone de longueurs  $(a_1, \dots, a_m, |b|)$  modulo les isométries directes du plan. La classification de ces espaces a récemment été poussée jusqu'à  $m \leq 8$  dans [HR]; l'espace  $M_b$  correspond à  $\mathcal{N}_2^{m+1}(a_1, \dots, a_m, |b|)$  dans les notations de [HR]. En général, si  $b \neq 0$ , le groupe  $SO(d-1)$ , stabilisateur de  $b$  pour l'action de  $SO(d)$  sur  $\mathbf{R}^d$ , agit sur  $M_b$  avec quotient homéomorphe à  $\mathcal{N}_d^{m+1}(a_1, \dots, a_m, |b|)$ .

Pour le bras articulé  $f^a$ , notons  $\Delta^a := \Delta^{f^a}$  la distribution déterminée sur  $(S^{d-1})^m$  par  $f^a$ . Comme indiqué ci-dessus, le premier travail sera d'étudier les composantes connexes par  $\Delta^a$ -courbes. Notre théorème principal ci-dessous les identifie avec les orbites d'une action sur  $(S^{d-1})^m$  par un groupe de Lie, action que nous allons décrire maintenant.

Soit  $\sharp(a)$  le nombre de valeurs distinctes non-nulles de la suite  $a_i$  :  $\sharp(a) := \sharp\{a_i \mid i = 1, \dots, m, a_i \neq 0\}$ . Par exemple,  $\sharp(3, 3, 0, 1) = 2$ . Désignons par  $\text{Möb}_{d-1}$  le groupe des transformations conformes de  $S^{d-1}$  préservant l'orientation. C'est le groupe des transformations de Möbius, engendré par les compositions d'un nombre pair d'inversions, dans  $\mathbf{R}^d \cup \{\infty\}$ , par rapport à des sphères perpendiculaires à  $S^{d-1}$ . Soient  $b_1, \dots, b_{\sharp(a)}$  les valeurs non-nulles de la suite  $a_i$ . Pour  $j \in \{1, \dots, \sharp(a)\}$ , soit  $\text{Möb}_{d-1}^{(j)}$  une copie du groupe  $\text{Möb}_{d-1}$ , que l'on considère comme agissant sur  $(S^{d-1})^m$  de la manière suivante : si  $R \in \text{Möb}_{d-1}^{(j)}$ , on définit  $R \cdot (z_1, \dots, z_m) := (z'_1, \dots, z'_m)$  où

$$z'_i := \begin{cases} R \cdot z_i & \text{si } a_i = b_j \\ z_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $j \neq j'$ , les actions de  $\text{Möb}_{d-1}^{(j)}$  et de  $\text{Möb}_{d-1}^{(j')}$  commutent et définissent ainsi une action différentiable de  $G(a, d) := \text{Möb}_{d-1}^{\sharp(a)}$  sur  $(S^{d-1})^m$ , qui dépend de  $a$ . Notre théorème principal est :

**THÉORÈME PRINCIPAL.** *Deux points  $z$  et  $z'$  de  $(S^{d-1})^m$  sont reliés par une  $\Delta^a$ -courbe si et seulement si ils sont dans la même orbite pour l'action de  $G(a, d)$ .*

Le théorème principal implique que l'on peut trouver les relèvements horizontaux par des équations différentielles dans le groupe  $G(a, d)$ , voir [Ro].

La preuve du théorème principal occupe les paragraphes 2 à 4. Elle utilise le théorème de Sussmann cité auparavant ainsi que le théorème de Chow ([Gr, §0.4], [Be, Th. 2.4 et §2.5], [Mo, Ch. 2]). Dans le paragraphe 5, on tire quelques conséquences du théorème principal, par exemple que les invariants classiques des transformations de Möbius, comme le birapport de 4 points, produisent des quantités qui sont conservées le long des  $\Delta^a$ -courbes.

Les paragraphes 6 et 7 sont consacrés à l'étude des groupes d'holonomie de  $\Delta^a$ . Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^d$  formé de valeurs régulières du bras  $f^a : (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$  et si  $b \in U$ , le groupe d'holonomie  $\mathcal{H}_b(U)$  est formé des difféomorphismes de  $M_b := (f^a)^{-1}(b)$  obtenus par transport horizontal au-dessus de courbes dans  $U$  lisses par morceaux qui sont des lacets en  $b$ . On montre que pour un bras générique ( $\sharp(a) = m$ ), le groupe  $\mathcal{H}_b(U)$  agit transitivement sur chaque composante connexe de  $M_b$ . Ceci contraste avec le cas  $a = (1, \dots, 1)$  où l'on montre que, pour les bras planaires, les orbites de l'action du groupe d'holonomie sont les lignes de gradient d'une certaine

fonction de Morse  $\rho_b: M_b \rightarrow S^1$  dont on détermine les points critiques avec leurs indices.

## 2. BRAS ARTICULÉS PLANAIRES

Ce paragraphe présente quelques outils pour la démonstration du théorème principal dans le cas  $d = 2$  (bras planaires). On retrouvera essentiellement les mêmes énoncés pour les bras dans  $\mathbf{R}^d$  (§3), dont les démonstrations utiliseront le cas  $d = 2$  traité ici. De plus, le cas  $d = 2$  a l'avantage d'utiliser des techniques plus élémentaires et des calculs explicites.

Soit  $a := (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^m$ . Le bras articulé planaire  $f^a$  peut s'exprimer comme l'application  $f^a: T^m \rightarrow \mathbf{C}$  du tore plat  $T^m = (S^1)^m$  à valeurs complexes :

$$f^a(z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^m a_i z_i.$$

En paramétrant le cercle  $S^1$  par  $q \mapsto e^{iq}$  ( $q \in \mathbf{R}$ ) et en identifiant  $\mathbf{C}$  avec  $\mathbf{R}^2$ , on regarde aussi  $f^a$  comme l'application de  $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^2$  donnée, pour  $q := (q_1, \dots, q_m) \in \mathbf{R}^m$ , par

$$(1) \quad f^a(q) := \left( \sum_{i=1}^m a_i \cos q_i, \sum_{i=1}^m a_i \sin q_i \right) = (X^a(q), Y^a(q)).$$

Par abus de langage, les points de  $\mathbf{R}^m$  sont aussi appelés des *configurations*. La distribution  $\Delta^a := \Delta^{f^a}$  est donc engendrée par les champs  $\text{grad } X^a$  et  $\text{grad } Y^a$ . On la regarde, soit comme une distribution sur  $T^m$ , soit comme une distribution périodique sur  $\mathbf{R}^m$ .

Rappelons que le groupe  $SU(1, 1)$  est formé des  $(2 \times 2)$ -matrices complexes  $M$  de déterminant 1 telles que  $\bar{M}^T J M = J$  où  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Ce sont exactement les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  avec  $\|a\|^2 - \|b\|^2 = 1$ . Le groupe  $SU(1, 1)$  est le sous-groupe de  $SL(2, \mathbf{C})$  dont l'action sur  $\mathbf{C}$  par transformations homographiques préserve l'orientation et le cercle unité; il s'identifie donc à  $\text{Möb}_1$ . Son algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(1, 1)$  est formée des matrices  $M$  telles que  $J \bar{M} J = -M^T$  qui s'écrivent donc  $\begin{pmatrix} iu & b \\ \bar{b} & -iu \end{pmatrix}$  avec  $u \in \mathbf{R}$  et  $b \in \mathbf{C}$ . Enfin, rappelons que les algèbres de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$  et  $\mathfrak{su}(1, 1)$  sont isomorphes, en fait conjuguées dans  $GL(2, \mathbf{C})$  :

$$P \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) P^{-1} = \mathfrak{su}(1, 1), \text{ où } P := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Désignons par  $\text{Vec}(M)$  l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur une variété différentiable  $M$ . Soit  $\mathcal{L}^a$  la sous-algèbre de Lie de  $\text{Vec}(T^m)$  (ou de  $\text{Vec}(\mathbf{R}^m)$ ) engendrée par les champs  $\text{grad } X^a$  et  $\text{grad } Y^a$ , où  $X^a$  et  $Y^a$  sont définis dans l'équation (1).

Soit  $\alpha_a: \mathfrak{su}(1, 1)^{\sharp(a)} \rightarrow \text{Vec } T^m$  l'action infinitésimale associée à l'action de  $G(a, 2) = SU(1, 1)^{\sharp(a)}$  sur  $T^m$  définie dans l'introduction. Rappelons que  $\alpha_a$  est un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie.

**PROPOSITION 2.1.** *L'anti-homomorphisme  $\alpha_a: \mathfrak{su}(1, 1)^{\sharp(a)} \rightarrow \text{Vec}(S^1)^m$  est injectif et son image est  $\mathcal{L}^a$ .*

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve de la proposition 2.1. Nous avons tout d'abord besoin d'un certain matériel préliminaire. Prenons les notations de l'équation (1) et considérons les champs  $S, C \in \text{Vec}(\mathbf{R}^m)$  donnés par

$$(2) \quad S := \begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \vdots \\ \sin q_m \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} \cos q_1 \\ \vdots \\ \cos q_m \end{pmatrix}.$$

On vérifie par calcul direct que

$$(3) \quad [C, S] = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =: A, \quad [A, C] = -S, \quad [S, A] = -C.$$

Ces relations sont satisfaites par les générateurs suivants de  $\mathfrak{su}(1, 1)$ :

$$(4) \quad \tilde{C} := \begin{pmatrix} 0 & i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} := \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}.$$

Les sous-groupes à un paramètre de  $SU(1, 1)$  correspondant aux deux premiers éléments sont

$$\text{Exp}(t\tilde{S}) = \begin{pmatrix} \cosh(t/2) & \sinh(t/2) \\ \sinh(t/2) & \cosh(t/2) \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Exp}(t\tilde{C}) = \begin{pmatrix} \cosh(t/2) & i \sinh(t/2) \\ -i \sinh(t/2) & \cosh(t/2) \end{pmatrix}.$$

En faisant agir ces sous-groupes à un paramètre sur  $S^1$  par transformations homographiques, on obtient les flots  $\Gamma_t^1, \Gamma_t^i: S^1 \rightarrow S^1$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) définis par

$$(5) \quad \Gamma_t^1(z) := \frac{\cosh(t/2)z + \sinh(t/2)}{\sinh(t/2)z + \cosh(t/2)}$$

et

$$(6) \quad \Gamma_t^i(z) := \frac{\cosh(t/2)z + i \sinh(t/2)}{-i \sinh(t/2)z + \cosh(t/2)}$$

(l'exposant 1 ou  $i$  indique le point fixe stable du flot). Considérons les champs de vecteurs  $S$ ,  $C$ , et  $A$  de (2) dans le cas  $m = 1$ , c'est-à-dire sur  $S^1$ .

LEMME 2.2. *En tant que flot sur  $S^1$ , on a*

- (a)  $\Gamma_t^1$  est le flot de  $-S$ , le flot du gradient de la projection sur l'axe réel;
- (b)  $\Gamma_t^i$  est le flot de  $C$ , le flot du gradient de la projection sur l'axe imaginaire;
- (c)  $z \mapsto e^{it}z$  (rotation à vitesse constante) est le flot de  $A$ .

*Preuve.* Soit  $W^1$  le champ de vecteurs sur  $S^1$  dont  $\Gamma_t^1$  est le flot. Soit  $\text{Re}: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$  la projection sur l'axe horizontal. Le champ  $W^1$  est défini sur un voisinage de  $S^1$  et le calcul direct sur la formule (5) donne

$$W_z^1 = \left. \frac{d\Gamma_t^1(z)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1 - z^2}{2}.$$

Le champ  $W^1$  est donc dirigé vers la droite et ses zéros sont  $\pm 1$ . Il en est de même pour  $\text{grad Re}$  qui est la projection orthogonale sur  $TS^1$  du champ constant  $\partial/\partial x$ . D'autre part, pour  $z = e^{i\theta}$  on a

$$\begin{aligned} \|1 - z^2\|^2 &= \|1 - \cos 2\theta - i \sin 2\theta\|^2 = (1 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta \\ &= 2(1 - \cos 2\theta) = 2(1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

On a donc

$$\|W_z^1\|^2 = \sin^2 \theta = \|\text{grad}_z \text{Re}\|^2.$$

On a ainsi établi le point (a) du lemme 2.2. Le point (b) se démontre de la même manière et le point (c) est évident.  $\square$

Plus généralement, pour  $s \in S^1$ , considérons le flot sur  $S^1$

$$(7) \quad \Gamma_t^s(z) := \frac{\cosh(t/2)z + s \sinh(t/2)}{\bar{s} \sinh(t/2)z + \cosh(t/2)}.$$

Soit  $g_s: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction “ $s$ -composante”:  $g_s(z) = \text{Re}(z\bar{s})$ . Soit  $\Phi_t^s$  le flot sur  $S^1$  de  $\text{grad } g_s$ . Les points (a) ou (b) du lemme 2.2 sont des cas particuliers du lemme suivant.

LEMME 2.3.  $\Phi_t^s = \Gamma_t^s$  (égalité de flots sur  $S^1$ ).

*Preuve.* Soit  $m_s : S^1 \rightarrow S^1$  la multiplication par  $s$  et  $m_{\bar{s}}$  celle par  $\bar{s}$ . On a  $g_s = g_1 \circ m_{\bar{s}}$  et les champs  $\text{grad } g_1$  et  $\text{grad } g_s$  sont  $m_{\bar{s}}$ -reliés :

$$T_z m_{\bar{s}}(\text{grad}_z g_s) = \text{grad}_{z\bar{s}} g_1 .$$

On a donc  $\Phi_t^s = m_s \circ \Phi_t^1 \circ m_{\bar{s}}$ . Par le point (a) du lemme 2.2, on a  $\Phi_t^1 = \Gamma_t^1$ , d'où

$$\Phi_t^s = m_s \circ \Gamma_t^1 \circ m_{\bar{s}} = \Gamma_t^s . \quad \square$$

Pour  $s \in S^1$ , soit

$$C_s := \begin{pmatrix} 0 & s/2 \\ \bar{s}/2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(1, 1) .$$

Par exemple,  $C_1 = \tilde{S}$  et  $C_i = \tilde{C}$ . Comme  $s = e^{i\theta}$ , on a  $C_s = P_\theta \tilde{S} P_\theta^{-1}$ , où  $P_\theta \in SU(1, 1)$  est la matrice diagonale de coefficients  $e^{i\theta/2}, e^{-i\theta/2}$ . L'action par transformation homographique de  $P_\theta$  sur  $S^1$  est la rotation  $m_s$ . On a donc que  $\exp(tC_s)$  génère sur  $S^1$  le flot  $\Gamma_t^s$ .

Soit  $\alpha : \mathfrak{su}(1, 1) \rightarrow \text{Vec}(S^1)$  l'action infinitésimale de l'action de  $SU(1, 1)$  sur  $S^1$ . Vu ce qui précède, le lemme 2.3 se paraphrase en

LEMME 2.4.  $\alpha(C_s) = \text{grad } g_s$ .  $\square$

REMARQUE 2.5. Comme  $\alpha$  est un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie, on a bien

$$\alpha(\tilde{A}) = \alpha([\tilde{C}, \tilde{S}]) = -[\alpha(\tilde{C}), \alpha(\tilde{S})] = -[C, -S] = A .$$

*Preuve de la proposition 2.1.* Elle se fait par récurrence sur  $\sharp(a)$ . Le cas  $\sharp(a) = 0$  est banal car  $\mathfrak{su}(1, 1)^0 = 0$  (par convention) et  $\mathcal{L}^a = 0$  puisque l'application  $f^a$  est constante. L'injectivité de  $\alpha_a$  est aussi évidente puisque l'action de  $G(a, d)$  sur  $S^{d-1}$  est effective.

Supposons que  $\sharp(a) = 1$ . Soit  $b$  l'unique valeur positive de la suite  $a_i$ . Les composantes non-nulles de  $\text{grad } X^a$  sont égales à celles de  $-bS$  et celles de  $\text{grad } Y^a$  sont égales à celles de  $bC$ . De plus,  $\text{grad } X^a$  et  $\text{grad } Y^a$  ont les mêmes composantes nulles. Il s'ensuit que l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}^a$  ne dépend pas de  $b$  et qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie engendrée par  $S$  et  $C$ . L'action de  $G(a, 2) = SU(1, 1)$  sur  $T^m$  ne dépend pas non plus de  $b$ , on peut supposer que  $b = 1$ . Dans ce cas, pour  $X \in \mathfrak{su}(1, 1)$  les composantes non-nulles de  $\alpha_a(X)$  sont égales à  $\alpha(X)$ . Par les parties (a) et (b) du lemme 2.2, on

en déduit que  $\alpha_a(\tilde{S}) = \text{grad } X^a$  et  $\alpha_a(\tilde{C}) = \text{grad } Y^a$ . L'image de  $\alpha_a$  contient donc  $\mathcal{L}^a$ . Comme  $\tilde{S}$  et  $\tilde{C}$  engendrent  $\mathfrak{su}(1,1)$  en tant qu'algèbre de Lie, l'image de  $\alpha_a$  est aussi contenue dans  $\mathcal{L}^a$ , ce qui démontre la proposition 2.1 lorsque  $\sharp(a) = 1$ .

Supposons, par hypothèse de récurrence, que la proposition 2.1 soit vraie pour  $\sharp(a) \leq j-1$ . Soit  $a$  tel que  $\sharp(a) = j$ . Pour  $k \in \mathbf{N}$ , introduisons les champs de vecteurs suivants sur  $\mathbf{R}^m$  :

$$(8) \quad A^k := \begin{pmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_m^k \end{pmatrix}, \quad A^k S := \begin{pmatrix} a_1^k \sin q_1 \\ \vdots \\ a_m^k \sin q_m \end{pmatrix}, \quad A^k C := \begin{pmatrix} a_1^k \cos q_1 \\ \vdots \\ a_m^k \cos q_m \end{pmatrix}.$$

L'espace vectoriel engendré par les champs

$$(9) \quad A^{2k-1}C, A^{2k-1}S \text{ et } A^{2k} \quad (k \geq 1)$$

est une sous-algèbre de Lie de  $\text{Vec}(\mathbf{R}^m)$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} [A^{2k-1}C, A^{2l-1}S] &= A^{2(k+l-1)}, & [A^{2k}, A^{2l-1}C] &= -A^{2(k+l)-1}S \\ [A^{2k-1}S, A^{2l}] &= -A^{2(k+l)-1}C, \\ [A^{2k-1}C, A^{2l-1}C] &= [A^{2k-1}S, A^{2l-1}S] = [A^{2k}, A^{2l}] = 0. \end{aligned}$$

Cette algèbre de Lie est engendrée par  $\text{grad } X^a = -AS$  et  $\text{grad } Y^a = AC$ , donc c'est l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}^a$ .

Supposons que  $a_m \neq 0$  (le raisonnement est analogue si c'est un autre  $a_i$ ). Considérons les projecteurs linéaires  $\pi', \pi'' : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  définis par  $\pi'(x_1, \dots, x_m) := (x'_1, \dots, x'_m)$  et  $\pi''(x_1, \dots, x_m) := (x''_1, \dots, x''_m)$  où

$$x'_i := \begin{cases} x_i & \text{si } a_i = a_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad x''_i := \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = a_m \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}.$$

On considérera aussi  $\pi'$  et  $\pi''$  comme des morphismes du fibré tangent  $T\mathbf{R}^m$  sur lui-même, au-dessus de l'identité de  $\mathbf{R}^m$ , en appliquant  $\pi'$  ou  $\pi''$  sur chaque fibre. Notons  $a' := \pi'(a)$  et  $a'' := \pi''(a)$ . Par exemple, si  $m = 5$  et  $a = (2, 1, 3, 1, 1)$ , alors  $a' = (0, 1, 0, 1, 1)$  et  $a'' = (2, 0, 3, 0, 0)$ .

On a  $\pi'(\text{grad } X^a) = \text{grad } X^{a'}$ ,  $\pi'(\text{grad } Y^a) = \text{grad } Y^{a'}$  et il en est de même pour  $\pi''$  et  $a''$ . Ceci montre que  $\Delta^a = \Delta^{a'} \oplus \Delta^{a''}$ . De plus, la forme particulière des champs de (8) et des actions fait que  $\mathcal{L}^a = \mathcal{L}^{a'} \oplus \mathcal{L}^{a''}$ . Bref, tout se passe composante par composante et il en est de même des actions :  $\alpha : \text{Lie}(G(a, 2)) \rightarrow \text{Vec}(T^m)$  se décompose en  $\alpha_a = \alpha_{a'} \oplus \alpha_{a''}$ . Comme  $\sharp(a') = 1$  et  $\sharp(a'') = \sharp(a) - 1$ , on aura, par hypothèse de récurrence, que l'image de  $\alpha_{a'}$  est  $\mathcal{L}^{a'}$  et que l'image de  $\alpha_{a''}$  est  $\mathcal{L}^{a''}$ . On en déduit que l'image de  $\alpha_a$  est bien  $\mathcal{L}^a$ , ce qui achève la démonstration de la proposition 2.1.  $\square$

COROLLAIRE 2.6. *En tant qu'algèbre de Lie,  $\mathfrak{su}(1,1)^m$  est, quel que soit  $m$ , engendrée par 2 éléments.*

*Preuve.* Soit  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$  avec  $0 < a_1 < \dots < a_m$  (donc  $\sharp(a) = m$ ). Par la proposition 2.1,  $\alpha_a: \mathfrak{su}(1,1)^m \rightarrow \mathcal{L}^a$  est un (anti)-isomorphisme d'algèbres de Lie. Or,  $\mathcal{L}^a$  est engendrée, en tant qu'algèbre de Lie, par  $\text{grad } X^a$  et  $\text{grad } Y^a$ .  $\square$

REMARQUE 2.7. Pour  $m = \sharp(a)$ , les deux générateurs de  $\mathfrak{su}(1,1)^m$  du corollaire 2.6 sont

$$A\tilde{C} := (a_1\tilde{C}, \dots, a_m\tilde{C}) \quad \text{et} \quad A\tilde{S} := (a_1\tilde{S}, \dots, a_m\tilde{S}),$$

avec les  $\tilde{C}, \tilde{S} \in \mathfrak{su}(1,1)$  définis en (4).

EXEMPLE 2.8. Les champs  $A^1, A^2, \dots, A^k$  de (8) sont linéairement dépendants dès que  $k > \sharp(a)$ . La relation de dépendance linéaire se répercute sur les  $A^i C$  et  $A^i S$ , donnant une présentation intéressante de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(1,1)^{\sharp(a)}$ . Par exemple, si  $a = (a_1, a_2)$  avec  $a_1 \neq a_2$ , on obtient une présentation de  $\mathfrak{su}(1,1)^2$  engendrée comme espace vectoriel par

$$AC, AS, A^2, A^3C, A^3S, A^4$$

et les crochets non-nuls sont :

$$\begin{aligned} [AC, AS] &= A^2 \\ [A^2, AC] &= -A^3S \\ [A^2, AS] &= A^3C \\ [AC, A^3S] &= A^4 \\ [A^2, A^3C] &= [A^4, AC] = a_1^2 a_2^2 AS - (a_1^2 + a_2^2) A^3S \\ [A^2, A^3S] &= [A^4, AS] = -a_1^2 a_2^2 AC + (a_1^2 + a_2^2) A^3C \\ [A^3C, A^3S] &= -a_1^2 a_2^2 A^2 + (a_1^2 + a_2^2) A^4 \\ [A^4, A^3C] &= a_1^2 a_2^2 (a_1^2 + a_2^2) AS - (a_1^4 + a_1^2 a_2^2 + a_2^4) A^3S \\ [A^4, A^3S] &= -a_1^2 a_2^2 (a_1^2 + a_2^2) AC + (a_1^4 + a_1^2 a_2^2 + a_2^4) A^3C. \end{aligned}$$

Les quatre premières relations montrent que  $\mathfrak{su}(1,1)^2$  est, en tant qu'algèbre de Lie, engendrée par  $AC$  et  $AS$ .

Nous terminons ce paragraphe par un résultat qui nous sera utile plus loin. Soit  $q_0 \in \mathbf{R}^m$  un point régulier du bras planaire  $f^a: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Les champs

constants  $e_1 = \partial/\partial x$ ,  $e_2 = \partial/\partial y \in \text{Vec } \mathbf{R}^2$  admettent, au voisinage de  $q_0$ , des relevés horizontaux  $\tilde{e}_1$  et  $\tilde{e}_2$ . La valeur  $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]_{q_0}$  en  $q_0$  de leur crochet satisfait à la propriété suivante.

LEMME 2.9. *Il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  tels que*

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]_{q_0} = \alpha(AC)_{q_0} + \beta(AS)_{q_0} + \gamma(A^2)_{q_0}.$$

De plus,  $\gamma \neq 0$ .

*Preuve.* Soit  $f := f^a$ . Pour  $q \in \mathbf{R}^m$ , soit  $P_q := D_q f (D_q f)^T$  la  $(2 \times 2)$ -matrice de Gram de  $D_q f$ . Si  $q$  est un point régulier de  $f$ , on a  $\det P_q \neq 0$ . Soit  $V$  un champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}^2$ . Le champ horizontal  $\tilde{V}$  sur  $\mathbf{R}^m$  au-dessus de  $V$  est donné par

$$\tilde{V}_q = (D_q f)^T P_q^{-1} V.$$

En effet, on a bien  $\tilde{V}_q \in \Delta_q^a$  et

$$Df(\tilde{V}) = Df Df^T P^{-1} V = P P^{-1} V = V.$$

Les cas particuliers  $V = e_1 = (1, 0)^T$  et  $V = e_2 = (0, 1)^T$  donnent

$$(10) \quad \tilde{e}_1 = -Q_{11}AS + Q_{21}AC, \quad \tilde{e}_2 = -Q_{12}AS + Q_{22}AC$$

où les  $Q_{ij}$  sont les coefficients de la matrice  $Q := P_q^{-1}$ . Comme  $[AC, AS] = A^2$ , on a bien

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]_{q_0} = \alpha(AC)_{q_0} + \beta(AS)_{q_0} + \gamma(A^2)_{q_0},$$

avec  $\gamma = \frac{1}{\det P_{q_0}}$ .  $\square$

REMARQUE 2.10. Un point  $q \in \mathbf{R}^m$  est régulier si et seulement si  $\det P_q \neq 0$ . Or,

$$P = \begin{pmatrix} \|AS\|^2 & \langle AS, AC \rangle \\ \langle AS, AC \rangle & \|AC\|^2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det P_q &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sin^2 q_i \sum_{j=1}^n a_j^2 \cos^2 q_j - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \sin q_i \cos q_i \right)^2 \\ &= \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j^2 \sin q_i \cos q_j \sin(q_i - q_j) = \sum_{i < j} a_i^2 a_j^2 \sin^2(q_i - q_j). \end{aligned}$$

On en déduit que  $q$  est un point critique de  $f^a$  si et seulement si  $q_i - q_j = 0, \pi$  pour tout  $i, j$ . Cela signifie que  $q$  est une configuration alignée. On retrouve la caractérisation des points critiques de [Ha, Th. 3.1].

3. BRAS ARTICULÉS DANS  $\mathbf{R}^d$ 

Dans ce paragraphe, nous généralisons aux bras dans  $\mathbf{R}^d$  les résultats obtenus, dans le paragraphe 2, pour les bras planaires. Les démonstrations utilisent les résultats du §2.

Soit  $s \in S^{d-1}$ . Considérons le flot  $\Gamma_t^s$  sur  $S^{d-1}$  formé des transformations de Möbius déterminées par la condition suivante: si  $\varphi$  est une transformation de Möbius de  $\mathbf{R}^d \cup \{\infty\}$  telle que  $\varphi(-s) = 0$  et  $\varphi(s) = \infty$ , alors  $\varphi \circ \Gamma_t^s \circ \varphi^{-1}(x) = e^t x$ , pour tout  $x \in \varphi(S^{d-1})$ . En terme d'isométries hyperboliques du disque de Poincaré  $D^d$ ,  $\Gamma_t^s$  correspond à un flot de translations hyperboliques laissant invariant chaque plan qui contient la géodésique allant de  $-s$  à  $s$ .

Soit  $g_s : S^{d-1} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction  $g_s(x) = \langle x, s \rangle$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dénote le produit scalaire standard dans  $\mathbf{R}^d$ . Soit  $\Phi_t^s$  le flot, sur  $S^{d-1}$ , du gradient de  $g_s$ .

LEMME 3.1.  $\Gamma_t^s = \Phi_t^s$  (égalité de flots sur  $S^{d-1}$ ).

*Preuve.* Les deux flots ayant  $\pm s$  comme points fixes, il suffit de vérifier que  $\Gamma_t^s(y) = \Phi_t^s(y)$  pour  $y \in S^{d-1}$  différent de  $\pm s$ .

Soit  $\Pi$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^d$  engendré par  $y$  et  $s$ . Soit  $h : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$  la réflexion orthogonale par rapport au plan  $\Pi$ . La relation générale entre  $\text{grad}(g_s \circ h)$  et  $\text{grad} g_s$  est

$$(11) \quad (D_x h)^*(\text{grad}_{h(x)} g_s) = \text{grad}_x(g_s \circ h),$$

où  $(D_x h)^*$  est l'adjoint de  $D_x h$ . Comme  $h$  est une isométrie linéaire, on a  $(D_x h)^* = h^* = h^{-1} = h$ . D'autre part,  $g_s \circ h = g_s$ . Enfin, pour  $x \in \Pi$ , on a  $x = h(x)$  et la formule (11) se réduit à  $h(\text{grad}_x g_s) = \text{grad}_x g_s$ . Cela prouve que, si  $x \in \Pi$ , alors  $\text{grad}_x g_s \in \Pi$ , ce qui implique que  $\text{grad}_x g_s = \text{grad}_x(g_s)|_{\Pi}$ .

Le flot  $\Phi_t^s$  préserve donc le plan  $\Pi$ . Comme c'est aussi le cas du flot  $\Gamma_t^s$ , il suffit de montrer leur égalité sur le cercle  $\Pi \cap S^{d-1}$ . Soit  $\mu : \mathbf{C} \rightarrow \Pi$  une isométrie euclidienne  $\mathbf{R}$ -linéaire telle que  $\mu(1) = s$  (il en existe deux, mais ce choix est sans importance). Sur  $\Pi \cap S^{d-1}$ , on a  $\mu^{-1} \circ \Gamma_t^s \circ \mu = \Gamma_t^1$ , où  $\Gamma_t^1$  est le flot défini dans l'équation (5). De même,  $\mu^{-1} \circ \Phi_t^s \circ \mu$  est le flot sur  $S^1$  du gradient de la projection sur l'axe réel. Le fait que  $\Gamma_t^s = \Phi_t^s$  sur  $\Pi \cap S^{d-1}$  est exactement le contenu de la partie (a) du lemme 2.2.  $\square$

On peut évidemment voir  $\Gamma_t^s$  comme un sous-groupe à un paramètre de  $\text{Möb}_{d-1}$ . Soit  $C_s$  l'élément de  $\text{Lie}(\text{Möb}_{d-1})$  tel que  $\exp(tC_s) = \Gamma_t^s$ . Soit  $\alpha : \text{Lie}(\text{Möb}_{d-1}) \rightarrow \text{Vec}(S^{d-1})$  l'action infinitésimale de l'action de  $\text{Möb}_{d-1}$  sur  $S^{d-1}$ . Le lemme 3.1 se paraphrase en

LEMME 3.2.  $\alpha(C_s) = \text{grad } g_s$ .  $\square$

Soit  $s' \in S^{d-1}$  avec  $\langle s, s' \rangle = 0$ . Désignons par  $\Pi(s, s')$  le 2-plan de  $\mathbf{R}^d$  engendré par  $s$  et  $s'$  et orienté par cette base. On appelle *rotation d'angle  $t$  dans  $\Pi(s, s')$*  l'élément  $R \in SO(d)$  tel que

$$R(s) = \cos ts + \sin ts', \quad R(s') = -\sin ts + \cos ts'$$

et  $R(x) = x$  pour tout  $x$  dans le complément orthogonal de  $\Pi(s, s')$ .

LEMME 3.3. *Le sous-groupe à un paramètre  $\exp(t[C_s, C_{s'}])$  est la rotation d'angle  $-t$  dans le plan  $\Pi(s, s')$ .*

*Preuve.* Soit  $\Pi = \Pi(s, s')$ . Comme  $\Gamma_t^s$  et  $\Gamma_t^{s'}$  préservent le plan  $\Pi$ , les champs de vecteurs  $\alpha(C_s)$  et  $\alpha(C_{s'})$  sont tangents à  $\Pi$ . Le crochet  $[\alpha(C_s), \alpha(C_{s'})] = -\alpha([C_s, C_{s'}])$  est donc tangent à  $\Pi$  et le sous-groupe à un paramètre  $\exp(t[C_s, C_{s'}])$  préserve le plan  $\Pi$ .

Soit  $\mu: \mathbf{C} \rightarrow \Pi(s, s')$  l'isométrie euclidienne  $\mathbf{R}$ -linéaire telle que  $\mu(1) = s$  et  $\mu(i) = s'$ . On a vu dans la preuve du lemme 3.1 que  $\mu$  conjugue  $C_s$  et  $C_{s'}$  avec, respectivement, les éléments  $\tilde{S}$  et  $\tilde{C}$  de  $\mathfrak{su}(1, 1)$  définis par les équations (4). L'isométrie  $\mu$  conjugue donc  $[C_s, C_{s'}]$  avec  $[\tilde{S}, \tilde{C}] = -\tilde{A}$  dont le flot sur  $S^1$  est la rotation d'angle  $-t$  (partie (c) du lemme 2.2). Cela montre que le sous-groupe à un paramètre  $\exp(t[C_s, C_{s'}])$  se restreint à  $\Pi$  en la rotation d'angle  $-t$ .

Il reste à montrer que si  $x \in S^{d-1}$  est orthogonal à  $s$  et à  $s'$ , alors  $\exp(t[C_s, C_{s'}])x = x$ . Soit  $S$  la 2-sphère de rayon 1 centrée en l'origine dans l'espace vectoriel engendré par  $s, s'$  et  $x$ . Comme  $\Gamma_t^s = \exp(tC_s)$  et  $\Gamma_t^{s'} = \exp(tC_{s'})$  préservent  $S$ , ainsi en est-il de  $\exp(t[C_s, C_{s'}])$ . Comme le flot  $\exp(t[C_s, C_{s'}])$  préserve  $\Pi$ , il préserve la famille des (grands) cercles de  $S$  qui sont perpendiculaires à  $\Pi$ . Leur intersection commune  $\{\pm x\}$  est donc préservée par  $\exp(t[C_s, C_{s'}])$ . Par continuité, on en déduit que  $\exp(t[C_s, C_{s'}])x = x$ .  $\square$

LEMME 3.4. *Les éléments  $C_s$ , pour  $s \in S^{d-1}$ , engendrent  $\text{Lie}(\text{Möb}_{d-1})$  en tant qu'algèbre de Lie.*

*Preuve.* Soit  $L$  la sous-algèbre de Lie de  $\text{Lie}(\text{Möb}_{d-1})$  engendrée par les éléments  $C_s$ . Il suffit de voir que le groupe  $G = \exp(L)$  est égal à  $\text{Möb}_{d-1}$ .

Identifions  $\text{Möb}_{d-1}$  avec  $\text{Iso}^+(D^d)$ , le groupe des isométries hyperboliques du disque de Poincaré  $D^d$  qui préservent l'orientation. L'orbite de l'origine par  $\exp(tC_s)$  est le segment allant de  $-s$  à  $s$ . On en déduit que  $G$  agit

transitivement sur  $D^d$ . Il suffit donc de montrer que  $G$  contient le stabilisateur de l'origine qui est  $SO(d)$ . Mais, par le lemme 3.3,  $G$  contient toutes les rotations dans tous les 2-plans de  $D^d$  et ces rotations engendrent  $SO(d)$ .  $\square$

Nous allons maintenant démontrer la généralisation de la proposition 2.1. Soit  $a = (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbf{R}_{\geq 0})^m$ . Si  $f^a$  est le bras articulé de type  $a$ , on désigne par  $g_s^a: (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par  $g_s^a(z) = \langle f^a(z), s \rangle$ . Soit  $\mathcal{L}^a$  la sous-algèbre de Lie de  $\text{Vec}(S^{d-1})^m$  engendrée par les champs  $\text{grad } g_s^a$  pour tout  $s \in S^{d-1}$ . Soit  $\alpha_a: \text{Lie}(G(a, d)) \rightarrow \text{Vec}(S^{d-1})^m$  l'anti-homomorphisme d'algèbres de Lie associé à l'action de  $G(a, d)$  définie dans l'introduction.

**PROPOSITION 3.5.** *L'anti-homomorphisme  $\alpha_a: \text{Lie}(G(a, d)) \rightarrow \text{Vec}(S^{d-1})^m$  est injectif et son image est  $\mathcal{L}^a$ .*

*Preuve.* Comme pour la proposition 2.1, la démonstration se fait par récurrence sur  $\sharp(a)$ . Le cas  $\sharp(a) = 0$  est banal. L'injectivité de  $\alpha_a$  est aussi évidente puisque l'action de  $G(a, d)$  sur  $S^{d-1}$  est effective.

Supposons que  $\sharp(a) = 1$ . Soit  $b$  l'unique valeur positive de la suite  $a_i$  et soit  $\bar{a} = \frac{1}{b}a$ . Comme  $g_s^a(z) = \sum_{j=1}^m a_j \langle z_j, s \rangle$ , on a  $\text{grad } g_s^a = b \text{ grad } g_s^{\bar{a}}$ , d'où il résulte que  $\mathcal{L}^a = \mathcal{L}^{\bar{a}}$ . On a aussi que  $G(\bar{a}, d) = G(a, d)$  et  $\alpha_{\bar{a}} = \alpha_a$ .

On peut donc supposer que  $b = 1$ . Dans ce cas, pour  $X \in \text{Lie}(G(a, d)) = \text{Lie}(\text{Möb}_{d-1})$ , les composantes non-nulles de  $\alpha_a(X)$  sont égales à  $\alpha(X)$ . Par le lemme 3.2,  $\alpha(C_s) = \text{grad } g_s$ , donc  $\alpha_a(C_s) = \text{grad } g_s^a$  et l'image de  $\alpha_a$  contient  $\mathcal{L}^a$ . D'autre part, par le lemme 3.4, les éléments  $C_s$  engendrent  $\text{Lie}(\text{Möb}_{d-1})$  comme algèbre de Lie, ce qui entraîne que l'image de  $\alpha_a$  est contenue dans  $\mathcal{L}^a$ . Le cas  $\sharp(a) = 1$  est ainsi démontré.

Le pas de récurrence est exactement le même que pour la proposition 2.1.  $\square$

**COROLLAIRE 3.6.** *En tant qu'algèbre de Lie,  $\text{Lie}(\text{Möb}_{d-1})^m$  est, quel que soit  $m$ , engendrée par  $d$  éléments.*

*Preuve.* Soit  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$  avec  $0 < a_1 < \dots < a_m$  (donc  $\sharp(a) = m$ ). Par la proposition 3.5,  $\alpha_a: \text{Lie}(\text{Möb}_{d-1})^m \rightarrow \mathcal{L}^a$  est un (anti)-isomorphisme d'algèbres de Lie. Or,  $\mathcal{L}^a$  est engendrée, en tant qu'algèbre de Lie, par les  $d$  champs  $\text{grad } g_s^a$  pour  $s \in S^{d-1}$  parcourant les éléments d'une base de  $\mathbf{R}^d$ .  $\square$

## 4. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Nous allons tout d'abord rappeler un théorème de Sussmann [Su, Th. 4.1] sous la forme simplifiée dont nous aurons besoin ici. Soit  $M$  une variété différentiable et  $\mathcal{D} \subset \text{Vec}(M)$ . Soit  $\Delta_{\mathcal{D}}$  la distribution sur  $M$  engendrée par  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire que  $(\Delta_{\mathcal{D}})_x$  est le sous-espace vectoriel de  $T_x M$  engendré par  $A_x$  pour  $A \in \mathcal{D}$ . Supposons que les champs  $A \in \mathcal{D}$  sont complets, c'est-à-dire que leur flot  $\Phi_t^A$  est défini pour tout  $t \in \mathbf{R}$ . Soit  $H$  le sous-groupe de difféomorphismes de  $M$  engendré par les  $\Phi_t^A$  pour tout  $A \in \mathcal{D}$  et  $t \in \mathbf{R}$ . Soit  $P_{\mathcal{D}}$  la plus petite distribution sur  $M$  qui contient  $\Delta_{\mathcal{D}}$  et qui est invariante par l'action de  $H$ .

Soit  $K$  une distribution sur  $M$ . Rappelons qu'une *variété intégrale* de  $K$  est une sous-variété immergée  $V$  de  $M$  telle que  $T_x V = K_x$  pour tout  $x \in V$ . La distribution  $K$  est *intégrable* si tout point de  $M$  appartient à une variété intégrable de  $K$ . La relation "être dans une même variété intégrale" engendre alors une relation d'équivalence sur  $M$  dont les classes d'équivalence sont les *feuilles* d'un feuilletage. Ces feuilles ne sont pas, en général, toutes de même dimension; l'exemple standard est donné par les orbites d'une action d'un groupe de Lie sur une variété. Le théorème de Sussmann, lorsque les champs de  $\mathcal{D}$  sont complets (par exemple, si  $M$  est compacte), prend la forme suivante :

**THÉORÈME 4.1 (Sussmann).** *Soit  $\mathcal{D} \subset \text{Vec}(M)$  formé de champs complets. La distribution  $P_{\mathcal{D}}$  est intégrable et ses feuilles sont les orbites de l'action de  $H$ .*

Le corollaire suivant est bien connu des spécialistes (voir [Mo, p. 230]) mais ne semble pas être énoncé explicitement dans la littérature.

**COROLLAIRE 4.2.** *Soit  $\mathcal{D} \subset \text{Vec}(M)$  formé de champs complets. Soient  $x, y \in M$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$x$  et  $y$  sont joignables par une  $\Delta_{\mathcal{D}}$ -courbe.*
- (ii)  *$x$  et  $y$  sont joignables par une courbe qui est une succession de trajectoires de champs de  $\mathcal{D}$ .*

*Preuve.* Il est banal que (ii) entraîne (i). Réciproquement, soit  $c$  une  $\Delta_{\mathcal{D}}$ -courbe joignant  $x$  à  $y$ . Comme la distribution  $P_{\mathcal{D}}$  contient  $\Delta_{\mathcal{D}}$ , la courbe  $c$  est aussi une  $P_{\mathcal{D}}$ -courbe. Elle est donc contenue dans une feuille de  $P_{\mathcal{D}}$ .

Par le théorème de Sussmann, les points  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite de  $H$ , ce qui est équivalent à la condition (ii).  $\square$

Nous pouvons maintenant entreprendre la démonstration du théorème principal. Soit  $G := G(a, d)$ . Soient  $x, y$  deux points de  $(S^{d-1})^m$  joignables par une  $\Delta^a$ -courbe. Rappelons que  $\Delta^a = \Delta_{\mathcal{D}}$  pour  $\mathcal{D} = \{\text{grad } g_s^a \mid s \in S^{d-1}\}$ . Les champs  $\text{grad } g_s^a$  sont complets puisque  $(S^{d-1})^m$  est compacte. Par le corollaire 4.2, il existe une courbe reliant  $x$  à  $y$  qui est une succession de trajectoires de champs de  $\mathcal{D}$ . Par la proposition 3.5, les éléments de  $\mathcal{D}$  sont des champs fondamentaux de l'action de  $G$  sur  $(S^{d-1})^m$ . Les points  $x$  et  $y$  sont donc dans une même orbite pour l'action de  $G$ .

Réciproquement, soit  $z \in (S^{d-1})^m$ . Considérons l'application différentiable  $\beta: G \rightarrow (S^{d-1})^m$  donnée par  $\beta(g) := gz$ , dont l'image est l'orbite de  $z$ .

Soient  $e_1, \dots, e_d \in S^{d-1}$  une base de  $\mathbf{R}^d$ . Par la proposition 3.5, il existe  $d$  éléments  $C_{e_i}^a \in \text{Lie}(G(a, d))$  tels que  $\alpha_a(C_{e_i}^a) = \text{grad } g_{e_i}^a$ . Ces champs  $C_{e_i}^a$  engendrent  $\text{Lie}(G(a, d))$  en tant qu'algèbre de Lie (voir la preuve du corollaire 3.6).

La courbe  $t \mapsto \exp(tC_{e_i}^a)gz$  dans  $(S^{d-1})^m$  représente donc le vecteur tangent  $\text{grad}_{gz} g_{e_i}^a$ . Le champ sur  $G$  invariant à droite  $\overline{C_{e_i}^a}$  correspondant à  $C_{e_i}^a$  est donc  $\beta$ -relié au champ  $\text{grad } g_{e_i}^a$ . Comme les  $C_{e_i}^a$  engendrent  $\text{Lie}(G(a, d))$  en tant qu'algèbre de Lie, les champs  $\overline{C_{e_i}^a}$  engendrent  $\text{Lie}^-(G)$ , l'algèbre de Lie des champs invariants à droite sur  $G$ . Comme les valeurs des champs de  $\text{Lie}^-(G)$  engendrent l'espace tangent  $T_g G$  en tout  $g \in G$ , le théorème de Chow ([Gr, §0.4], [Be, Th. 2.4 et §2.5], [Mo, Ch. 2]) implique que  $G$  est connexe par courbes qui sont des successions de trajectoires des champs  $\overline{C_{e_i}^a}$ . L'image de telles courbes par  $\beta$  étant des  $\Delta^a$ -courbes, on en déduit que l'orbite  $Gz$  de  $z$  est connexe par  $\Delta^a$ -courbes.

**REMARQUE 4.3** (*Changement de la métrique riemannienne*). Le fibré tangent à  $(S^{d-1})^m$  se décompose en somme directe  $T(S^{d-1})^m = (TS^{d-1})^m$ . Si l'on munit  $(S^{d-1})^m$  de la métrique riemannienne pour laquelle

$$\|(v_1, \dots, v_m)\| = \sum_{j=1}^m a_j \|v_j\|,$$

la distribution  $\Delta^a$  pour cette nouvelle métrique est égale à celle, dans la métrique standard, pour le bras de type  $a = (1, \dots, 1)$  et  $G(a, d)$  est alors isomorphe à  $\text{Möb}_{d-1}$ .

## 5. CONSÉQUENCES DU THÉORÈME PRINCIPAL

Soit  $f^a: (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$  le bras articulé de type  $a = (a_1, \dots, a_m)$ . La proposition 5.1 ci-dessous est une conséquence banale du théorème principal.

**PROPOSITION 5.1.** *Supposons qu'il existe  $i, j$  avec  $a_i = a_j$ . Soit  $z(t) \in (S^{d-1})^m$ ,  $t \in [0, 1]$ , une  $\Delta^a$ -courbe. Si  $z_i(0) = z_j(0)$ , alors  $z_i(t) = z_j(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .  $\square$*

Le théorème principal implique que les invariants par transformations de Möbius, appliqués aux  $z_i$  correspondant à des segments de même longueur, sont invariants par  $\Delta^a$ -courbes. Cela donne toute une famille d'intégrales premières (constantes du mouvement) des  $\Delta^a$ -courbes.

Par exemple, si  $d = 2$ , trois points  $z_1, z_2, z_3 \in S^1$  qui sont deux à deux distincts déterminent une orientation  $\mathcal{O}(z_1, z_2, z_3)$  de  $S^1$ , définie comme le sens de parcours tel que le chemin allant de  $z_1$  à  $z_3$  passe par  $z_2$ . Pour quatre points  $z_i, z_j, z_k, z_l \in S^1$  distincts, on a le birapport

$$b(z_i, z_j, z_k, z_l) = \frac{z_i - z_k}{z_i - z_j} \cdot \frac{z_j - z_l}{z_k - z_l} \in \mathbf{R}$$

(ce birapport est réel puisque les quatre points  $z_i$  sont sur un même cercle).

Pour  $d = 3$  et quatre  $z_i \in S^2$  distincts, on a le *birapport complexe*  $b_{\mathbf{C}}(z_i, z_j, z_k, z_l) \in \mathbf{C}$  défini de la façon suivante. On choisit une transformation de Möbius  $\sigma$  de  $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$  qui envoie  $S^2$  sur le plan horizontal, identifié avec  $\mathbf{C}$ , telle que  $\sigma: S^2 \rightarrow \mathbf{C}$  préserve l'orientation. On peut alors définir

$$b_{\mathbf{C}}(z_i, z_j, z_k, z_l) := \frac{\sigma(z_i) - \sigma(z_k)}{\sigma(z_i) - \sigma(z_j)} \cdot \frac{\sigma(z_j) - \sigma(z_l)}{\sigma(z_k) - \sigma(z_l)} \in \mathbf{C}.$$

Enfin, pour  $d > 3$ , on a le *birapport faible*

$$b_+(z_i, z_j, z_k, z_l) := \frac{|z_i - z_k|}{|z_i - z_j|} \cdot \frac{|z_j - z_l|}{|z_k - z_l|} \in \mathbf{R}_{>0},$$

qui est un invariant de  $\text{Möb}_{d-1}$  (voir [Bn, p. 32]). Ces invariances donnent immédiatement la proposition suivante.

**PROPOSITION 5.2.** *Soit  $f^a: (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$  le bras articulé de type  $a = (a_1, \dots, a_m)$ .*

(a) *Supposons que  $d = 2$ . Soient  $i, j, k$  avec  $a_i = a_j = a_k$ . Soient  $z(t) \in T^m$ ,  $t \in [0, 1]$  une  $\Delta^a$ -courbe. Supposons que  $z_i(0) \neq z_j(0) \neq z_k(0) \neq z_i(0)$ . Alors, pour tout  $t$ , on a  $z_i(t) \neq z_j(t) \neq z_k(t) \neq z_i(t)$  et l'orientation  $\mathcal{O}(z_i(t), z_j(t), z_k(t))$  est constante.*

(b) Soient  $i, j, k, l$  avec  $a_i = a_j = a_k = a_l$ . Soient  $z(t) \in T^m$ ,  $t \in [0, 1]$  une  $\Delta^a$ -courbe. Si les quatre points initiaux  $z_i(0), z_j(0), z_k(0), z_l(0)$  sont tous distincts, ils le restent tout au long de la  $\Delta^a$ -courbe et

1. si  $d = 2$ , le birapport  $b(z_i(t), z_j(t), z_k(t), z_l(t))$  est constant ;
2. si  $d = 3$ , le birapport complexe  $b_{\mathbf{C}}(z_i(t), z_j(t), z_k(t), z_l(t))$  est constant ;
3. pour tout  $d \geq 2$ , le birapport faible  $b_+(z_i(t), z_j(t), z_k(t), z_l(t))$  est constant.

5.3. Dans le cas  $a = (1, \dots, 1)$  et  $d = 2$  ou  $3$ , les birapports permettent d'obtenir des invariants complets pour la connexité par  $\Delta^a$ -courbes. La situation est résumée par le tableau suivant. Un tiret dans la colonne de droite veut dire une condition vide, donc toujours vraie. Soit donc  $f^a : (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$  le bras articulé de type  $a = (1, \dots, 1)$ . Soient  $z^0, z^1 \in (S^{d-1})^m$ .

$m$	$d$	Condition équivalente à l'existence d'une $\Delta^a$ -courbe joignant $z^0$ à $z^1$
2	$\geq 2$	–
3	2	$\mathcal{O}(z_1^0, z_2^0, z_3^0) = \mathcal{O}(z_1^1, z_2^1, z_3^1)$
3	$\geq 3$	–
4	2	$b(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0) = b(z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1)$
4	3	$b_{\mathbf{C}}(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0) = b_{\mathbf{C}}(z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1)$
$\geq 4$	2	$\mathcal{O}(z_1^0, z_2^0, z_3^0) = \mathcal{O}(z_1^1, z_2^1, z_3^1)$ et $b(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_k^0) = b(z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_k^1)$ pour $k = 4, \dots, m$
$\geq 4$	3	$b_{\mathbf{C}}(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_k^0) = b_{\mathbf{C}}(z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_k^1)$ pour $k = 4, \dots, m$

Le lecteur trouvera facilement des preuves pour les énoncés du tableau ci-dessus. Par exemple, pour  $d = 2$ , on choisit deux transformations de Möbius  $\sigma_j$  ( $j = 0, 1$ ) de  $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$  telles que  $\sigma_j(z_1^j) = \infty$ ,  $\sigma_j(z_2^j) = 0$  et  $\sigma_j(z_3^j) = 1$ . Si  $\mathcal{O}(z_1^0, z_2^0, z_3^0) = \mathcal{O}(z_1^1, z_2^1, z_3^1)$ , alors  $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_0 \in \text{Möb}_2$ . De plus, on a

$$b(z_1^j, z_2^j, z_3^j, z_k^j) = b(\sigma_j(z_1^j), \sigma_j(z_2^j), \sigma_j(z_3^j), \sigma_j(z_k^j)) = z_k^j,$$

donc l'égalité des birapports implique que  $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_0(z_k^0) = z_k^1$  pour  $k = 4, \dots, m$ . La démonstration pour  $d = 3$  est semblable.

## 6. HOLONOMIE : LE CAS GÉNÉRIQUE

Soit  $a = (a_1, \dots, a_m)$  et  $b \in \mathbf{R}^d$  une valeur régulière de  $f^a: (S^{d-1})^m \rightarrow \mathbf{R}^d$ . On désignera par  $M_b$  la préimage  $(f^a)^{-1}(b)$  de  $b$ , qui est donc une sous-variété de codimension  $d$  dans  $(S^{d-1})^m$ .

Rappelons que les points critiques de  $f^a$  sont les configurations alignées, c'est-à-dire les  $m$ -uples  $(z_1, \dots, z_m)$  tels que  $z_i = \pm z_j$  [Ha, Th. 3.1]. Les valeurs régulières forment donc un ouvert de  $\mathbf{R}^d$ , complément d'un ensemble fini de sphères centrées en l'origine. Soit  $U$  un ouvert formé de valeurs régulières qui contient  $b$ . Soit  $\text{Lac}_b(U)$  l'ensemble des lacets en  $b$  dans  $U$  qui sont des courbes lisses par morceaux.

LEMME 6.1. *Pour tout  $c \in \text{Lac}_b(U)$  et tout  $q \in M_b$ , il existe une unique  $\Delta^a$ -courbe  $\tilde{C}$  dans  $(S^{d-1})^m$  telle que  $\tilde{c}(0) = q$  et  $f^a \circ \tilde{c} = c$ .*

*Preuve.* Soit  $V := (f^a)^{-1}(U)$ . La restriction de  $f^a$  à  $V$  est donc une submersion qui est propre (puisque  $V$  est relativement compact). La même démonstration que pour une connexion sur un fibré différentiable (voir [DNF, lemme 2, p. 212]) prouve alors le lemme 6.1.  $\square$

Soit  $c$  un lacet élément de  $\text{Lac}_b(U)$ . A tout  $q \in M_b$ , on peut associer l'extrémité du relèvement horizontal de  $c$  partant de  $q$ , dont l'existence est garantie par le lemme 6.1. Ce procédé définit un difféomorphisme de  $M_b$  appelé l'*holonomie* de  $c$ . L'ensemble des difféomorphismes obtenus de cette façon constitue un groupe  $\mathcal{H}_b(U)$  de difféomorphismes de  $M_b$ , appelé *groupe d'holonomie* en  $b$  pour l'ouvert  $U$ .

La dimension des orbites de l'action de  $\mathcal{H}_b(U)$  sur  $M_b$  (orbites d'holonomie) dépend de  $\sharp(a)$ . Pour un bras articulé générique ( $\sharp(a) = m$ ), nous allons démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 6.2. *Si  $\sharp(a) = m$ , le groupe d'holonomie  $\mathcal{H}_b(U)$  agit transitivement sur chaque composante connexe de  $M_b$ .*

*Preuve.* Soit  $V := (f^a)^{-1}(U)$  et  $q \in V$ . Soit  $\beta_q: G(a, d) \rightarrow (S^{d-1})^m$  l'application  $\beta_q(g) := gq$ . Si  $\sharp(a) = m$ , l'action du groupe  $G(a, d)$  sur  $(S^{d-1})^m$  est transitive et  $\beta_q$  est une submersion.

Soit  $A \in \text{Lie}(G(a, d))$ . Le champ de vecteurs  $\alpha_a(A) \in \text{Vec}(S^{d-1})^m$  satisfait à  $\alpha_a(A)_q = T_I \beta_q(A)$  (où  $I$  désigne l'élément neutre de  $G(a, d)$ ). Par la proposition 3.5, l'image de  $\alpha_a$  est égale à  $\mathcal{L}^a$ . On en déduit que les valeurs

en  $q$  des champs de  $\mathcal{L}^a$  engendrent tout  $T_q V$ . Par le théorème de Chow ([Gr, §0.4], [Be, Th. 2.4 et §2.5]), pour tous  $q, q'$  dans une même composante connexe de  $V$ , il existe une  $\Delta^a$ -courbe joignant  $q$  à  $q'$  dans  $V$ . Lorsque  $q$  et  $q'$  sont dans  $M_b$ , cette courbe se projette sur un lacet dans  $\text{Lac}_b(U)$ , ce qui prouve que  $q$  et  $q'$  sont dans la même orbite d'holonomie.  $\square$

REMARQUE 6.3. a) Lorsque  $d = 2$ , on peut voir plus directement que les valeurs en  $q$  des champs de  $\mathcal{L}^a$  engendrent tout  $T_q T^m$  (ou  $T_q \mathbf{R}^m$ ). En effet,  $\mathcal{L}^a$  contient les champs constants  $A^k$  de (8). Si  $\sharp(a) = m$ , ces champs, pour  $k = 1, \dots, m$ , sont linéairement indépendants (le calcul aboutit à un déterminant de Vandermonde).

b) Lorsque  $d = 2$  la variété  $M_b$  peut avoir deux composantes connexes. Par exemple, si  $a := (\sqrt{3}, 1)$  et  $b = 2$ , la variété  $M_b$  est constitué de deux configurations:  $(e^{i\pi/6}, e^{-i\pi/3})$  et  $(e^{-i\pi/6}, e^{i\pi/3})$ . Comme  $G(a, 2)$  agit transitivement sur  $T^2$ , il existe, par le théorème principal, des courbes horizontales joignant les deux points de  $M_2$ , mais il est clair que ces courbes passent obligatoirement par une configuration alignée. Le groupe d'holonomie  $\mathcal{H}_2(U)$  est donc trivial, pour tout ouvert  $U$  contenant 2 et formé de valeurs régulières.

Plus généralement, soit  $a = (a_1, a_2, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$  avec  $a_1, a_2$  et  $\varepsilon$  strictement positifs, et soit  $b \in \mathbf{C}$  avec  $|a_1 - a_2| < |b| < a_1 + a_2$ . Si  $\varepsilon$  est assez petit, la variété  $M_b$  est soit vide soit difféomorphe à deux copies de  $T^{m-2}$ ; dans ce dernier cas, il n'y a pas de courbe horizontale joignant ces deux composantes connexes sans passer par une configuration alignée.

## 7. HOLONOMIE DES BRAS PLANAIRES LORSQUE $a := (1, \dots, 1)$

Dans tout ce paragraphe, on suppose que  $d = 2$  et, sauf indication contraire,  $a := (1, \dots, 1)$ . On note  $f := f^a$  et on considère la préimage  $M_b := f^{-1}(b)$  pour une valeur régulière  $b \in \mathbf{C}$  de l'application  $f$ , que l'on voit donc comme une sous-variété de codimension 2 dans  $T^m$  avec la métrique induite. Par abus de notation, on désignera également par  $M_b$  la préimage de  $b$  dans  $\mathbf{R}^m$ . Nous allons étudier les orbites d'holonomie sur  $M_b$ . Soit  $\rho: T^m \rightarrow S^1$  l'application  $\rho(z_1, \dots, z_m) := z_1 z_2 \cdots z_m$ . Désignons par  $\rho_b: M_b \rightarrow S^1$  la restriction de  $\rho$  à  $M_b$ . Soit  $\mathcal{H}_b^0(U)$  la composante connexe par arcs de l'identité dans  $\mathcal{H}_b(U)$ .

PROPOSITION 7.1. *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  formé de valeurs régulières de  $f$  et contenant  $b$ . Alors, les orbites de l'action du groupe d'holonomie  $\mathcal{H}_b^0(U)$  sur  $M_b$  sont les trajectoires du gradient de la fonction  $\rho_b$ .*

*Preuve.* Soit  $u \in M_b$  et soit  $W$  la trajectoire de  $\text{grad } \rho_b$  contenant  $u$ . Par le théorème principal, l'orbite  $\mathcal{H}_b^0(U) \cdot u$  est contenue dans l'intersection avec  $M_b$  des orbites de l'action de  $G = G(a, 2) = SU(1, 1)$  sur  $T^m$ . Soit  $q \in \mathcal{H}_b^0(U) \cdot u$ . L'espace tangent en  $q$  à  $G \cdot q$  est engendré par la valeur en  $q$  des champs  $C$ ,  $S$  et  $A$  de (8) avec  $a_i = 1$ . Les vecteurs  $C_q$  et  $S_q$  sont orthogonaux à  $T_q M_b$ . Le champ constant  $A$  est le gradient de la fonction  $\rho$ . Comme  $M_b$  est munie de la métrique induite, la projection orthogonale de  $A_q$  sur  $T_q M_b$  donne sur  $M_b$  le gradient de  $\rho_b$ . Cela prouve que  $\mathcal{H}_b^0(U) \cdot u \subset W$ .

Soit  $q \in W$ . On va montrer que  $\mathcal{H}_b^0(U) \cdot q$  est un voisinage de  $q$  dans  $W$ . Cela prouvera que  $\mathcal{H}_b^0(U) \cdot u$  ainsi que son complémentaire dans  $W$  sont des ouverts de  $W$ . Comme  $W$  est connexe, on aura  $\mathcal{H}_b^0(U) \cdot u = W$ . On peut supposer que  $\text{grad}_q \rho_b \neq 0$ , sinon  $W$  est réduit à un point.

Pour  $s > 0$ , considérons le chemin  $c: [0, 4s] \rightarrow \mathbf{C}$  partant de  $b$  et parcourant à vitesse 1 le bord du carré  $(b, b + s, b + s + is, b + is)$ . Si  $s$  est assez petit,  $c$  est un lacet élément de  $\text{Lac}_b(U)$ . Le relevé horizontal  $\tilde{c}: [0, 4s] \rightarrow \mathbf{R}^m$  de  $c$  partant de  $q \in M_b$  consiste en quatre morceaux de trajectoires des champs  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ , relevés horizontaux des champs constants  $e_1 = \partial/\partial x$ ,  $e_2 = \partial/\partial y \in \text{Vec } \mathbf{C}$ . On a  $\tilde{c}(4s) \in \mathcal{H}_b^0(U) \cdot q \subset W$ . Le chemin  $h: [0, s] \rightarrow \mathbf{R}^m$  défini par  $h(t) = c(4t)$  satisfait à  $\dot{h}(0) = 0$  et  $\ddot{h}(0) = 2[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]_q$  (voir [Sp, pp. 222–224]). Le développement de Taylor de  $c$  à l'ordre 2 est donc

$$(12) \quad \tilde{c}(4s) = q + s^2 [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]_q + o(s^2).$$

Comme on suppose que  $\text{grad}_q \rho_b \neq 0$ , le vecteur  $A_q$  n'est pas une combinaison linéaire de  $C_q$  et  $S_q$ . Puisque  $a = (1, \dots, 1)$ , on a  $A = A^2$  et le lemme 2.9 implique que  $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]_q \neq 0$ . Comme  $s$  peut varier dans tout un voisinage de 0, l'équation (12) prouve que  $\mathcal{H}_b^0(U) \cdot q$  est bien un voisinage de  $q$  dans  $W$ .  $\square$

REMARQUE 7.2. La preuve de la proposition 7.1 montre qu'une orbite de l'action du groupe d'holonomie  $\mathcal{H}_b(U)$  est une union de trajectoires de  $\text{grad } \rho_b$ . Nous ne savons pas si cette union se réduit toujours à une seule trajectoire.

PROPOSITION 7.3. *Pour un bras planaire de type  $a = (1, \dots, 1)$ , les points fixes de l'action du groupe d'holonomie  $\mathcal{H}_b(U)$  sont les configurations  $z = (z_1, \dots, z_m) \in M_b$  telles que la suite  $z_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) prenne exactement 2 valeurs.*

*Preuve.* Si l'on travaille dans  $\mathbf{R}^m$ , ce sont les points  $q$  tels que  $S_q$ ,  $C_q$  et  $A_q$  sont linéairement dépendants, c'est-à-dire que la  $(m \times 3)$ -matrice construite avec ces trois vecteurs colonne est de rang  $\leq 2$ . Cela signifie que pour tout  $i, j, k$ , on a

$$\begin{vmatrix} \sin q_i & \cos q_i & 1 \\ \sin q_j & \cos q_j & 1 \\ \sin q_k & \cos q_k & 1 \end{vmatrix} = \sin(q_i - q_j) + \sin(q_j - q_k) + \sin(q_k - q_i) = 0.$$

Cette équation, qui est équivalente à

$$\sin((q_j - q_k) + (q_k - q_i)) = \sin(q_j - q_k) + \sin(q_k - q_i),$$

est de la forme  $\sin(u + v) = \sin u + \sin v$ . Cette dernière égalité équivaut à

$$(13) \quad \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} = \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}.$$

L'égalité (13) a lieu si et seulement si l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée :

1.  $\cos \frac{u+v}{2} = \cos \frac{u-v}{2}$ . Cette condition est équivalente à  $u \equiv 0 \pmod{2\pi}$  ou  $v \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , c'est à dire  $e^{iq_i} = e^{iq_k}$  ou  $e^{iq_j} = e^{iq_k}$ .
2.  $\sin \frac{u+v}{2} = 0$ , c'est-à-dire  $u + v \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Ceci est équivalent à  $e^{iq_i} = e^{iq_j}$ .

On a ainsi montré que les points fixes du groupe d'holonomie sont les  $q$  tels que, pour tout  $i, j, k$ , l'ensemble  $\{e^{iq_i}, e^{iq_j}, e^{iq_k}\}$  contient au plus deux points. L'ensemble de tous les  $e^{iq_j}$  doit contenir au moins 2 points, sinon on aurait  $|b| = m$  et  $b$  ne serait pas une valeur régulière de  $f$ .  $\square$

La proposition 7.3 implique qu'un point critique  $z = (z_1, \dots, z_m)$  de  $\rho_b$  est caractérisé par l'ensemble

$$K = K(z) := \{j \mid \operatorname{Im}\langle z_j, b \rangle < 0\} \subset \{1, \dots, m\},$$

où  $\langle, \rangle$  désigne le produit scalaire standard de  $\mathbf{C}$ . Pour  $K$  un sous-ensemble propre de  $\{1, \dots, m\}$ , on désigne par  $z^K$  le point critique de  $M_b$  tel que  $K(z^K) = K$ . Un tel point  $z^K$  existe dans  $M_b$  si et seulement si  $|m - 2|K|| < |b| < m$ . Par exemple, si  $m = 4$ , le point critique  $z^{\{4\}}$  existe dans  $M_b$  si et seulement si  $2 < |b| < 4$ .

PROPOSITION 7.4. *La fonction  $\rho_b$  est une fonction de Morse. L'indice du point critique  $z^K$  est égal à  $|K| - 1$ .*

*Preuve.* Observons que la fonction  $\rho: T^m \rightarrow S^1$  satisfait à la condition d'équivariance

$$\rho(e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_m) = e^{i\theta} \rho(z_1, \dots, z_m).$$

On peut donc, sans restreindre la généralité, supposer que  $b$  est réel  $\geq 0$ . Si  $b = 0$ , il n'y a pas de point critique puisque un tel point serait alors une configuration alignée (le cas  $b = 0$  sera traité dans l'exemple 7.10). On supposera donc que  $b \in \mathbf{R}_{>0}$ .

On travaille dans  $\mathbf{R}^m$  en un point  $q^K$  au-dessus de  $z^K$ . Pour alléger la notation, définissons

$$N := |K| = \#\{j \mid \sin q_j^K < 0\} \text{ et } P := \#\{j \mid \sin q_j^K > 0\} = m - N.$$

Observons encore que  $M_b$  et  $\rho_b$  sont invariantes par l'action du groupe symétrique sur  $T^m$  permutant les coordonnées. Cette action permute les points critiques ayant même  $N$ . On pourra supposer que  $K = \{P + 1, \dots, m\}$ .

Au voisinage de  $q^K$ , la fonction  $\rho_b$  admet un relèvement  $\tilde{\rho}_b$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  de la forme

$$(14) \quad \tilde{\rho}_b(q) = \text{cte} + \sum_{j=1}^m q_j.$$

Notons  $\widehat{f}(q) \in \mathbf{C}$  l'extrémité des  $P$  premiers segments :

$$\widehat{f}(q) := \sum_{j=1}^P e^{iq_j}.$$

Définissons  $u := u(q)$ ,  $\xi := \xi(q) \in ]0, \pi[$ ,  $v := v(q)$ ,  $\eta := \eta(q) \in ]0, \pi[$  par les formules

$$\widehat{f}(q) = u(q)e^{i\xi(q)}, \quad b - \widehat{f}(q) = v(q)e^{i(\pi - \eta(q))}.$$

Observons que  $\xi$  et  $\eta$  sont déterminés par  $u$  et  $v$ . En effet, les points  $0, \widehat{f}(q)$  et  $b$  forment un triangle de côtés  $u$ ,  $v$  et  $b$  donc, par le théorème du cosinus :

$$(15) \quad \xi(u, v) = \arccos \frac{b^2 + u^2 - v^2}{2bu}, \quad \eta(u, v) = \arccos \frac{b^2 - u^2 + v^2}{2bv}.$$



L'expression de  $\tilde{\rho}_b(\tilde{q}, \tilde{r})$  s'obtient des formules (14) et (17) :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_b(\tilde{q}, \tilde{r}) &= \text{cte} + \sum_{i=1}^{P-1} \tilde{q}_i - \arcsin \left( \sum_{j=1}^{P-1} \sin \tilde{q}_j \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{r}_{m+1-i} - \arcsin \left( \sum_{j=1}^{N-1} \sin \tilde{r}_j \right) \\ &+ P \xi(u(\tilde{q}), v(\tilde{r})) - N \eta(u(\tilde{q}), v(\tilde{r})). \end{aligned}$$

Comme  $\partial u / \partial \tilde{q}_i(0) = \partial v / \partial \tilde{r}_i(0) = 0$ , on a bien  $\nabla \tilde{\rho}_b(0, 0) = 0$ . Quant à la matrice hessienne  $\mathcal{H}\tilde{\rho}_b$  en  $(0, 0)$ , le calcul de ses coefficients donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_b}{\partial \tilde{q}_k \partial \tilde{q}_i}(0, 0) &= s_u \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{q}_k \partial \tilde{q}_i}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_b}{\partial \tilde{r}_k \partial \tilde{r}_i}(0, 0) &= s_v \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{r}_k \partial \tilde{r}_i}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\rho}_b}{\partial \tilde{r}_k \partial \tilde{q}_i}(0, 0) &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} s_u &:= \frac{\partial}{\partial u} [P\xi - N\eta](u(0), v(0)) \\ s_v &:= \frac{\partial}{\partial v} [P\xi - N\eta](u(0), v(0)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{q}_k \partial \tilde{q}_i}(0, 0) &= \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{r}_k \partial \tilde{r}_i}(0, 0) = -1 - \delta_{ik}, \end{aligned}$$

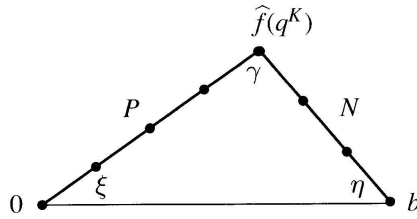
où  $\delta_{ik}$  est le symbole de Kronecker. Comme  $u(0) = P$  et  $v(0) = N$ , le calcul avec les formules (15) donne :

$$(18) \quad \begin{aligned} s_u &= -\frac{PN(1 + \cos \gamma)}{2A} < 0 \quad i = 1 \dots P-1 \\ s_v &= \frac{PN(1 - \cos \gamma)}{2A} > 0 \quad i = 1 \dots N-1, \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est l'angle en  $\hat{f}(q^K)$  du triangle  $(0, b, \hat{f}(q^K))$  et  $A$  est l'aire de ce triangle (voir figure ci-dessous); ces formules s'obtiennent à l'aide du théorème du cosinus et de la formule de Héron :

$$4A = \sqrt{-b^4 - P^4 - N^4 + 2b^2P^2 + 2b^2N^2 + 2P^2N^2}.$$

Comme  $b$  est une valeur régulière,  $\gamma \neq 0, \pi$ ,  $A \neq 0$  et les inégalités dans (18) sont strictes.



La matrice hessienne  $\mathcal{H}\tilde{\rho}_b(0,0)$  est donc formée de deux blocs :

$$\mathcal{H}\tilde{\rho}_b(0,0) = \begin{pmatrix} s_u M(P) & 0 \\ 0 & s_v M(N) \end{pmatrix},$$

où  $M(k)$  est la  $(k \times k)$ -matrice dont les coefficients diagonaux sont  $-2$  et les autres  $-1$ . Comme  $M(k)$  est somme de la matrice  $-I$  et d'une matrice de rang 1, ses valeurs propres sont faciles à calculer : l'une vaut  $-(k+1)$  et toutes les autres valent  $-1$ . En particulier, elles sont toutes négatives. On déduit ainsi de (18) que  $\mathcal{H}\tilde{\rho}_b(0,0)$  possède  $N-1$  valeurs propres négatives et  $P-1$  valeurs propres positives. Le point  $z^K$  est donc un point critique non-dégénéré de  $\rho_b$  d'indice  $|K|-1$ .  $\square$

REMARQUE 7.5. Tous les points critiques d'un même indice sont sur un même niveau de  $\rho_b$ .

#### EXEMPLES.

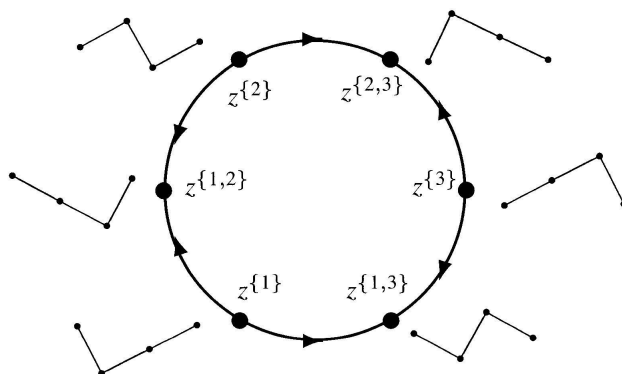
7.7. Pour le bras articulé avec  $m$  segments tous de longueur 1, la variété  $M_b$  est difféomorphe à l'espace de polygones  $\mathcal{N}_2^{m+1}(1, \dots, |b|)$  (voir [HR]). Lorsque  $m-2 < |b| < m$ , la variété  $M_b$  est donc difféomorphe à la sphère  $S^{m-2}$  [HR, Exemple 6.5]. Les angles  $q_i$  sont bien déterminés dans l'intervalle ouvert  $(-\pi, \pi)$  (aucun segment ne pouvant se "retourner") et on pourra donc identifier  $M_b$  à la composante connexe de  $\tilde{M}_b \subset \mathbf{R}^m$  pour laquelle  $|q_j| < \pi$  pour tout  $j$ . De même, l'application  $\rho_b: M_b \rightarrow S^1$  se relève en  $\tilde{\rho}_b: M_b \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\tilde{\rho}_b(q) = \sum_{i=1}^m q_i$  (un tel relèvement continu n'existe que si  $|b| > m-2$ ).

Les points critiques  $z^K$  existent dans  $M_b$  pour tout sous-ensemble propre  $K$  de  $\{1, \dots, m\}$ . Par la proposition 7.4, pour tout  $1 \leq k \leq m-1$ , la fonction de Morse  $\tilde{\rho}_b$  possède donc  $\binom{m}{k}$  points critiques d'indice  $k-1$ .

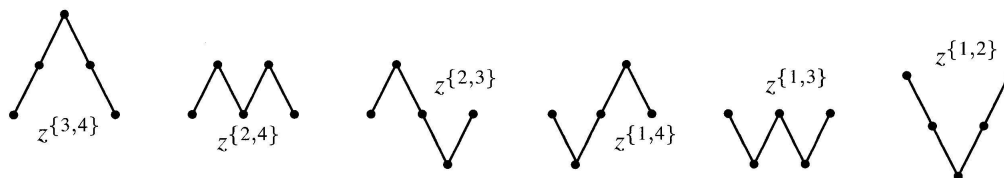
Pour visualiser le champ  $\text{grad } \tilde{\rho}_b = \text{grad } \rho_b$  sur  $M_b \cong S^{m-2}$ , on considère une triangulation  $\mathcal{T}$  sur  $S^{m-2}$  isomorphe à la première subdivision barycentrique du bord du  $(m-1)$ -simplexe  $\Delta^{m-1}$ . Si l'on numérote les sommets

de  $\Delta^{m-1}$  de 1 à  $m$ , les sommets de  $\mathcal{T}$  sont indexés par les sous-ensembles propres  $K$  de  $\{1, \dots, m\}$ . On peut vérifier que  $\text{grad } \rho_b$  est le champ associé à  $\mathcal{T}$  (voir [Sp, p. 611–612]): le barycentre d'un  $k$ -simplexe est un zéro de  $\text{grad } \rho_b$  correspondant à un point critique d'indice  $k$  de  $\rho_b$ .

7.8. Considérons le cas particulier de l'exemple 7.7 où  $m = 3$ . Pour  $1 < b < 3$ , la variété  $M_b$  est diffeomorphe à un cercle et la fonction  $\rho_b$  admet 3 points critiques d'indice 0 et 3 d'indice 1. La figure ci-dessous montre les configurations critiques. Les flèches indiquent le sens des trajectoires de  $\text{grad } \rho_b$ , allant des points critiques d'indice 0 à ceux d'indice 1.



7.9. Considérons le bras articulé à 4 segments:  $a = (1, 1, 1, 1)$ . Les valeurs critiques de  $f^a$  sont 0 et les cercles de rayon 2 et 4. Si  $2 < |b| < 4$ , la variété  $M_b$  est diffeomorphe à  $S^2$  et on est dans le cas de l'exemple 7.7. Lorsque  $0 < |b| < 2$ , la variété  $M_b$  est diffeomorphe à l'espace des configurations planaires (modulo rotations et translations) d'un pentagone équilatéral; cet espace est diffeomorphe à une surface de genre 4 (voir [HR, Table V]). L'application  $\rho_b$  a alors 6 points critiques, tous d'indice 1 (points "selles"), correspondant aux configurations:



Rappelons (voir remarque 7.5) que ces 6 points critiques sont sur un même niveau:  $\rho_b(z^{i,j}) = 1$  pour tout  $i, j$ . La visualisation des trajectoires de  $\text{grad } \rho_b$  sur la surface  $M_b$  de genre 4 est un intéressant défi.

7.10. Lorsque  $m$  est impair, le disque ouvert de rayon 1 centré en 0 est formé de valeurs régulières. Si  $|b| < 1$ , il n'y a aucune configuration satisfaisant à la condition de la proposition 7.3. La fonction  $\rho_b$  n'a donc aucun point critique et est une submersion. Le groupe d'holonomie  $\mathcal{H}_b$  agit sans point fixe sur  $M_b$ .

Dans le cas particulier  $b = 0$ , on a  $\text{grad } \rho_b = A$  et le flot de  $\text{grad } \rho_b$  est périodique, donné par l'action diagonale de  $S^1$  sur  $T^m$ . Chaque configuration effectue un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante. Cela prouve que  $M_0$ , et donc  $M_b$  pour  $|b| < 1$ , est difféomorphe à  $M_1^{(\bar{a})} \times S^1$ , où  $\bar{a}$  est le bras articulé à  $m - 1$  segments, tous de longueur 1.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Be] BELLAÏCHE, A. The tangent space in sub-Riemannian geometry. In: *Sub-Riemannian Geometry*. A. Bellaïche & J.J. Risler, ed. *Progress in Mathematics*, 144. Birkhäuser 1996, 4–84.
- [Bn] BEARDON, A. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [DNF] DOUBROVINE, B., S. NOVIKOV et A. FOMENKO. *Géométrie contemporaine, méthodes et applications, deuxième partie : géométrie et topologie des variétés*. Editions MIR, Moscou, 1979.
- [Eh] EHRESMANN, CH. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. *Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles 1950*. G. Thone, Liège (1951), 29–55.
- [Gr] GROMOV, M. Carnot-Carathéodory spaces seen from within. In: *Sub-Riemannian Geometry*. A. Bellaïche & J.J. Risler, ed. Birkhäuser 1996, 85–324.
- [Ha] HAUSMANN, J.-C. Sur la topologie des bras articulés. In: *Algebraic Topology, Poznan*. Springer Lectures Notes 1474 (1989), 146–159.
- [HR] HAUSMANN, J.-C. et E. RODRIGUEZ. The space of clouds in Euclidean space. *Experiment. Math.* 13 (2004), 31–47.
- [Ju] JURDJEVIC, V. *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, 1997.
- [Mo] MONTGOMERY, R. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. *Math. Surveys and Monographs* 91. Amer. Math. Soc., 2002.
- [Ro] RODRIGUEZ, E. L'algorithme du charmeur de serpent. (En préparation.)
- [Sp] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. I*. Publish or Perish, 1979.

- [Su] SUSSMANN, H. J. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 180 (1973), 171–188.

(Reçu le 8 octobre 2004)

Jean-Claude Hausmann

Section de Mathématiques  
Université de Genève  
Rue du Lièvre 2-4  
B.P. 64  
CH-1211 Genève 4  
Suisse  
*e-mail*: hausmann@math.unige.ch

Leere Seite

Blank page

Page vide