

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 50 (2004)  
**Heft:** 3-4: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Elementary construction of exhausting subsolutions of elliptic operators  
**Autor:** Napier, Terrence / Ramachandran, Mohan

**Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2655>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

We may now define  $|\xi|_h^2$  for  $\xi \in L_x$  with  $x \in X$  by

$$|\xi|_h^2 = \begin{cases} e^{-\gamma(x)} |\xi/s(x)|^2 & \text{if } x \in X \setminus Y, \\ e^{-\alpha(x) - \epsilon\beta(x)} |\xi|_k^2 & \text{if } x \in V. \end{cases}$$

Then  $h$  is a well-defined  $C^\infty$  Hermitian metric in  $L$  since, for  $x \in V \setminus Y$  and  $\xi \in L_x$ , we have

$$e^{-\gamma(x)} |\xi/s(x)|^2 = e^{-(\alpha(x) - \log |s(x)|_k^2 + \epsilon\beta(x))} |\xi|_k^2 / |s(x)|_k^2 = e^{-\alpha(x) - \epsilon\beta(x)} |\xi|_k^2.$$

Furthermore, on  $X \setminus Y$  we have

$$\mathcal{R}_h = \Delta_g(-\log |s|_h^2) = \Delta_g \gamma \begin{cases} > 0 & \text{on } X \setminus Y \\ > 1 & \text{on } V \setminus Y \end{cases}$$

By continuity, we also have  $\mathcal{R}_h \geq 1 > 0$  at points in  $Y$ . Thus  $\mathcal{R}_h > 0$  on  $X$ .  $\square$

For  $X$  a Riemann surface, the above proofs become especially simple. For example, the construction of  $\alpha$  in the proof of Theorem 2.3 is trivial for  $\dim X = 1$  because  $Y$  is discrete. For  $X$  an open Riemann surface, Theorem 0.1 provides a  $C^\infty$  strictly plurisubharmonic exhaustion function and, therefore, by [Gr] and [DG], one gets the theorem of [BS] that an open Riemann surface is Stein. For a compact Riemann surface  $X$ , Theorem 2.3 becomes the familiar fact (see, for example, [GriH]) that the holomorphic line bundle associated to a nontrivial effective divisor admits a  $C^\infty$  Hermitian metric  $h$  with positive curvature  $\Theta_h$ .

#### REFERENCES

- [BS] BEHNKE, H. und K. STEIN. Konvergente Folgen von Regularitätsbereiche. *Math. Ann.* 116 (1938), 204–216.
- [D] DEMAILLY, J.-P. Cohomology of  $q$ -convex spaces in top degrees. *Math. Z.* 204 (1990), 283–295.
- [DG] DOCQUIER, F. und H. GRAUERT. Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 140 (1960), 94–123.
- [EM] ELIASHBERG, Y. and N. MISHACHEV. *Introduction to the  $h$ -Principle*. Graduate Studies in Math. 48. Amer. Math. Soc., Providence, 2002.
- [GoG] GOLUBITSKY, M. and V. GUILLEMIN. *Stable Mappings and their Singularities*. Grad. Texts in Math. 14. Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.

- [Gr] GRAUERT, H. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. Math. (2)* 68 (1958), 460–472.
- [GreW] GREENE, R. and H. WU. Embedding of open Riemannian manifolds by harmonic functions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 25 (1975), 215–235.
- [GriH] GRIFFITHS, P. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley–Interscience, New York, 1978.
- [M] MALGRANGE, B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1956), 271–355.
- [N] NARASIMHAN, R. *Complex Analysis in One Variable*, second edition. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [O] OHSAWA, T. Completeness of noncompact analytic spaces. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 20 (1984), 683–692.

(Reçu le 27 mai 2004)

Terrence Napier

Department of Mathematics  
Lehigh University  
Bethlehem, PA 18015  
U. S. A.  
*e-mail*: tjn2@lehigh.edu

Mohan Ramachandran

Department of Mathematics  
SUNY at Buffalo  
Buffalo, NY 14260  
U. S. A.  
*e-mail*: ramac-m@newton.math.buffalo.edu