

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 50 (2004)  
**Heft:** 1-2: L'enseignement mathématique

**Artikel:** Nombre de solutions dans une binade de l'équation  $A^2 + B^2 = C^2 + C$   
**Autor:** Muller, Jean-Michel / Nicolas, Jean-Louis / Roblot, Xavier-François  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2645>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

NOMBRE DE SOLUTIONS DANS UNE BINADE  
DE L'ÉQUATION  $A^2 + B^2 = C^2 + C$

par Jean-Michel MULLER, Jean-Louis NICOLAS et Xavier-François ROBLOT<sup>\*)</sup>

**ABSTRACT.** Let us denote by  $Q(N, \lambda)$  the number of solutions of the diophantine equation  $A^2 + B^2 = C^2 + C$  satisfying  $N \leq A \leq B \leq C \leq \lambda N - \frac{1}{2}$ . We prove that there exists a constant  $\alpha(\lambda)$  such that, for  $\lambda$  fixed and  $N \rightarrow \infty$ ,  $Q(N, \lambda) = \alpha(\lambda)N + O_\lambda(N^{7/8} \log N)$ . When  $\lambda = 2$ ,  $Q(2^{n-1}, 2)$  counts the number of solutions of  $A^2 + B^2 = C^2 + C$  with the same number,  $n$ , of binary digits; these solutions are interesting in the problem of computing the function  $(a, b) \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}$  in radix-2 floating-point arithmetic.

By elementary arguments,  $Q(N, \lambda)$  can be expressed in terms of four sums of the type

$$S(u, v; f) = \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ odd}}} \left( \sum_{\substack{1 \leq A \leq f(d) \\ 4A^2 \equiv -1 \pmod{d}}} 1 \right)$$

where  $u$  and  $v$  are real numbers and  $f: [u, v] \rightarrow \mathbf{R}$  is a function. These sums are estimated by a classical, but deep, method of number theory, using Fourier analysis and Kloosterman sums. This method is effective, and, in the case  $\lambda = 2$ , a precise upper bound for  $|Q(N, \lambda) - \alpha(\lambda)N|$  is given.

## 1. INTRODUCTION

### 1.1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Le problème informatique original est le suivant (cf. [15], chap. 9): on désire construire des systèmes (programmes ou circuits intégrés) capables de calculer la fonction  $(a, b) \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}$  avec “arrondi correct”, pour  $a$  et  $b$  compris entre 1 et 2, lorsque le résultat est lui aussi entre 1 et 2.

---

<sup>\*)</sup> Recherche partiellement financée par le CNRS et l'INRIA, Laboratoire d'Informatique du Parallelisme, UMR 5668 et Institut Girard Desargues, UMR 5028.

Par “arrondi correct” on entend que le résultat fourni doit toujours être le nombre exactement représentable en virgule flottante en base 2 avec  $n$  bits de mantisse (on dira “nombre machine” pour faire court) le plus proche du résultat exact. Pour ceci, il faut savoir avec quelle précision on doit approcher  $\sqrt{a^2 + b^2}$  lors de calculs intermédiaires pour être certain qu’arrondir au plus près l’approximation est équivalent à arrondir au plus près le résultat exact.

Appelons “nombre milieu” le milieu de deux nombres machine consécutifs. La fonction “arrondi au plus près” est une fonction constante par morceaux et croissante, dont les points de discontinuité sont les nombres milieu. Dans cette optique, il apparaît intéressant d’étudier les nombres machines  $a$  et  $b$  compris entre 1 et 2 tels que  $a^2 + b^2$  soit le plus proche du carré d’un nombre milieu. En définissant  $A = 2^{n-1}a$  et  $B = 2^{n-1}b$ , nous sommes ramenés à trouver des entiers  $A$ ,  $B$  et  $C$  compris entre  $2^{n-1}$  et  $2^n - 1$  tels que

$$A^2 + B^2 = (C + 1/2)^2 + \epsilon,$$

où  $|\epsilon|$  est le plus petit possible. Il est clair que  $|\epsilon|$  vaut au moins  $1/4$ . Nous cherchons à savoir si le cas  $|\epsilon| = 1/4$  se produit.

Notre problème est donc de déterminer si pour toute valeur de  $n$  il existe des nombres entiers  $A$ ,  $B$  et  $C$  compris entre  $2^{n-1}$  et  $2^n - 1$  satisfaisant l’équation diophantienne

$$(1.1) \quad A^2 + B^2 = C^2 + C.$$

Désignons par  $Q(2^k, 2)$  (cette notation sera justifiée dans l’énoncé du théorème 1 ci-dessous) le nombre de solutions de (1.1) telles que

$$(1.2) \quad 2^k \leq A \leq B \leq C \leq 2^{k+1} - 1.$$

On trouvera dans la table 1 la valeur de  $Q(2^k, 2)$  pour  $4 \leq k \leq 41$  (on a  $Q(1, 2) = 1$  et, pour  $1 \leq k \leq 3$ ,  $Q(2^k, 2) = 0$ ). Cette table montre que  $Q(2^k, 2)/2^k$  semble tendre vers une limite. L’objet de cet article est de démontrer :

THÉORÈME 1. *Soit  $\lambda > \sqrt{2}$  un nombre réel fixé. Pour  $N$  entier, on désigne par  $Q(N, \lambda)$  le nombre de solutions de l’équation diophantienne (1.1) vérifiant*

$$(1.3) \quad N \leq A \leq B \leq C \leq \lambda N - \frac{1}{2}.$$

*Si l’on pose*

$$(1.4) \quad \alpha(\lambda) = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\pi} - \frac{\log(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})}{\pi}$$

on a

$$(1.5) \quad Q(N, \lambda) = \alpha(\lambda)N + \tilde{R}(N, \lambda)$$

avec, lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$(1.6) \quad \tilde{R}(N, \lambda) = O_\lambda(N^{7/8} \log N).$$

Pour  $\lambda = 2$ , on a

$$(1.7) \quad \alpha(2) = \frac{1}{6} + \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\pi} - \frac{\log(2 + \sqrt{3})}{\pi} = 0.02801587455727\dots$$

et, pour  $N \geq 1000$ ,

$$(1.8) \quad |\tilde{R}(N, 2)| \leq N^{7/8}(51 \log N + 211) + N^{1/2}(39 \log N + 238) + 29.$$

Lorsque  $\lambda = 2$ , nous avons voulu donner une majoration effective du reste  $\tilde{R}(N, 2)$ . Cette majoration n'est pas très bonne, et le membre de droite de (1.8) n'est inférieur au terme principal  $\alpha(\lambda)N$  de (1.5) que pour  $N > 1.32 \cdot 10^{42}$ . Au prix de calculs encore plus techniques, il serait possible de l'améliorer un peu. Par exemple, dans la majoration (2.23) des sommes de Kloosterman, on peut remplacer (cf. [13], chap. 4)  $\tau(m) = \sum_{d|m} 1$  par  $2^{\omega(m)}$  où  $\omega(m)$  est le nombre de facteurs premiers de  $m$ , ce qui permettrait de diminuer le membre de droite de (1.8). Mais, pour ne pas trop alourdir la présentation, nous avons effectué assez grossièrement la plupart des majorations. Cependant, il semble difficile, par cette méthode, d'obtenir pour  $\tilde{R}(N, 2)$  une majoration 100 fois meilleure que (1.8).

## 1.2 LES DIVISEURS DE $4A^2 + 1$

Ecrivons  $C^2 + C = (C + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$  ; par le changement de variable

$$(1.9) \quad X = 2A, \quad Y = 2B, \quad Z = 2C + 1,$$

l'équation (1.1) devient

$$(1.10) \quad X^2 + Y^2 = Z^2 - 1.$$

En considérant (1.10) modulo 4, on voit que toute solution  $X, Y, Z$  de (1.10) est telle que  $Z$  est impair et  $X$  et  $Y$  sont pairs. Donc, toute solution de (1.10) engendre, par (1.9), une solution de (1.1) et les deux équations diophantiennes (1.1) et (1.10) sont équivalentes.

En écrivant (1.10) sous la forme

$$X^2 + 1 = Z^2 - Y^2 = (Z - Y)(Z + Y),$$

on voit que  $Z - Y = d$  est un diviseur de  $X^2 + 1$ . Réciproquement, à un diviseur  $d$  de  $X^2 + 1$ , la résolution du système

$$\begin{cases} Z - Y = d \\ Z + Y = (X^2 + 1)/d \end{cases}$$

fournit

$$(1.11) \quad \begin{cases} Y = \frac{1}{2} \left( \frac{X^2 + 1}{d} - d \right) \\ Z = \frac{1}{2} \left( \frac{X^2 + 1}{d} + d \right) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} B = \frac{1}{4} \left( \frac{4A^2 + 1}{d} - d \right) \\ C = \frac{1}{4} \left( \frac{4A^2 + 1}{d} + d - 2 \right). \end{cases}$$

Notons que, dans (1.11),  $B$  et  $C$  sont entiers; en effet les facteurs premiers de  $4A^2 + 1$  sont tous congrus à 1 (mod 4) (car  $-1$  est un carré modulo un tel facteur premier) et  $d$ , qui divise  $4A^2 + 1$ , est aussi congru à 1 (mod 4).

Il y a donc, par (1.11), une bijection entre les diviseurs  $d$  de  $4A^2 + 1$  et les solutions de (1.1), pour  $A$  fixé. Dans cette bijection, la condition  $B \leq C$  de (1.3) se traduit par  $d \geq 1$  et la condition  $A \leq B$  par  $4A^2 - 4Ad + 1 - d^2 \geq 0$ , soit

$$(1.12) \quad \begin{aligned} A \leq B \leq C &\iff A \geq f_2(d) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( d + \sqrt{2d^2 - 1} \right) \quad \text{et} \quad d \geq 1 \\ &\iff 1 \leq d \leq f_2^{-1}(A) = \sqrt{8A^2 + 1} - 2A. \end{aligned}$$

Parallèlement, la condition  $C \leq \lambda N - 1/2$  de (1.3) se traduit par  $4A^2 + d^2 - 4\lambda N d + 1 \leq 0$ ; autrement dit, le point  $(A, d)$  doit être à l'intérieur de la demi ellipse  $4A^2 + (d - 2\lambda N)^2 = 4\lambda^2 N^2 - 1$ ,  $A > 0$ . Ceci implique  $0 < d < 4\lambda N$  et  $A < \lambda N$ . D'autre part, par (1.11), la condition  $B > 0$  entraîne  $d \leq 2A < 2\lambda N$ , et l'on a

$$(1.13) \quad \begin{aligned} C \leq \lambda N - 1/2 &\iff A \leq f_1(d) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sqrt{d(4\lambda N - d) - 1} \\ &\iff d \geq f_1^{-1}(A) = 2\lambda N - \sqrt{4\lambda^2 N^2 - 4A^2 - 1}. \end{aligned}$$

Les courbes représentatives des fonctions  $f_1^{-1}(A)$  et  $f_2^{-1}(A)$  se coupent au point  $(A_0, v_0)$ :

$$(1.14) \quad \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4} \sqrt{8\lambda^2 N^2 - 2}, \\ v_0 &= f_1^{-1}(A_0) = f_2^{-1}(A_0) = 2\lambda N - \frac{1}{2} \sqrt{8\lambda^2 N^2 - 2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la condition (1.3) équivaut à choisir le point  $(A, d)$  tel que  $N \leq A \leq A_0$  et  $f_1^{-1}(A) \leq d \leq f_2^{-1}(A)$ . Si  $\lambda \leq \sqrt{2}$ , par (1.14),  $A_0 < N$  et  $Q(N, \lambda) = 0$ .

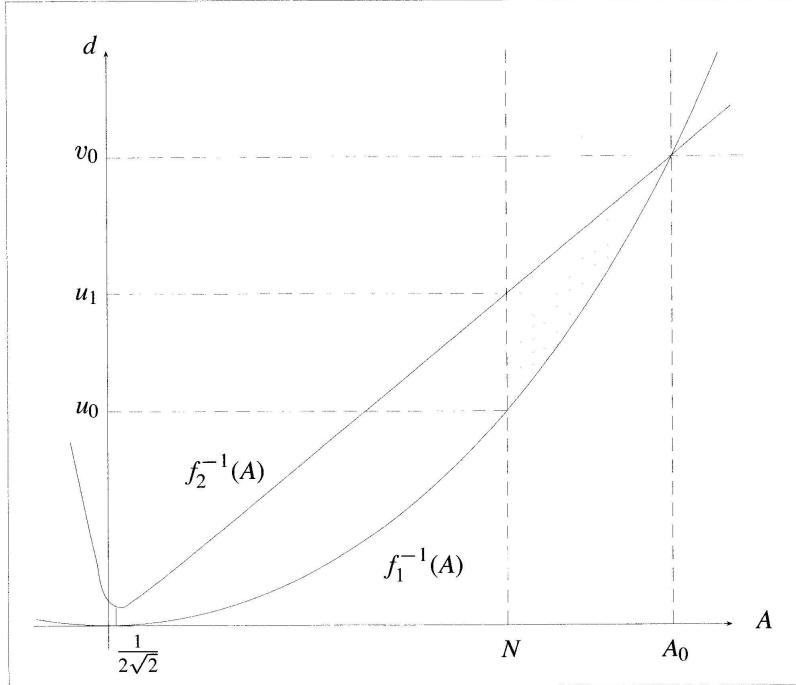


FIGURE 1  
Les valeurs possibles pour  $(A, d)$

On suppose donc  $\lambda > \sqrt{2}$  et l'on a

$$(1.15) \quad Q(N, \lambda) = \sum_{N \leq A \leq A_0} \sum_{\substack{d|4A^2+1 \\ f_1^{-1}(A) \leq d \leq f_2^{-1}(A)}} 1.$$

Permutons l'ordre des sommes. Les valeurs extrêmes prises par  $d$  sont

$$(1.16) \quad u_0 = f_1^{-1}(N) = 2\lambda N - \sqrt{4(\lambda^2 - 1)N^2 - 1}$$

et  $v_0$  défini par (1.14), car les fonctions  $f_1^{-1}(A)$  et  $f_2^{-1}(A)$  sont croissantes sur l'intervalle  $[N, A_0]$ . D'autre part, pour  $d$  fixé,  $A$  doit vérifier  $A \geq \max(N, f_2(d))$  et, en posant

$$(1.17) \quad u_1 = f_2^{-1}(N) = \sqrt{8N^2 + 1} - 2N,$$

l'égalité (1.15) devient

$$(1.18) \quad \begin{aligned} Q(N, \lambda) &= \sum_{u_0 \leq d \leq v_0} \sum_{\substack{N \leq A \leq f_1(d) \\ 4A^2 + 1 \equiv 0 \pmod{d}}} 1 - \sum_{u_1 \leq d \leq v_0} \sum_{\substack{N \leq A \leq f_2(d) \\ 4A^2 + 1 \equiv 0 \pmod{d}}} 1 \\ &= \hat{Q}(N, \lambda) + \varepsilon(N, \lambda) \end{aligned}$$

avec

$$(1.19) \quad \hat{Q}(N, \lambda) = \sum_{u_0 \leq d \leq v_0} \sum_{\substack{N \leq A \leq f_1(d) \\ 4A^2 + 1 \equiv 0 \pmod{d}}} 1 - \sum_{u_1 \leq d \leq v_0} \sum_{\substack{N \leq A \leq f_2(d) \\ 4A^2 + 1 \equiv 0 \pmod{d}}} 1$$

et

$$(1.20) \quad \varepsilon(N, \lambda) = \sum_{u_1 \leq d \leq v_0} \sum_{\substack{A = f_2(d) \\ 4A^2 + 1 \equiv 0 \pmod{d}}} 1.$$

Définissons

$$(1.21) \quad S(u, v; f) = \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \left( \sum_{\substack{1 \leq A \leq f(d) \\ 4A^2 \equiv -1 \pmod{d}}} 1 \right).$$

L'égalité (1.19) s'écrit

$$(1.22) \quad \hat{Q}(N, \lambda) = S(u_0, v_0; f_1) - S(u_0, v_0; N-1) - S(u_1, v_0; f_2) + S(u_1, v_0; N-1)$$

où  $N-1$  désigne la fonction constante égale à  $N-1$ . Par (1.22), l'évaluation de  $\hat{Q}(N, \lambda)$  se ramène à l'évaluation de sommes  $S(u, v; f)$ .

### 1.3 LES SOMMES $S(u, v; f)$

Nous démontrerons au paragraphe 3 le

THÉORÈME 2. *Soient  $u, v$  deux nombres réels satisfaisant  $7 \leq u \leq v$  et  $f$  une fonction continûment dérivable de  $[u, v]$  dans  $\mathbf{R}$ . On pose*

$$(1.23) \quad \|f\| = \|f\|_{[u, v]} = \max_{u \leq t \leq v} |f(t)|,$$

$$(1.24) \quad F(t) = \frac{f(t)}{t}$$

et

$$(1.25) \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}(u, v; f) = \|tF'(t)\| + \frac{2}{5} = \max_{u \leq t \leq v} |tF'(t)| + \frac{2}{5}.$$

Alors la somme  $S(u, v; f)$  définie en (1.21) peut s'écrire

$$(1.26) \quad S(u, v; f) = S_0(u, v; f) - S_1(u, v; f)$$

avec

$$(1.27) \quad S_0(u, v; f) = \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \frac{\rho(d)f(d)}{d}$$

où  $\rho$  est défini par (2.11) et  $S_1(u, v; f)$  satisfait l'inégalité

$$(1.28) \quad |S_1(u, v; f)| \leq \frac{19}{2}(\log v + 4)v^{7/8}\sqrt{\mathcal{M}}.$$

La démonstration du théorème 2 suit le chapitre 2 du livre de C. Hooley [11], où, pour prouver que le plus grand facteur premier de  $\prod_{n \leq x} (n^2 + 1)$  est,

pour  $x$  assez grand, supérieur à  $x^{11/10}$ , l'auteur évalue une somme voisine de  $S(u, v; x)$ . L'exposant  $11/10$  est amélioré dans [4]. Un résultat plus général est démontré dans [10], où  $n^2 + 1$  est remplacé par  $n^2 + D$ , avec  $n^2 + D$  irréductible. Ce résultat pourrait être adapté pour compter les solutions de l'équation diophantienne  $X^2 + D = Z^2 - Y^2$  dans un intervalle donné.

#### 1.4 LES SOLUTIONS $A = B$

Si l'on impose  $A = B$  dans (1.1), on a, par (1.9),  $X = Y$ , et l'équation équivalente (1.10) s'écrit

$$Z^2 - 2X^2 = 1;$$

c'est une équation de Pell-Fermat, dont les solutions sont  $X_n, Z_n$  avec  $Z_n + \sqrt{2}X_n = (3 + 2\sqrt{2})^n$ . On a

$$(1.29) \quad X_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

et, pour  $n \geq 1$ ,

$$(1.30) \quad \begin{aligned} X_n &= \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \left( \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^n \right) \\ &\geq \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \right) \geq \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n}{3}. \end{aligned}$$

Par la définition (1.20) de  $\varepsilon(N, \lambda)$ , la condition  $A = f_2(d)$  est, par (1.12), équivalente à  $A = B$ . Comme la fonction  $f_2$  définie en (1.12) est croissante, la fonction  $\varepsilon(N, \lambda)$  compte le nombre de solutions de l'équation (1.1) avec  $A = B$  telles que  $A$  soit compris entre  $f_2(u_1) = N$  et  $f_2(v_0) = A_0 < \frac{\lambda N}{\sqrt{2}}$ , par (1.17) et (1.14). On a donc, par (1.29) et (1.30)

$$(1.31) \quad 0 \leq \varepsilon(N, \lambda) = \sum_{2N \leq X_n \leq 2A_0} 1 \leq \sum_{2N \leq X_n < \lambda \sqrt{2N}} 1 \leq \frac{\log \frac{3\lambda}{4}}{\log(3 + 2\sqrt{2})} + 1$$

et, en particulier, pour  $\lambda = 2$ ,

$$(1.32) \quad 0 \leq \varepsilon(N, \lambda) \leq 1.$$

## 1.5 LES SOLUTIONS PARAMÉTRIQUES

On peut donner une représentation paramétrique des solutions de l'équation (1.10) (cf. [5], th. 38 et 39 et [6], p. 210). En effet, si  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des entiers vérifiant

$$(1.33) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

il est facile de voir que

$$(1.34) \quad \begin{cases} X = \alpha\beta + \gamma\delta, \\ Y = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2), \\ Z = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) \end{cases}$$

est une solution de (1.10).

Réiproquement, pour voir que toute solution de (1.10) est de cette forme, écrivons la décomposition en facteurs premiers  $X^2 + 1 = \prod_{j=1}^J p_j^{\alpha_j}$ , où les nombres premiers  $p_j$  sont congrus à 1 modulo 4. Dans l'anneau  $\mathcal{G}$  des entiers de Gauss (c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes  $a + bi$  où  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbf{Z}$ ), chaque  $p_j$  se factorise sous la forme  $p_j = \pi_j \bar{\pi}_j$ . Le nombre  $X + i$  se factorise dans  $\mathcal{G}$  sous la forme

$$(1.35) \quad X + i = i^k \prod_{j=1}^J \pi_j^{\alpha_j}, \quad 0 \leq k \leq 3.$$

En effet, les deux nombres  $\pi_j$  et  $\bar{\pi}_j$  ne peuvent apparaître simultanément dans (1.35), sinon  $p_j = \pi_j \bar{\pi}_j$  diviserait (dans  $\mathbf{Z}$ )  $X$  et 1, ce qui est impossible.

Soit  $d$  un diviseur de  $X^2 + 1$ . La décomposition en facteurs premiers de  $d$  s'écrit  $d = \prod_{j=1}^J p_j^{\beta_j}$  avec  $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$ . Posons

$$(1.36) \quad \Delta = i^k \prod_{j=1}^J \pi_j^{\beta_j} = \beta + i\delta, \quad \Delta' = \prod_{j=1}^J \pi_j^{\alpha_j - \beta_j} = \alpha - i\gamma.$$

On a, par (1.35),

$$(1.37) \quad X + i = \Delta\Delta' = (\beta + i\delta)(\alpha - i\gamma) = \alpha\beta + \gamma\delta + i(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

qui nous donne (1.33) et la valeur de  $X$  dans (1.34). On obtient la valeur de  $Y$  et  $Z$  dans (1.34) en prenant la norme dans (1.36):

$$d = |\Delta|^2 = \beta^2 + \delta^2, \quad \frac{X^2 + 1}{d} = |\Delta'|^2 = \alpha^2 + \gamma^2$$

et en reportant dans (1.11).

Soit  $\theta \in \mathbf{Z}$ . On pose

$$\alpha = 10\theta + 8, \quad \beta = 4\theta + 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 2.$$

On vérifie (1.33) et en substituant dans (1.34), on obtient

$$X = 40\theta^2 + 62\theta + 34, \quad Y = 42\theta^2 + 68\theta + 38, \quad Z = 58\theta^2 + 92\theta + 51$$

d'où, par (1.9),

$$(1.38) \quad A = 20\theta^2 + 31\theta + 17, \quad B = 21\theta^2 + 34\theta + 19, \quad C = 29\theta^2 + 46\theta + 25.$$

Pour  $\theta > 0$ , la solution (1.38) vérifie  $20\theta^2 \leq A$  et  $C + 1/2 \leq 29(\theta + 1)^2$ . Elle sera comptée dans  $Q(N, \lambda)$  pour  $\sqrt{\frac{N}{20}} \leq \theta \leq \sqrt{\frac{\lambda N}{29}} - 1$ . On obtient ainsi la minoration

$$(1.39) \quad Q(N, \lambda) \geq \left( \sqrt{\frac{\lambda}{29}} - \sqrt{\frac{1}{20}} \right) \sqrt{N} - 2.$$

Lorsque  $\lambda = 2$ , (1.39) entraîne, pour  $N \geq 2630 > \left(\frac{2}{0.039}\right)^2$ ,

$$(1.40) \quad Q(N, 2) \geq 0.039\sqrt{N} - 2 > 0.$$

L'inégalité (1.40) et la table 1 montrent que l'équation (1.1) a, pour tout  $k \geq 4$ , des solutions vérifiant (1.2).

## 1.6 STRUCTURE DE L'ARTICLE

Dans le § 2, nous redémontrons des résultats classiques utiles dans la suite, notamment sur la fonction arithmétique  $\rho$  (définie par (2.11)) et les sommes de Kloosterman. Nous donnons également deux algorithmes de construction de la table 1. Dans le § 3, nous démontrons le théorème 2, et dans le § 4, le théorème 1.

Nous remercions chaleureusement A. Schinzel pour nous avoir indiqué le livre de C. Hooley [11] ainsi que la solution paramétrique (1.34). Nous avons plaisir à remercier E. Fouvry, R. Heath-Brown, J. Rivat pour leurs remarques positives ainsi que l'arbitre qui a proposé une amélioration du lemme 4. Nous

remercions également les systèmes de calcul formel MAPLE [14] et PARI/GP [17] que nous avons largement utilisés, ainsi que le Max Planck Institut de Bonn où une partie des idées de cet article a été développée pendant que le deuxième auteur était invité en mai 2002.

## 2. RÉSULTATS GÉNÉRAUX

### 2.1 SOMMES DE DEUX CARRÉS

Soit  $d$  un entier positif impair. On désigne par  $\mathcal{S}_d$  l'ensemble des représentations primitives de  $d$  par la forme quadratique  $r^2 + 4s^2$ , avec  $r > 0$  et  $s \in \mathbf{Z}$  :

$$(2.1) \quad \mathcal{S}_d = \{(r, s), \quad r \in \mathbf{N}^*, \quad s \in \mathbf{Z}, \quad r^2 + 4s^2 = d, \quad (r, 2s) = 1\},$$

et par  $\mathcal{E}_d$  l'ensemble des classes d'équivalence modulo  $d$  satisfaisant la congruence  $4\nu^2 \equiv -1 \pmod{d}$  :

$$(2.2) \quad \mathcal{E}_d = \{\nu \in (\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*, \quad 4\nu^2 \equiv -1 \pmod{d}\}.$$

Nous allons redémontrer le résultat classique (cf. [19], articles 86 et 90 et [11], p. 33) :

**PROPOSITION 1.** *L'application  $\Theta$  définie par  $\Theta(r, s) = r^{-1}s \pmod{d}$ , où  $r^{-1}$  désigne l'inverse de  $r$  dans  $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$  est une bijection de  $\mathcal{S}_d$  dans  $\mathcal{E}_d$ . On peut écrire  $\nu = \Theta(r, s)$  sous la forme*

$$(2.3) \quad \frac{\nu}{d} \equiv \frac{\overline{4s}}{r} + \frac{s}{r(r^2 + 4s^2)} \pmod{1}$$

où l'on a noté  $\overline{4s}$  un inverse de  $4s$  modulo  $r$  ou bien sous la forme

$$(2.4) \quad \frac{\nu}{d} \equiv \frac{\bar{r}}{4s} - \frac{r}{4s(r^2 + 4s^2)} \pmod{1}$$

où, cette fois, nous notons  $\bar{r}$  un inverse de  $r$  modulo  $4s$ .

*Démonstration.* (i)  $\Theta$  est bien définie. Si  $r$  n'était pas premier avec  $d$ , soit  $p$  un facteur premier commun à  $r$  et  $d$ . Comme  $d$  est impair,  $p \neq 2$ , et  $p$  divise  $4s^2 = d - r^2$ , donc  $p$  divise  $s$ , et  $r$  et  $s$  ne seraient pas premiers entre eux. Ainsi  $r^{-1}$  est bien défini et  $r^2 + 4s^2 = d$  entraîne  $4s^2r^{-2} \equiv -1 \pmod{d}$  donc  $r^{-1}s \in \mathcal{E}_d$  par (2.2).

(ii)  $\Theta$  est surjective. Soit  $\nu \in \mathcal{E}_d$ . On obtient  $r$  et  $s$  tels que  $\Theta(r, s) = \nu$  par l'algorithme de Cornacchia (cf. [16], [2], [1]): on développe  $\frac{2\nu}{d}$  en fraction continue et l'on choisit la réduite  $\frac{p_n}{q_n}$  telle que  $q_n \leq \sqrt{d} < q_{n+1}$ . Les deux nombres  $R = q_n$  et  $S = 2\nu q_n - dp_n$  vérifient  $R^2 + S^2 = d$ ,  $(R, S) = 1$  et  $SR^{-1} \equiv 2\nu \pmod{d}$ .

Comme  $d = R^2 + S^2$  est impair, l'un des nombres  $R$  et  $S$  est pair, l'autre est impair. Si  $S$  est pair, on pose  $s = S/2$ ,  $r = R$ . On a  $(r, s) \in \mathcal{S}_d$  et  $\Theta(r, s) = sr^{-1} \equiv \nu \pmod{d}$ . Si  $R$  est pair, on pose  $s = -R/2$ ,  $r = S$ ; on a  $(r, s) \in \mathcal{S}_d$  et

$$\Theta(r, s) = r^{-1}s = -S^{-1}R/2 \equiv -\frac{1}{2}(2\nu)^{-1} \equiv -\frac{1}{2}(-2\nu) \equiv \nu \pmod{d}.$$

(iii)  $\Theta$  est injective. Soit deux éléments  $(r, s)$  et  $(r', s')$  de  $\mathcal{S}_d$  vérifiant  $\Theta(r, s) = \Theta(r', s')$ , c'est-à-dire

$$(2.5) \quad r's - rs' \equiv 0 \pmod{d}.$$

On a

$$(2.6) \quad d^2 = (r^2 + 4s^2)(r'^2 + 4s'^2) = (rr' + 4ss')^2 + 4(r's - rs')^2.$$

Mais (2.6) et (2.5) entraînent que  $r's - rs' = 0$  c'est-à-dire

$$(2.7) \quad \frac{s}{r} = \frac{s'}{r'} = w$$

(car  $r$  et  $r'$ , impairs, ne sont pas nuls) et l'on a

$$d = r^2 + 4s^2 = r'^2 + 4s'^2 = r^2(1 + 4w^2) = r'^2(1 + 4w^2)$$

ce qui implique  $r = r'$  puis, par (2.7),  $s = s'$ .

Il reste à prouver (2.3) et (2.4) Soit  $(r, s) \in \mathcal{S}_d$ ; comme  $(r, 2s) = 1$ , il existe  $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ , tels que

$$(2.8) \quad rz_1 - 4sz_2 = 1.$$

Posons

$$(2.9) \quad \nu = rz_2 + sz_1.$$

En prenant les modules dans la relation

$$(r + 2si)(z_1 + 2z_2i) = (rz_1 - 4sz_2) + 2(rz_2 + sz_1)i$$

on obtient

$$4\nu^2 + 1 \equiv 0 \pmod{d}.$$

Enfin, de (2.8) et (2.9), il suit

$$(2.10) \quad r\nu = r^2z_2 + s(1 + 4sz_2) = s + z_2d \equiv s \pmod{d}$$

donc  $\nu = \Theta(r, s)$ . Il vient ensuite, par (2.8) et (2.9),

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{d} &= \frac{rz_2 + sz_1}{r^2 + 4s^2} = \frac{r^2z_2 + rsz_1}{r(r^2 + 4s^2)} = \frac{s + (r^2 + 4s^2)z_2}{r(r^2 + 4s^2)} \\ &= \frac{z_2}{r} + \frac{s}{r(r^2 + 4s^2)} \equiv \frac{\bar{4}s}{r} + \frac{s}{r(r^2 + 4s^2)} \pmod{1} \end{aligned}$$

ce qui démontre (2.3). De même, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{d} &= \frac{4rsz_2 + 4s^2z_1}{4s(r^2 + 4s^2)} = \frac{-r + (r^2 + 4s^2)z_1}{4s(r^2 + 4s^2)} \\ &= \frac{z_1}{4s} - \frac{r}{4s(r^2 + 4s^2)} \equiv \frac{\bar{r}}{4s} - \frac{r}{4s(r^2 + 4s^2)} \pmod{1} \end{aligned}$$

ce qui prouve (2.4).  $\square$

Nous désignerons par  $\rho(n)$  le nombre de solutions de la congruence

$$(2.11) \quad \nu^2 \equiv -1 \pmod{n}.$$

On a pour  $p$  premier et  $\alpha \geq 1$

$$(2.12) \quad \rho(p^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2 \text{ et } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } p = 2 \text{ et } \alpha \geq 2 \\ 0 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \\ 2 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

et par le théorème des restes des chinois, la fonction arithmétique  $\rho$  est multiplicatif. Par la proposition 1, pour  $d$  impair, on a

$$(2.13) \quad \rho(d) = \text{Card}(\mathcal{E}_d) = \text{Card}(\mathcal{S}_d).$$

## 2.2 CONSTRUCTION DE LA TABLE

Une première méthode consiste à utiliser la formule (1.15). Par (1.14), on a

$$(2.14) \quad N \leq A \leq A_0 = \sqrt{\frac{\lambda^2 N^2}{2} - \frac{1}{8}}.$$

Pour chaque valeur de  $A$  vérifiant l'inégalité (2.14), on factorise  $4A^2 + 1$ , et l'on recherche ses diviseurs. Pour chaque diviseur  $d$  de  $4A^2 + 1$ , on calcule

$B$  et  $C$  par (1.11) et si (1.3) est satisfaite, on compte cette solution. Cette méthode a pour inconvénient la factorisation de  $4A^2 + 1$  qui, pour  $A$  grand, devient coûteuse.

Un meilleur algorithme est basé sur la proposition 1. Par une remarque déjà faite juste après (1.11), les facteurs premiers de  $d$ , diviseur de  $4A^2 + 1$ , sont tous congrus à 1 modulo 4, ce qui implique par (2.12), que  $\rho(d) > 0$ . Par la proposition 1 et (2.13), il s'ensuit que  $d$  admet  $\rho(d)$  représentations primitives

$$(2.15) \quad d = r^2 + 4s^2, \quad (r, 2s) = 1, \quad r \geq 1, \quad s \in \mathbf{Z}.$$

Par (1.18), on sait que  $d$  est compris entre  $u_0$ , défini par (1.16), et  $v_0$ , défini par (1.14). Par une double boucle en  $r$  et  $s$ , on engendre les nombres  $d$  de la forme (2.15) et vérifiant  $u_0 \leq d \leq v_0$ . Observons que chaque  $d$  va être engendré  $\rho(d)$  fois.

Ensuite, pour chaque valeur du couple  $(r, s)$ , on calcule  $\nu$  par (2.8) et (2.9) et l'on recherche les nombres  $A$  satisfaisant  $A \equiv \nu \pmod{d}$  et (2.14). (Notons que, pour  $\lambda = 2$ , il y a au plus un tel  $A$  car, par (1.16),  $d \geq u_0 > \sqrt{2N^2 - 1/8} - N$ .) Comme dans la première méthode, à partir de  $A$  et  $d$ , on calcule  $B$  et  $C$  par (1.11) et on incrémente le compteur de solutions si (1.3) est satisfaite.

Cet algorithme est linéaire en  $N$ . Il a été implémenté en PARI/C. Le temps d'exécution est de moins d'une seconde pour  $2^{20}$ , d'une dizaine de minutes pour  $2^{30}$  et de plus de deux semaines pour  $2^{41}$ .

### 2.3 LEMMES ANALYTIQUES

LEMME 1. Soit  $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ . Pour tout  $x \geq 1$ , on a

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \tau(n) \leq x(\log x + 1).$$

*Démonstration.* On a

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \tau(n) = \sum_{1 \leq n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d \leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \leq x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d}.$$

Puis on utilise l'inégalité

$$(2.16) \quad \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{t} = 1 + \log x. \quad \square$$

TABLE 1

$k$	$N = 2^k$	$Q(N, 2)$	$Q(N, 2)/N$	$Q(N, 2) - \alpha(2)N$
4	16	1	0.06250000	0.55
5	32	2	0.06250000	1.10
6	64	2	0.03125000	0.21
7	128	3	0.02343750	-0.59
8	256	7	0.02734075	-0.17
9	512	21	0.04101062	6.66
10	1024	29	0.02832031	0.31
11	2048	60	0.02929688	2.62
12	4096	122	0.02978516	7.25
13	8192	245	0.02990723	15.49
14	16384	460	0.02807617	0.99
15	32768	944	0.02880859	25.98
16	65536	1806	0.02755737	-30.05
17	131072	3639	0.02776337	-33.10
18	262144	7347	0.02802658	2.81
19	524288	14756	0.02814484	67.61
20	1048576	29576	0.02820587	199.23
21	2097152	58698	0.02798939	-55.55
22	4194304	117372	0.02798367	-135.09
23	8388608	235082	0.02802396	67.81
24	16777216	470241	0.02802855	212.62
25	33554432	939804	0.02800834	-252.76
26	67108864	1880297	0.02801861	183.48
27	134217728	3761402	0.02802463	1174.97
28	268435456	7521153	0.02801844	698.94
29	536870912	15040659	0.02801541	-249.12
30	1073741824	30080525	0.02801467	-1291.25
31	2147483648	60153965	0.02801137	-9667.50
32	4294967296	120332158	0.02801701	4893.01
33	8589934592	240660303	0.02801655	5773.02
34	17179869184	481315101	0.02801622	6041.03
35	34359738368	962578706	0.02801473	-39413.94
36	68719476736	1925208869	0.02801547	-27370.87
37	137438953472	3850396279	0.02801532	-76200.75
38	274877906944	7701008772	0.02801610	63812.49
39	549755813888	15401833428	0.02801577	-56491.01
40	1099511627776	30803795356	0.02801589	15517.96
41	2199023255552	61607438724	0.02801582	-120952.07

LEMME 2. Soit  $h$  un nombre entier non nul et  $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ . Pour tout  $x \geq 1$ , on a

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \tau(n) \{(h, n)\}^{1/2} \leq x(\log x + 1)\psi(h)$$

où  $\psi(h)$  est défini par

$$(2.17) \quad \psi(h) = \sum_{d|h} \frac{\tau(d)}{\sqrt{d}}.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité  $\tau(dd') \leq \tau(d)\tau(d')$ , valable pour tout couple d'entiers  $d$  et  $d'$  et le lemme 1, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} \tau(n) \{(h, n)\}^{1/2} &\leq \sum_{d|h} \sqrt{d} \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} \tau(n) \leq \sum_{d|h} \sqrt{d} \tau(d) \sum_{d' \leq x/d} \tau(d') \\ &\leq \sum_{d|h} \frac{\tau(d)}{\sqrt{d}} x \left( \log \left( \frac{x}{d} \right) + 1 \right) \leq x(\log x + 1)\psi(h). \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 3. Soit  $\psi(h)$  défini par (2.17). Pour tout  $x \geq 1$ , on a

$$\sum_{1 \leq h \leq x} \psi(h) \leq 7x.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{1 \leq h \leq x} \psi(h) = \sum_{1 \leq h \leq x} \sum_{d|h} \frac{\tau(d)}{\sqrt{d}} = \sum_{d \leq x} \frac{\tau(d)}{\sqrt{d}} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \leq x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tau(d)}{d^{3/2}} = x\zeta(3/2)^2$$

et  $\zeta(3/2)^2 = 6.8245 \dots$   $\square$

LEMME 4. Soit  $r(n)$  le nombre de façons d'écrire  $n$  comme somme de deux carrés. Pour tout  $x$  réel,  $x \geq 1$ , on a

$$\sum_{1 \leq n \leq x} r(n) = \pi x + \widehat{R}_1(x) \quad \text{avec } |\widehat{R}_1(x)| \leq 4\sqrt{x} + 3.$$

Démonstration. Le théorème 341 de [9] donne

$$\sum_{1 \leq n \leq x} r(n) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\lfloor \frac{x}{2k+1} \right\rfloor.$$

Par le critère des sommes alternées, en choisissant  $K$  pair et  $K'$  impair, on a

$$(2.18) \quad 4 \sum_{k=0}^{K'} (-1)^k \left\lfloor \frac{x}{2k+1} \right\rfloor \leq \sum_{1 \leq n \leq x} r(n) \leq 4 \sum_{k=0}^K (-1)^k \left\lfloor \frac{x}{2k+1} \right\rfloor.$$

Remplaçons la partie entière par son expression en fonction du polynôme de Bernoulli  $B_1(t) = t - \lfloor t \rfloor - 1/2$ ; en utilisant à nouveau le critère des sommes alternées et la majoration  $|B_1(t)| \leq 1/2$ , il vient

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^K (-1)^k \left\lfloor \frac{x}{2k+1} \right\rfloor &= \sum_{k=0}^K (-1)^k \left( \frac{x}{2k+1} - B_1 \left( \frac{x}{2k+1} \right) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x}{2k+1} + \sum_{k=0}^K (-1)^{k+1} B_1 \left( \frac{x}{2k+1} \right) \\ &\leq \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{x}{2K+3} + \frac{K+1}{2} = \frac{\pi}{4}x + \frac{x}{2K+3} + \frac{K}{2}. \end{aligned}$$

En choisissant  $K = 2 \lfloor \sqrt{x}/2 + 1/4 \rfloor$  de telle sorte que  $2K+3 \geq 4(\sqrt{x}/2 + 1/4 - 1) + 3 = 2\sqrt{x}$ , (2.19) donne

$$(2.20) \quad \sum_{k=0}^K (-1)^k \left\lfloor \frac{x}{2k+1} \right\rfloor \leq \frac{\pi}{4}x + \sqrt{x} + 1/4.$$

En choisissant  $K' = 2 \lfloor \sqrt{x}/2 + 3/4 \rfloor - 1$ , on montre similairement

$$(2.21) \quad \sum_{k=0}^{K'} (-1)^k \left\lfloor \frac{x}{2k+1} \right\rfloor \geq \frac{\pi}{4}x - \frac{x}{2K'+3} - \frac{K'+1}{2} \geq \frac{\pi}{4}x - \sqrt{x} - 3/4,$$

et le lemme résulte de (2.18), (2.20) et (2.21).

W. Sierpiński a amélioré la majoration de  $|\widehat{R}_1(x)|$ , cf. [18]. Le record est actuellement détenu par [12].  $\square$

LEMME 5. *Soit  $\rho$  la fonction multiplicative définie par (2.11) et (2.12). Alors, pour tout  $x \geq 1$ , on a*

$$(i) \quad \Upsilon(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \rho(n) = \frac{3}{2\pi}x + \widehat{R}_2(x) \quad \text{avec} \quad |\widehat{R}_2(x)| \leq \left( \frac{\log x + 7}{2} \right) \sqrt{x},$$

$$(ii) \quad \Upsilon^*(x) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \text{ impair}}} \rho(n) = \frac{1}{\pi}x + \widehat{R}_3(x) \quad \text{avec} \quad |\widehat{R}_3(x)| \leq (2 \log x + 12) \sqrt{x},$$

et pour  $x \geq 7$ , on a

$$(iii) \quad \Upsilon^*(x) \leq \frac{3x}{7}.$$

*Démonstration.* (i) On sait que la fonction  $\frac{1}{4}r(n)$  définie dans le lemme 4 est multiplicative et que  $\frac{1}{4}r(2^\alpha) = 1$  si  $\alpha \geq 1$ ,  $\frac{1}{4}r(p^\alpha) = 0$  si  $p \equiv 3 \pmod{4}$  et  $\alpha$  impair,  $\frac{1}{4}r(p^\alpha) = 1$  si  $p \equiv 3 \pmod{4}$  et  $\alpha$  pair,  $\frac{1}{4}r(p^\alpha) = \alpha + 1$  si  $p \equiv 1 \pmod{4}$  (cf. [9], théorème 278).

Désignons par  $\mu$  la fonction de Möbius. Un raisonnement classique montre que la fonction  $\frac{1}{4} \sum_{d^2|n} \mu(d)r(n/d^2)$  est également multiplicative et que sa valeur sur les puissances de nombres premiers coïncide avec celle de  $\rho$ . On a donc

$$\rho(n) = \frac{1}{4} \sum_{d^2|n} \mu(d)r(n/d^2).$$

Par le lemme 4, on a

$$\begin{aligned} \Upsilon(x) &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{4} \sum_{d^2|n} \mu(d)r(n/d^2) = \frac{1}{4} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \mu(d) \sum_{d' \leq x/d^2} r(d') \\ &= \frac{1}{4} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \mu(d) \left( \pi \frac{x}{d^2} + \widehat{R}_1 \left( \frac{x}{d^2} \right) \right) = \frac{3x}{2\pi} + \widehat{R}_2(x) \end{aligned}$$

avec

$$\widehat{R}_2(x) = -\frac{\pi x}{4} \sum_{d > \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{1}{4} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \widehat{R}_1 \left( \frac{x}{d^2} \right).$$

Par le lemme 4 et (2.16), on obtient

$$\begin{aligned} |\widehat{R}_2(x)| &\leq \frac{\pi x}{4} \left( \frac{1}{x} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right) + \frac{1}{4} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \left( 4 \frac{\sqrt{x}}{d} + 3 \right) \\ &\leq \frac{\pi \sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} \left( 1 + \frac{1}{2} \log x \right) + \frac{3}{4} \sqrt{x} \leq \left( \frac{\log x + 7}{2} \right) \sqrt{x}. \end{aligned}$$

(ii) Compte tenu de la valeur de  $\rho(2^\alpha)$  dans (2.12), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \text{ pair}}} \rho(n) &= \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \equiv 2 \pmod{4}}} \rho(n) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x/2 \\ n \text{ impair}}} \rho(n) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x/2} \rho(n) - \sum_{\substack{1 \leq n \leq x/2 \\ n \text{ pair}}} \rho(n). \end{aligned}$$

En réitérant l'argument, on obtient

$$\Upsilon^*(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \Upsilon \left( \frac{x}{2^j} \right),$$

où  $k$  est l'entier défini par  $2^k \leq x < 2^{k+1}$ . En appliquant (i), il vient

$$Y^*(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \left( \frac{3x}{2^{j+1}\pi} + \widehat{R}_2 \left( \frac{x}{2^j} \right) \right) = \frac{x}{\pi} + \widehat{R}_3(x)$$

avec

$$\widehat{R}_3(x) = -\frac{3}{2\pi} \sum_{j=k+1}^{+\infty} (-1)^j \frac{x}{2^j} + \sum_{j=0}^k (-1)^j \widehat{R}_2 \left( \frac{x}{2^j} \right).$$

On a

$$\begin{aligned} |\widehat{R}_3(x)| &\leq \frac{3}{2\pi} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{2^j}} + \left( \frac{\log x + 7}{2} \right) \sum_{j=0}^k \sqrt{\frac{x}{2^j}} \leq \left( \frac{\log x + 7}{2} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\frac{x}{2^j}} \\ &= (2 + \sqrt{2}) \left( \frac{\log x + 7}{2} \right) \sqrt{x} \leq (2 \log x + 12) \sqrt{x}. \end{aligned}$$

(iii) La fonction  $\frac{2 \log t + 12}{\sqrt{t}}$  est décroissante pour  $t \geq 1$  et elle est inférieure à  $1/10$  pour  $t \geq 130000$ ; (iii) résulte donc de (ii) pour  $x \geq 130000$ . Le calcul numérique de  $Y^*(x)$  pour  $x$  entier inférieur à 130000 complète la preuve de (iii).  $\square$

LEMME 6. Soient deux nombres réels  $u$  et  $v$  satisfaisant  $1 \leq u \leq v$ . Soit  $F$  une fonction continûment dérivable de  $[u, v]$  dans  $\mathbf{R}$ , et  $\rho$  défini par (2.11). On pose  $\|F\| = \|F\|_{[u, v]} = \max_{u \leq t \leq v} |F(t)|$ . Alors on a

$$\sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \rho(d) F(d) = \frac{1}{\pi} \int_u^v F(t) dt + \widehat{R}_0(u, v; F)$$

avec

$$|\widehat{R}_0(u, v; F)| \leq (2 \log v + 12) \sqrt{v} \left( 2\|F\| + \frac{2}{3}v\|F'\| \right).$$

Démonstration. Par le lemme 5 (ii), on a, en utilisant l'intégrale de Stieltjes,

$$\sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \rho(d) F(d) = \int_{u^-}^v F(t) d[Y^*(t)] = \frac{1}{\pi} \int_u^v F(t) dt + \widehat{R}_0(u, v; F)$$

avec, par intégration par parties,

$$\widehat{R}_0(u, v; F) = \int_{u^-}^v F(t) d[\widehat{R}_3(t)] = F(v)\widehat{R}_3(v) - F(u)\widehat{R}_3(u) - \int_u^v F'(t)\widehat{R}_3(t) dt$$

et

$$|\widehat{R}_0(u, v; F)| \leq 2\|F\|(2 \log v + 12) \sqrt{v} + \|F'\|(2 \log v + 12) \int_u^v \sqrt{t} dt$$

et comme  $\int_u^v \sqrt{t} dt \leq \int_0^v \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}v^{3/2}$  cela achève la preuve du lemme 6.

## 2.4 SOMMES DE KLOOSTERMAN

Soit  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $b \in \mathbf{Z}$  et  $m$  un entier positif. Si  $\ell$  est premier avec  $m$ , on notera  $\bar{\ell}$  un entier vérifiant  $\ell\bar{\ell} \equiv 1 \pmod{m}$ . La somme de Kloosterman  $K(a, b; m)$  est définie par

$$(2.22) \quad K(a, b; m) = \sum_{\substack{0 < \ell \leq m \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi(a\ell + b\bar{\ell})}{m}.$$

Grâce aux travaux de A. Weil, on sait majorer cette somme, et l'on a l'inégalité (cf. [21], [11], p. 35 ou [13], p. 61)

$$(2.23) \quad |K(a, b; m)| \leq \tau(m)\sqrt{m}\{(a, b, m)\}^{1/2}, \quad a, b, m \in \mathbf{Z}, m \geq 1,$$

où  $\tau(m) = \sum_{d|m} 1$  désigne le nombre de diviseurs de  $m$  et  $(a, b, m)$  le pgcd des trois nombres  $a, b$  et  $m$ . On peut déduire de (2.23) une majoration de la somme de Kloosterman incomplète :

LEMME 7 (cf. [11], Lemma 6, p. 36 et [3], p. 433). *Soit  $m \geq 1$  un entier, et  $b \in \mathbf{Z}$ . Soit  $\xi$  et  $\xi'$  deux nombres entiers vérifiant  $1 \leq \xi \leq m$  et  $1 \leq \xi' \leq m$ . On a*

$$(2.24) \quad \left| \sum_{\substack{\xi \leq \ell \leq \xi' \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi b\bar{\ell}}{m} \right| \leq \tau(m)\sqrt{m}\{(b, m)\}^{1/2}\gamma(m)$$

où

$$(2.25) \quad \gamma(m) = 1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{4m}{\pi} = 1.153\dots + 0.6366\dots \log m.$$

*Démonstration.* Si  $\xi' < \xi$ , la somme dans (2.24) est nulle et le lemme est démontré; on peut donc supposer  $\xi \leq \xi'$ .

En observant que le crochet ci-dessous vaut 1 si  $n \equiv \ell \pmod{m}$  (ce qui équivaut à  $n = \ell$ ) et 0 sinon, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\xi \leq \ell \leq \xi' \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi b\bar{\ell}}{m} &= \sum_{\substack{0 < \ell \leq m \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi b\bar{\ell}}{m} \sum_{\substack{\xi \leq n \leq \xi' \\ 1 \leq a \leq m}} \left[ \frac{1}{m} \sum_{1 \leq a \leq m} e^{\frac{2i\pi a(n-\ell)}{m}} \right] \\ &= \sum_{1 \leq a \leq m} K(-a, b; m) \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\xi \leq n \leq \xi'} \exp \frac{2i\pi an}{m} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant (2.23), entraîne

$$(2.26) \quad \left| \sum_{\substack{\xi \leq \ell \leq \xi' \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi b\bar{\ell}}{m} \right| \leq \tau(m) \sqrt{m} \{(b, m)\}^{1/2} \sum_{1 \leq a \leq m} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{\xi \leq n \leq \xi'} \exp \frac{2i\pi an}{m} \right\}.$$

La quantité dans l'accolade vaut, pour  $a = m$ ,  $|\xi' - \xi + 1|/m \leq 1$ , et pour  $1 \leq a < m$ , elle vaut

$$\left| \frac{\exp \frac{2i\pi a\xi}{m} - \exp \frac{2i\pi a(\xi'+1)}{m}}{m (\exp \frac{2i\pi a}{m} - 1)} \right| \leq \frac{1}{m \sin \frac{\pi a}{m}}.$$

La somme en  $a$  de (2.26) est donc majorée par

$$(2.27) \quad 1 + \frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi a}{m}}.$$

Mais une fonction  $f$  convexe sur l'intervalle  $[a - 1/2, a + 1/2]$  satisfait  $f(a) \leq \int_{a-1/2}^{a+1/2} f(t) dt$ . En remarquant que la fonction  $t \rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi t}{m}}$  est convexe sur l'intervalle  $[1/2, m - 1/2]$ , on a

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \sum_{a=1}^{m-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi a}{m}} &\leq \int_{1/2}^{m-1/2} \frac{1}{\sin \frac{\pi t}{m}} dt = \frac{m}{\pi} \left[ \log \tan \frac{\pi t}{2m} \right]_{1/2}^{m-1/2} \\ &= \frac{2m}{\pi} \log \cot \frac{\pi}{4m} \leq \frac{2m}{\pi} \log \frac{4m}{\pi} \end{aligned}$$

et (2.24) résulte de (2.26), (2.27) et (2.28).  $\square$

LEMME 8 (cf. [11], p. 38). *Nous conservons les notations du lemme 7. Soit une fonction complexe  $\Phi(t)$  continûment dérivable définie sur l'intervalle réel  $[0, m]$ . On suppose que, pour tout  $t \in [0, m]$ , on a  $|\Phi(t)| \leq M_0$  et  $|\Phi'(t)| \leq M_1$ . Alors, on a*

$$\left| \sum_{\substack{\xi \leq \ell \leq \xi' \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi b\bar{\ell}}{m} \Phi(\ell) \right| \leq \tau(m) \sqrt{m} \{(b, m)\}^{1/2} \gamma(m) [|\xi' - \xi| M_1 + M_0].$$

*Démonstration.* Comme dans le lemme 7, nous pouvons supposer  $\xi \leq \xi'$ . Il est commode de poser, pour  $0 \leq t \leq m$ ,

$$(2.29) \quad g(t) = \sum_{\substack{\xi \leq \ell \leq t \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi b\bar{\ell}}{m}$$

et, par le lemme 7, on a

$$(2.30) \quad |g(t)| \leq \tau(m)\sqrt{m}\{(b, m)\}^{1/2}\gamma(m).$$

Par la méthode de la sommation d'Abel, on écrit :

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{\xi \leq \ell \leq \xi' \\ (\ell, m) = 1}} \exp \frac{2i\pi b\bar{\ell}}{m} \Phi(\ell) &= g(\xi)\Phi(\xi) + \sum_{\ell=\xi+1}^{\xi'} (g(\ell) - g(\ell-1))\Phi(\ell) \\ &= \sum_{\ell=\xi}^{\xi'-1} g(\ell)(\Phi(\ell) - \Phi(\ell+1)) + g(\xi')\Phi(\xi'). \end{aligned}$$

On applique le théorème des accroissements finis à  $\Phi(\ell+1) - \Phi(\ell)$ , et le lemme suit de (2.31) et (2.30).  $\square$

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

#### 3.1 LE POLYNÔME DE BERNOULLI

Soit  $d \neq 1$  un nombre impair; avec la définition de  $\mathcal{E}_d$  donnée par (2.2), en choisissant  $\nu$  entre 1 et  $d-1$ , on a

$$(3.1) \quad \sum_{\substack{1 \leq A \leq f(d) \\ 4A^2 \equiv -1 \pmod{d}}} 1 = \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} \sum_{\substack{1 \leq A \leq f(d) \\ A \equiv \nu \pmod{d}}} 1 = \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} \left( \left\lfloor \frac{f(d) - \nu}{d} \right\rfloor + 1 \right).$$

On remplace dans (3.1) la partie entière par son expression en fonction du polynôme de Bernoulli :  $B_1(t) = t - \lfloor t \rfloor - 1/2$ ; il vient

$$(3.2) \quad \sum_{\substack{1 \leq A \leq f(d) \\ 4A^2 \equiv -1 \pmod{d}}} 1 = \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} \left( -B_1\left(\frac{f(d) - \nu}{d}\right) + \frac{f(d)}{d} - \frac{\nu}{d} + \frac{1}{2} \right).$$

En associant les deux éléments  $\nu$  et  $d-\nu$  de  $\mathcal{E}_d$  (qui sont distincts, car  $d$  est impair), les deux derniers termes de (3.2) disparaissent, et, par (2.13), on obtient

$$(3.3) \quad \sum_{\substack{1 \leq A \leq f(d) \\ 4A^2 \equiv -1 \pmod{d}}} 1 = \frac{f(d)\rho(d)}{d} - \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} B_1\left(\frac{f(d) - \nu}{d}\right).$$

On peut ainsi écrire (1.26) où  $S_0(u, v; f)$  a été défini en (1.27) et

$$(3.4) \quad S_1(u, v; f) = \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} B_1\left(\frac{f(d) - \nu}{d}\right).$$

Il nous faut maintenant majorer  $|S_1(u, v; f)|$ .

### 3.2 LA FORMULE DE J. VAALER

Pour majorer  $S_1(u, v; f)$  nous commençons par approcher la fonction  $B_1(t)$  par un polynôme trigonométrique. Nous noterons  $e(t) = e^{2i\pi t}$ , et nous utiliserons le lemme ci-dessous de J. Vaaler.

LEMME 9. *Soit  $\omega \in \mathbf{N}$ ,  $h \in \mathbf{Z}$ ,  $1 \leq |h| \leq \omega$  et*

$$(3.5) \quad 0 < b_\omega(h) \stackrel{\text{def}}{=} \pi \frac{|h|}{\omega+1} \left(1 - \frac{|h|}{\omega+1}\right) \cot\left(\pi \frac{|h|}{\omega+1}\right) + \frac{|h|}{\omega+1} < 1.$$

Alors, en posant

$$(3.6) \quad B_\omega^*(t) = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} \frac{b_\omega(h)}{h} e(ht)$$

on peut écrire

$$(3.7) \quad B_1(t) = B_\omega^*(t) + R_\omega^*(t)$$

avec, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$(3.8) \quad |R_\omega^*(t)| \leq \frac{1}{2\omega+2} \sum_{0 \leq |h| \leq \omega} \left(1 - \frac{|h|}{\omega+1}\right) e(ht) = \frac{\sin^2 \pi(\omega+1)t}{2(\omega+1)^2 \sin^2 \pi t}.$$

*Démonstration.* Pour  $t \notin \mathbf{Z}$ , (3.8) est l'inégalité (7.14) de Vaaler (cf. [20], cf. aussi le théorème A.6 de [7] et [8]). Pour  $t \in \mathbf{Z}$ , les deux membres de (3.8) sont égaux à  $1/2$ , et le résultat est encore vrai.  $\square$

En utilisant (3.7), pour une valeur de  $\omega$  que l'on précisera plus tard, (3.4) devient

$$(3.9) \quad S_1(u, v; f) = S_2(u, v; f) + S_3(u, v; f)$$

avec, par (3.6),

$$(3.10) \quad \begin{aligned} S_2(u, v; f) &= \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} B_\omega^*\left(\frac{f(d) - \nu}{d}\right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} \frac{b_\omega(h)}{h} \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} e\left(\frac{hf(d)}{d}\right) \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} e\left(-\frac{h\nu}{d}\right) \end{aligned}$$

et

$$(3.11) \quad S_3(u, v; f) = \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} R_\omega^*\left(\frac{f(d) - \nu}{d}\right).$$

Par (3.8), on a

$$(3.12) \quad |S_3(u, v; f)| \leq S_4(u, v; f)$$

en posant

$$(3.13) \quad S_4(u, v; f) = \frac{1}{2\omega + 2} \sum_{0 \leq |h| \leq \omega} \left(1 - \frac{|h|}{\omega + 1}\right) \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} e\left(\frac{hf(d)}{d}\right) \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} e\left(-\frac{h\nu}{d}\right).$$

Il est commode de poser, pour  $h \neq 0$ ,

$$(3.14) \quad P = P(h, u, v, f) = \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} e\left(\frac{hf(d)}{d}\right) \sum_{\nu \in \mathcal{E}_d} e\left(-\frac{h\nu}{d}\right)$$

de telle sorte que (3.10) et (3.13) deviennent

$$(3.15) \quad S_2(u, v; f) = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} \frac{b_\omega(h)}{h} P(h, u, v, f)$$

et

$$(3.16) \quad S_4(u, v; f) = \frac{1}{2\omega + 2} \left( \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \rho(d) + \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} \left(1 - \frac{|h|}{\omega + 1}\right) P(h, u, v, f) \right).$$

Il nous faut maintenant majorer  $|P(h, u, v, f)|$ .

### 3.3 EVALUATION DE $P(h, u, v, f)$

Pour évaluer  $P(h, u, v, f)$ , nous utiliserons la bijection  $\Theta$  entre  $\mathcal{S}_d$  et  $\mathcal{E}_d$  étudiée dans la proposition 1. Par cette bijection, on déduit de (3.14)

$$(3.17) \quad P(h, u, v, f) = \sum_{\substack{u \leq r^2 + 4s^2 \leq v \\ r \text{ impair}, r > 0, (r, s) = 1}} e\left(\frac{hf(r^2 + 4s^2)}{r^2 + 4s^2} - \frac{\nu h}{r^2 + 4s^2}\right)$$

où  $\nu = \Theta(r, s)$  est donné par l'une des formules (2.3) ou (2.4). Nous coupons la somme (3.17) en quatre parties suivant que  $|s| < r$  ou  $|s| > r$  et  $s > 0$  ou  $s < 0$ . (Remarquons que  $|s| = r$  ou  $s = 0$  entraînerait  $r = (r, s) = 1$  ce qui est incompatible avec  $r^2 + 4s^2 \geq u$ , pour  $u > 5$ .) Ainsi dans la somme  $P_1$ , on impose  $1 \leq s < r$  ce qui entraîne

$$u \leq r^2 + 4s^2 < 5r^2 \quad \text{et} \quad r^2 < r^2 + 4s^2 \leq v$$

et encore

$$(3.18) \quad \sqrt{u/5} < r < \sqrt{v};$$

pour  $r$  fixé dans l'intervalle (3.18), les inégalités  $u \leq r^2 + 4s^2 \leq v$  et  $1 \leq s < r$  entraînent l'existence (cf. Fig. 2) de deux nombres entiers  $\xi_1 = \xi_1(r)$  et  $\xi'_1 = \xi'_1(r)$  vérifiant  $1 \leq \xi_1 \leq r - 1$  et  $1 \leq \xi'_1 \leq r - 1$  et tels que

$$u \leq r^2 + 4s^2 \leq v \quad \text{et} \quad 1 \leq s < r \iff \xi_1 \leq s \leq \xi'_1.$$

Les valeurs de  $\xi_1$  et  $\xi'_1$  sont données par :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 \quad \text{si } r \geq \sqrt{u} \quad \text{et} \quad \xi_1 = \left\lceil \sqrt{\frac{u-r^2}{4}} \right\rceil \quad \text{si } r < \sqrt{u} \\ \xi'_1 &= r-1 \quad \text{si } r \leq \sqrt{\frac{v}{5}} \quad \text{et} \quad \xi'_1 = \left\lfloor \sqrt{\frac{v-r^2}{4}} \right\rfloor \quad \text{si } r > \sqrt{\frac{v}{5}}. \end{aligned}$$

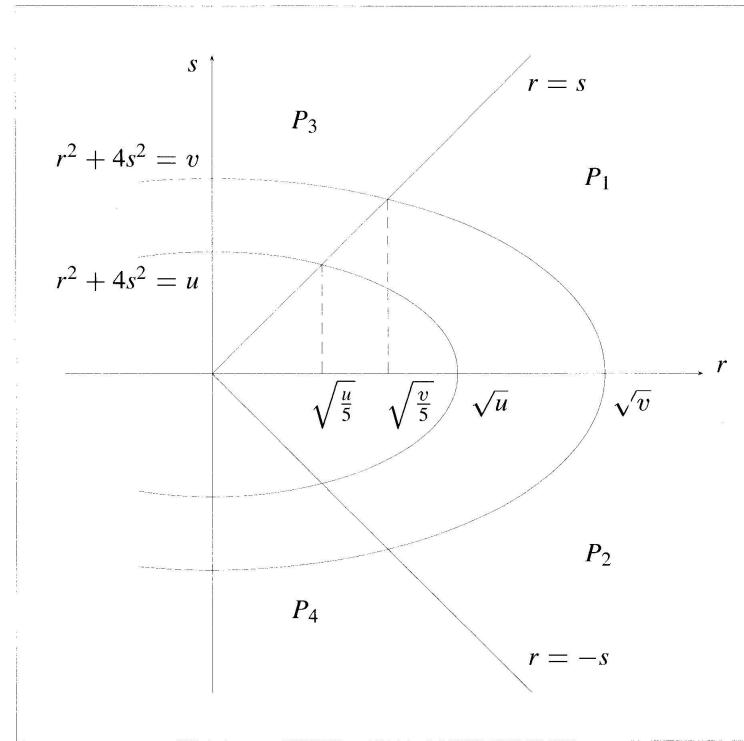


FIGURE 2  
Découpage en quatre zones

On a ainsi à partir de (3.17) et (2.3)

$$(3.19) \quad P_1 = P_1(h, u, v, f) = \sum_{\substack{\sqrt{u/5} < r < \sqrt{v} \\ r \text{ impair}}} \sum_{\substack{\xi_1 \leq s \leq \xi'_1 \\ (r, s) = 1}} e\left(\frac{-h\bar{4}\bar{s}}{r}\right) \Phi_1(s)$$

avec, par (1.24),

$$\Phi_1(s) = \exp\left(2i\pi hF(r^2 + 4s^2) - \frac{2i\pi hs}{r(r^2 + 4s^2)}\right).$$

On calcule la dérivée logarithmique de  $\Phi_1$  :

$$\frac{\Phi'_1}{\Phi_1}(s) = \frac{2i\pi h}{r}\left(8rsF'(r^2 + 4s^2) - \frac{r^2 - 4s^2}{(r^2 + 4s^2)^2}\right)$$

et l'on a, en observant que  $|r^2 - 4s^2| \leq r^2 + 4s^2$  et  $4|rs| \leq r^2 + 4s^2$ ,

$$|\Phi'_1(s)| = \left|\frac{\Phi'_1}{\Phi_1}(s)\right| \leq \frac{2\pi|h|}{r}\left(2(r^2 + 4s^2)|F'(r^2 + 4s^2)| + \frac{1}{u}\right).$$

On pose  $b = -h\bar{4}$ , où, rappelons-le,  $\bar{4}$  est un inverse de 4 modulo  $r$ . On a  $(b, r) = (h, r)$  (car  $r$  est impair),  $|\xi'_1 - \xi_1| \leq r$  et le lemme 8 donne

$$\left|\sum_{\substack{\xi_1 \leq s \leq \xi'_1 \\ (r, s)=1}} e\left(\frac{-h\bar{4}s}{r}\right) \Phi_1(s)\right| \leq \tau(r)\sqrt{r}\{(h, r)\}^{1/2}\gamma(r)M(h, r)$$

avec, par (1.23),

$$M(h, r) = 2\pi|h|\left(2\|tF'(t)\| + \frac{1}{u}\right) + 1.$$

En notant que  $u \geq 7$  et en utilisant (1.25), il vient

$$M(h, r) \leq 4\pi|h|\left(\|tF'(t)\| + \frac{1}{2u} + \frac{1}{4\pi}\right) \leq 4\pi|h|\mathcal{M}.$$

En reportant dans (3.19) on obtient

$$(3.20) \quad |P_1| \leq 4\pi|h|\mathcal{M} \sum_{\substack{\sqrt{u/5} < r < \sqrt{v} \\ r \text{ impair}}} \tau(r)\sqrt{r}\{(h, r)\}^{1/2}\gamma(r).$$

Dans la somme  $P_2$ , on met les termes de (3.17) avec  $-r < s \leq -1$ . On a

$$(3.21) \quad \begin{aligned} P_2 = P_2(h, u, v, f) &= \sum_{\substack{\sqrt{u/5} < r < \sqrt{v} \\ r \text{ impair}}} \sum_{\substack{-\xi'_1 \leq s \leq -\xi_1 \\ (r, s)=1}} e\left(\frac{-h\bar{4}s}{r}\right) \Phi_1(s) \\ &= \sum_{\substack{\sqrt{u/5} < r < \sqrt{v} \\ r \text{ impair}}} \sum_{\substack{\xi_1 \leq s \leq \xi'_1 \\ (r, s)=1}} e\left(\frac{h\bar{4}s}{r}\right) \Phi_1(-s). \end{aligned}$$

Par application du lemme 8, on trouve pour  $|P_2|$  la même majoration que pour  $|P_1|$ , et l'on a, par (3.20) :

$$(3.22) \quad |P_1| + |P_2| \leq 8\pi|h|\mathcal{M} \sum_{\substack{\sqrt{u/5} < r < \sqrt{v} \\ r \text{ impair}}} \tau(r) \sqrt{r} \{(h, r)\}^{1/2} \gamma(r).$$

La somme  $P_3$  contient les termes de la somme (3.17), avec  $\nu$  donné par (2.4), satisfaisant  $1 \leq r < s$ . Il existe deux nombres entiers  $\xi_3$  et  $\xi'_3$  tels que

$$(3.23) \quad 1 \leq \xi_3 \leq s \quad \text{et} \quad 1 \leq \xi'_3 \leq s$$

tels que

$$(3.24) \quad P_3 = P_3(h, u, v, f) = \sum_{\substack{\sqrt{u/5} < s < \frac{\sqrt{v}}{2} \\ (r, 4s)=1}} \sum_{\substack{\xi_3 \leq r \leq \xi'_3 \\ (r, 4s)=1}} e\left(\frac{-h\bar{r}}{4s}\right) \Phi_3(r)$$

avec

$$\Phi_3(r) = \exp\left(2i\pi hF(r^2 + 4s^2) + \frac{i\pi hr}{2s(r^2 + 4s^2)}\right).$$

On a comme précédemment,

$$|\Phi'_3(r)| = \left| \frac{\Phi'_3(r)}{\Phi_3(r)} \right| \leq \frac{\pi|h|}{s} \left( (r^2 + 4s^2) |F'(r^2 + 4s^2)| + \frac{1}{2u} \right).$$

On applique le lemme 8 avec  $m = 4s$  et  $b = -h$  ; par (3.23), on a  $|\xi'_3 - \xi_3| \leq s$  et il s'ensuit

$$\left| \sum_{\substack{\xi_3 \leq r \leq \xi'_3 \\ (r, 4s)=1}} e\left(\frac{-h\bar{r}}{4s}\right) \Phi_3(r) \right| \leq \pi|h|\mathcal{M}\tau(4s)\sqrt{4s} \{(h, 4s)\}^{1/2} \gamma(4s).$$

Par (3.24), on déduit que

$$|P_3| \leq \pi|h|\mathcal{M} \sum_{\substack{4\sqrt{u/5} < m < 2\sqrt{v} \\ 4|m}} \tau(m) \sqrt{m} \{(h, m)\}^{1/2} \gamma(m).$$

La même majoration est valable pour la somme  $P_4$ , où l'on compte les termes de (3.17) avec  $s < 0$  et  $1 \leq r \leq -s$ , et l'on déduit de (3.22)

$$|P| = |P_1 + P_2 + P_3 + P_4| \leq 8\pi|h|\mathcal{M} \sum_{m < 2\sqrt{v}} \tau(m) \sqrt{m} \{(h, m)\}^{1/2} \gamma(m).$$

Par (2.25) et le lemme 2, il suit

$$(3.25) \quad \begin{aligned} |P| &\leq 8\pi|h|\mathcal{M}\gamma(2\sqrt{v})\sqrt{2}v^{1/4} \sum_{m \leq 2\sqrt{v}} \tau(m) \{(h, m)\}^{1/2} \\ &\leq 8|h|\mathcal{M}\sqrt{2}\left(\log v + \pi + 2\log\frac{8}{\pi}\right)(\log v + 2 + 2\log 2)v^{3/4}\psi(|h|) \\ &\leq 8|h|\mathcal{M}\sqrt{2}(\log v + 4)^2 v^{3/4}\psi(|h|) \end{aligned}$$

où  $\psi(|h|)$  est défini en (2.17).

3.4 CHOIX DE  $\omega$ 

Par (3.15) et (3.5), on a

$$|S_2(u, v; f)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} \frac{1}{|h|} |P|$$

et par (3.16) et le lemme 5 (iii), on a

$$\begin{aligned} |S_4(u, v; f)| &\leq \frac{3v}{14(\omega + 1)} + \frac{1}{2\omega + 2} \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} |P| \\ &\leq \frac{3v}{14(\omega + 1)} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} \frac{1}{|h|} |P| \end{aligned}$$

de sorte que, par (3.9) et (3.12) on a

$$\begin{aligned} |S_1(u, v; f)| &\leq |S_2(u, v; f)| + |S_4(u, v; f)| \\ &\leq \frac{3v}{14(\omega + 1)} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} + 1 \right) \sum_{1 \leq |h| \leq \omega} \frac{1}{|h|} |P|. \end{aligned}$$

Par (3.25) et le lemme 3, en tenant compte des valeurs négatives de  $h$ , il suit

$$(3.26) \quad |S_1(u, v; f)| \leq \frac{3v}{14(\omega + 1)} + \left( \frac{1}{\pi} + 1 \right) 8\sqrt{2}\mathcal{M}(\log v + 4)^2 v^{3/4} (7\omega).$$

On pose

$$(3.27) \quad \omega_0 = \frac{1}{14} \sqrt{\frac{3\pi}{4\sqrt{2}\mathcal{M}(\pi + 1)}} \frac{v^{1/8}}{\log v + 4}$$

et l'on choisit  $\omega$

$$(3.28) \quad \omega = \lfloor \omega_0 \rfloor.$$

Par (3.26), il vient

$$\begin{aligned} |S_1(u, v; f)| &\leq \frac{3v}{14\omega_0} + 56\sqrt{2} \left( \frac{1}{\pi} + 1 \right) (\log v + 4)^2 v^{3/4} \omega_0 \mathcal{M} \\ &= 4\sqrt{3\sqrt{2}(1 + 1/\pi)} (\log v + 4) v^{7/8} \sqrt{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

et comme  $4\sqrt{3\sqrt{2}(1 + 1/\pi)} = 9.4599\dots$ , cela achève la démonstration du théorème 2.  $\square$

## 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Dans ce paragraphe, pour les calculs numériques, nous supposerons

$$(4.1) \quad \lambda = 2 \quad \text{et} \quad N \geq 1000.$$

Compte tenu de (1.26) nous écrivons (1.22)

$$(4.2) \quad \widehat{Q}(N, \lambda) = Q_0(N, \lambda) - Q_1(N, \lambda)$$

avec, pour  $i = 0$  ou  $1$ ,

$$(4.3) \quad Q_i(N, \lambda) = S_i(u_0, v_0; f_1) - S_i(u_0, v_0; N-1) - S_i(u_1, v_0; f_2) + S_i(u_1, v_0; N-1).$$

Nous évaluerons successivement  $Q_0(N, \lambda)$  et  $Q_1(N, \lambda)$ ; mais il nous faut d'abord définir quelques nouvelles variables.

## 4.1 LES QUANTITÉS APPROCHÉES

Nous utiliserons les trois quantités linéaires en  $N$

$$(4.4) \quad \widehat{v}_0 = \lambda(2 - \sqrt{2})N, \quad \widehat{u}_0 = 2(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})N, \quad \widehat{u}_1 = 2(\sqrt{2} - 1)N,$$

comme des approximations des nombres  $v_0$ ,  $u_0$  et  $u_1$  définis en (1.14), (1.16) et (1.17). En utilisant les relations

$$(4.5) \quad \sqrt{a} \leq \sqrt{a+t} \leq \sqrt{a} + \frac{t}{2\sqrt{a}}, \quad a > 0, \quad t \geq 0$$

et

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \sqrt{a} - \frac{t}{\sqrt{a}} &= \sqrt{a} \left(1 - \frac{t}{a}\right) \\ &\leq \sqrt{a} \sqrt{1 - \frac{t}{a}} = \sqrt{a-t} \leq \sqrt{a}, \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq a \end{aligned}$$

on obtient les inégalités (rappelons que  $\lambda > \sqrt{2}$  et  $N \geq 1$ )

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \widehat{v}_0 \leq v_0 &= 2\lambda N - \frac{1}{2}\sqrt{8\lambda^2 N^2 - 2} \\ &\leq \widehat{v}_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda N} < \widehat{v}_0 + \frac{1}{4N} < \widehat{v}_0 + 1 \leq 2\lambda N, \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \widehat{u}_0 < u_0 &= 2\lambda N - \sqrt{4(\lambda^2 - 1)N^2 - 1} \\ &\leq \widehat{u}_0 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - 1}N} < \widehat{u}_0 + \frac{1}{2N} < \widehat{u}_0 + 1 \end{aligned}$$

et

$$(4.9) \quad \widehat{u}_1 < u_1 = \sqrt{8N^2 + 1} - 2N \leq \widehat{u}_1 + \frac{1}{4\sqrt{2}N} < \widehat{u}_1 + 1.$$

Nous approcherons les fonctions

$$(4.10) \quad f_1(t) = \frac{1}{2} \sqrt{t(4\lambda N - t) - 1} \quad \text{et} \quad f_2(t) = \frac{1}{2} \left( t + \sqrt{2t^2 - 1} \right)$$

définies en (1.13) et (1.12) par

$$(4.11) \quad \widehat{f}_1(t) = \frac{1}{2} \sqrt{t(4\lambda N - t)} \quad \text{et} \quad \widehat{f}_2(t) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} t.$$

Par (4.6), on a, pour  $1 \leq t \leq 4\lambda N - 1$ ,  $N \geq 1$  et  $\lambda > \sqrt{2}$

$$(4.12) \quad \widehat{f}_1(t) - \frac{1}{4} \leq \widehat{f}_1(t) - \frac{1}{2\sqrt{4\lambda N - 1}} \leq \widehat{f}_1(t) - \frac{1}{2\sqrt{t(4\lambda N - t)}} \leq f_1(t) \leq \widehat{f}_1(t)$$

et, toujours par (4.6), on a, pour  $t \geq 1$

$$(4.13) \quad \widehat{f}_2(t) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left( t + \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}t} \right) \leq f_2(t) \leq \widehat{f}_2(t).$$

## 4.2 LES TERMES SECONDAIRES DE RESTE

Pour estimer  $Q_0(N, \lambda)$  défini par (4.3), on utilise (1.27) et le lemme 6

$$(4.14) \quad S_0(u, v; f) = \sum_{\substack{u \leq d \leq v \\ d \text{ impair}}} \frac{\rho(d)f(d)}{d} = J(u, v; f) + \widehat{R}_0(u, v; F)$$

où l'on a posé  $F(t) = f(t)/t$  et

$$(4.15) \quad J(u, v; f) = \frac{1}{\pi} \int_u^v F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_u^v \frac{f(t)}{t} dt.$$

Nous écrirons

$$(4.16) \quad Q_0(N, \lambda) = Q_2(N, \lambda) + Q_3(N, \lambda)$$

avec

$$(4.17) \quad Q_2(N, \lambda) = J(u_0, v_0; f_1) - J(u_0, v_0; N-1) - J(u_1, v_0; f_2) + J(u_1, v_0; N-1)$$

et

$$(4.18) \quad \begin{aligned} Q_3(N, \lambda) &= \widehat{R}_0(u_0, v_0; F_1) - \widehat{R}_0 \left( u_0, v_0; \frac{N-1}{t} \right) \\ &\quad - \widehat{R}_0(u_1, v_0; F_2) + \widehat{R}_0 \left( u_1, v_0; \frac{N-1}{t} \right). \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe nous majorerons les quatre termes de reste  $\widehat{R}_0(u, v; F)$  et la valeur absolue de leur somme  $Q_3(N, \lambda)$  tandis que, dans le paragraphe suivant, nous traiterons les termes principaux  $J(u, v; f)$  et  $Q_2(N, \lambda)$ .

LE PREMIER TERME  $\widehat{R}_0(u_0, v_0; F_1)$ . Posons par (4.10)

$$(4.19) \quad F_1(t) = \frac{f_1(t)}{t} = \frac{\sqrt{t(4\lambda N - t) - 1}}{2t}.$$

Avec l'aide de MAPLE, nous dérivons :

$$(4.20) \quad F'_1(t) = \frac{-2\lambda N t + 1}{2t^2 \sqrt{t(4\lambda N - t) - 1}} = \frac{-2\lambda N t - 1}{4t^2 f_1(t)},$$

$$(4.21) \quad F''_1(t) = \frac{4t^2 \lambda N (3\lambda N - t - 3/t) + 3t^2 + 2}{2t^3 (t(4\lambda N - t) - 1)^{3/2}}.$$

Pour  $\lambda > \sqrt{2}$ ,  $N \geq 1$  et  $t \geq 1$ , on a  $2\lambda N t > 1$  et, par (4.20), on voit que  $F'_1(t) < 0$ . La quantité  $3\lambda N - t - 3/t$  est minimale en  $t = \sqrt{3}$  et vaut  $3\lambda N - 2\sqrt{3} > 0$ ; par (4.21),  $F''_1(t) > 0$  pour tout  $t > 0$  et donc

$$(4.22) \quad F_1(t) = \frac{f_1(t)}{t} \text{ est décroissante et convexe pour } 1 \leq t \leq v_0.$$

Par (4.8) et (4.4), si l'on choisit  $N \geq \lambda$ , on a  $u_0 \geq \widehat{u}_0 = \frac{2N}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}} \geq \frac{2N}{2\lambda} \geq 1$ ; par (4.22),  $F_1$  est décroissante sur  $[u_0, v_0]$  et par (1.16) on obtient

$$(4.23) \quad \|F_1\| = \|F_1\|_{[u_0, v_0]} = \frac{f_1(u_0)}{u_0} = \frac{N}{u_0} \leq \frac{N}{\widehat{u}_0} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{2} < 1.87$$

tandis que, par (4.22), (4.20), (1.16), (4.8) et (4.4), on a

$$(4.24) \quad \begin{aligned} \|F'_1\| &= \|F'_1\|_{[u_0, v_0]} = -F'_1(u_0) = \frac{2\lambda N u_0 - 1}{4u_0^2 f_1(u_0)} = \frac{2\lambda N u_0 - 1}{4u_0^2 N} \\ &< \frac{2\lambda N u_0}{4u_0^2 N} = \frac{\lambda}{2u_0} < \frac{\lambda}{2\widehat{u}_0} = \frac{\lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})}{4N} < \frac{1.87}{N}. \end{aligned}$$

Par le lemme 6, on obtient, pour  $\lambda = 2$

$$(4.25) \quad \left| \widehat{R}_0(u_0, v_0; F_1) \right| \leq (2 \log v_0 + 12) \sqrt{v_0} \left( 3.74 + 1.25 \frac{v_0}{N} \right).$$

LE DEUXIÈME TERME  $\widehat{R}_0(u_0, v_0; \frac{N-1}{t})$ . On a en utilisant (4.8) et (4.4)

$$(4.26) \quad \left\| \frac{N-1}{t} \right\|_{[u_0, v_0]} = \frac{N-1}{u_0} < \frac{N}{u_0} \leq \frac{N}{\widehat{u}_0} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{2} < 1.87$$

et

$$\left\| -\frac{N-1}{t^2} \right\|_{[u_0, v_0]} = \frac{N-1}{u_0^2} \leq \frac{N}{u_0^2} \leq \frac{N}{\widehat{u}_0^2} = \frac{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})^2}{4N} < \frac{3.49}{N}.$$

Par le lemme 6, il suit pour  $\lambda = 2$

$$(4.27) \quad \left| \widehat{R}_0 \left( u_0, v_0; \frac{N-1}{t} \right) \right| \leq (2 \log v_0 + 12) \sqrt{v_0} \left( 3.74 + 2.33 \frac{v_0}{N} \right).$$

LE TROISIÈME TERME  $\widehat{R}_0(u_1, v_0; F_2)$ . Par (4.10), on a pour  $t \geq 1$

$$(4.28) \quad F_2(t) = \frac{f_2(t)}{t} = \frac{1}{2} \left( \frac{t + \sqrt{2t^2 - 1}}{t} \right) \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

et donc

$$(4.29) \quad \|F_2\| = \|F_2\|_{[u_1, v_0]} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \leq 1.21.$$

Pour  $t \geq 1$ , on a  $2t^2 - 1 \geq 1$  et

$$F'_2(t) = \frac{1}{2t^2\sqrt{2t^2 - 1}} \leq \frac{1}{2t^2}.$$

Donc, par (4.9) et (4.4)

$$(4.30) \quad \|F'_2\| = \|F'_2\|_{[u_1, v_0]} \leq \frac{1}{2u_1^2} \leq \frac{1}{2\widehat{u}_1^2} = \frac{1}{8(\sqrt{2} - 1)^2 N^2} \leq \frac{0.73}{N^2}.$$

Par le lemme 6, il suit pour  $\lambda = 2$

$$(4.31) \quad \left| \widehat{R}_0(u_1, v_0; F_2) \right| \leq (2 \log v_0 + 12) \sqrt{v_0} \left( 2.42 + 0.49 \frac{v_0}{N^2} \right).$$

LE QUATRIÈME TERME  $\widehat{R}_0(u_1, v_0; \frac{N-1}{t})$ . On a par (4.9) et (4.4)

$$(4.32) \quad \left\| \frac{N-1}{t} \right\|_{[u_1, v_0]} = \frac{N-1}{u_1} < \frac{N}{u_1} < \frac{N}{\widehat{u}_1} = \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} < 1.21$$

et

$$\left\| -\frac{N-1}{t^2} \right\|_{[u_1, v_0]} = \frac{N-1}{u_1^2} \leq \frac{N}{u_1^2} \leq \frac{N}{\widehat{u}_1^2} = \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)^2 N} < \frac{1.46}{N}.$$

Par le lemme 6, on a pour  $\lambda = 2$

$$(4.33) \quad \left| \widehat{R}_0 \left( u_1, v_0; \frac{N-1}{t} \right) \right| \leq (2 \log v_0 + 12) \sqrt{v_0} \left( 2.42 + 0.98 \frac{v_0}{N} \right).$$

On a donc, par (4.18), en ajoutant les inégalités (4.25), (4.27), (4.31) et (4.33),

$$|Q_3(N, 2)| \leq (2 \log v_0 + 12) \sqrt{v_0} \left( 12.32 + 4.56 \frac{v_0}{N} + 0.49 \frac{v_0}{N^2} \right).$$

Maintenant par (4.7) et (4.4), on a, pour  $N \geq 1000$  et  $\lambda = 2$ ,

$$(4.34) \quad v_0 \leq \widehat{v}_0 + \frac{1}{4N} = \lambda(2 - \sqrt{2})N \left( 1 + \frac{1}{4\lambda(2 - \sqrt{2})N^2} \right) \leq 1.18N,$$

ce qui entraîne  $\log v_0 \leq \log N + \log 1.18 \leq \log N + 0.17$  et  $v_0/N^2 \leq 1.18/N \leq 0.002$ . On obtient ainsi

$$(4.35) \quad |Q_3(N, 2)| \leq (39 \log N + 238) \sqrt{N}.$$

## 4.3 LES TERMES PRINCIPAUX

Considérons un quadruplet de nombres réels  $\{\hat{u}, u, \hat{v}, v\}$  satisfaisant

$$(4.36) \quad \frac{N}{\lambda} \leq \hat{u} \leq u \leq \hat{u} + 1 < \hat{v} \leq v \leq \hat{v} + 1 \leq 2\lambda N$$

et un couple de fonctions  $\{f, \hat{f}\}$  continues de l'intervalle  $[\hat{u}, v]$  dans  $\mathbf{R}$  et satisfaisant

$$(4.37) \quad \|\hat{f} - f\|_{[\hat{u}, v]} \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f\|_{[\hat{u}, v]} \leq \|\hat{f}\|_{[\hat{u}, v]} \leq \lambda(1 + \sqrt{2})N.$$

Alors on a

$$(4.38) \quad \int_u^v \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\hat{u}}^{\hat{v}} \frac{\hat{f}(t)}{t} dt + \hat{J}$$

avec

$$\hat{J} = \int_{\hat{u}}^{\hat{v}} \frac{f(t) - \hat{f}(t)}{t} dt - \int_{\hat{u}}^u \frac{f(t)}{t} dt + \int_{\hat{v}}^v \frac{f(t)}{t} dt$$

et par (4.36) et (4.37)

$$(4.39) \quad \begin{aligned} |\hat{J}| &\leq \log \frac{\hat{v}}{\hat{u}} + \lambda(1 + \sqrt{2})N \left( \log \frac{u}{\hat{u}} + \log \frac{v}{\hat{v}} \right) \\ &\leq \log \frac{2\lambda N}{N/\lambda} + \lambda(1 + \sqrt{2})N \left( \frac{u - \hat{u}}{\hat{u}} + \frac{v - \hat{v}}{\hat{v}} \right) \\ &\leq \log(2\lambda^2) + \lambda(1 + \sqrt{2})N \left( \frac{1}{N/\lambda} + \frac{1}{N/\lambda} \right) \\ &= \log(2\lambda^2) + 2\lambda^2(1 + \sqrt{2}) \leq 21.40 \quad (\text{pour } \lambda = 2). \end{aligned}$$

Nous appliquerons quatre fois l'égalité (4.38) complétée par l'inégalité (4.39). Observons d'abord que, par (4.8), (4.7), (4.9) et (4.4), les quadruplets  $\{\hat{u}_0, u_0, \hat{v}_0, v_0\}$  et  $\{\hat{u}_1, u_1, \hat{v}_0, v_0\}$  satisfont (4.36) : l'inégalité  $\hat{u}_0 + 1 \leq \hat{u}_1 + 1 < \hat{v}_0$  est vérifiée, à partir de (4.4), pour  $N > \frac{2 + \sqrt{2}}{2(\lambda - \sqrt{2})}$ . Observons ensuite que les couples de fonctions  $\{f_1, \hat{f}_1\}$ ,  $\{f_2, \hat{f}_2\}$  et  $\{N - 1, N\}$  vérifient (4.37) sur l'intervalle  $[\hat{u}_0, v_0]$  en utilisant (4.11), (4.12), (4.13) et (4.7).

Alors, par (4.15) et (4.38), (4.17) s'écrit

$$(4.40) \quad Q_2(N, \lambda) = \frac{1}{\pi} \left( \int_{\hat{u}_0}^{\hat{v}_0} \frac{\hat{f}_1(t)}{t} dt - \int_{\hat{u}_0}^{\hat{v}_0} \frac{N}{t} dt - \int_{\hat{u}_1}^{\hat{v}_0} \frac{\hat{f}_2(t)}{t} dt + \int_{\hat{u}_1}^{\hat{v}_0} \frac{N}{t} dt \right) + Q_4$$

avec, par (4.39),

$$(4.41) \quad |Q_4| = |Q_4(N, \lambda)| \leq \frac{4}{\pi} 21.40 \leq 28.$$

Par (4.4), (4.11) et le changement de variable  $y = \sqrt{\frac{4\lambda N}{t} - 1}$ , on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\hat{u}_0}^{\hat{v}_0} \frac{\hat{f}_1(t)}{t} dt &= \frac{1}{2} \int_{2(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})N}^{\lambda(2 - \sqrt{2})N} \sqrt{\frac{4\lambda N}{t} - 1} dt = 4\lambda N \int_{1 + \sqrt{2}}^{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}} \frac{y^2 dy}{(1 + y^2)^2} \\ &= \lambda N \left( \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\lambda} \right) - N(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

en notant que  $\arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) = \frac{1}{2}(\pi - \arcsin \frac{1}{\lambda})$  qui, en substituant  $\sqrt{2}$  à  $\lambda$ , donne  $\arctan(1 + \sqrt{2}) = \frac{3\pi}{8}$ .

Par (4.4) et (4.11), (4.40) se réécrit

$$(4.42) \quad Q_2(N, \lambda) = \alpha(\lambda)N + Q_4(N, \lambda)$$

où  $\alpha(\lambda)$  a été défini en (1.4).

On peut remarquer, par (4.40), que

$$\alpha(\lambda)N = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dt}{t}$$

où  $\mathcal{D}$  est le domaine des points  $(x, t)$  satisfaisant  $N \leq x \leq \frac{\lambda N}{\sqrt{2}}$  et situés entre l'ellipse  $t^2 - 4\lambda N t + 4x^2 = 0$  et la droite  $t = 2(\sqrt{2} - 1)x$ . En intégrant d'abord en  $t$ , on obtient

$$\alpha(\lambda)N = \int_N^{\frac{\lambda N}{\sqrt{2}}} dx \int_{2(\lambda N - \sqrt{\lambda^2 N^2 - x^2})}^{2(\sqrt{2} - 1)x} \frac{dt}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_N^{\frac{\lambda N}{\sqrt{2}}} \log \frac{2(\sqrt{2} - 1)x}{2(\lambda N - \sqrt{\lambda^2 N^2 - x^2})} dx.$$

#### 4.4 LE TERME PRINCIPAL DE RESTE

Pour estimer  $Q_1(N, \lambda)$  défini par (4.3), nous appliquerons quatre fois le théorème 2. Pour cela, nous supposerons que  $N \geq 7\lambda$  de façon que, par (4.8), (4.9) et (4.4), on ait  $u_0 \geq \hat{u}_0 \geq 7$  et  $u_1 \geq \hat{u}_1 \geq 7$ . Rappelons que  $\mathcal{M}(u, v; f)$  est défini en (1.25).

LE PREMIER TERME  $\mathcal{M}(u_0, v_0; f_1)$ . On pose  $F_1(t) = f_1(t)/t$ . A partir de (4.20), on calcule

$$\frac{d}{dt}(tF'_1(t)) = \frac{2\lambda N t^2(2\lambda N - t - 3/t) + 2t^2 + 1}{2t^2(t(4\lambda N - t) - 1)^{3/2}}.$$

La quantité  $2\lambda N - t - 3/t$  est positive pour  $\lambda > \sqrt{2}$ ,  $N \geq 2$  et pour tout  $t > 0$ . En remarquant que  $F'_1(t)$  est négative et en utilisant (4.24), il vient

$$\|tF'_1(t)\|_{[u_0, v_0]} = -u_0 F'_1(u_0) < \frac{\lambda}{2}.$$

Il s'ensuit par (1.25) que, pour  $\lambda = 2$

$$(4.43) \quad \mathcal{M}(u_0, v_0; f_1) \leq 1 + \frac{2}{5} = 1.4 < (1.19)^2.$$

LE DEUXIÈME TERME  $\mathcal{M}(u_0, v_0; N - 1)$ . Posons  $f(t) = N - 1$ ,  $F(t) = (N - 1)/t$ ; on a  $tF'(t) = -\frac{N-1}{t}$ , et par (1.25) et (4.26)

$$(4.44) \quad \mathcal{M}(u_0, v_0; N - 1) = \left\| \frac{N-1}{t} \right\|_{[u_0, v_0]} + \frac{2}{5} \\ < \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{2} + \frac{2}{5} < 2.27 < (1.51)^2.$$

LE TROISIÈME TERME  $\mathcal{M}(u_1, v_0; f_2)$ . On pose  $F_2(t) = f_2(t)/t$ . On a par (4.30) et (4.7)

$$\|tF'_2(t)\|_{[u_1, v_0]} \leq \frac{v_0}{8(\sqrt{2} - 1)^2 N^2} \leq \frac{2\lambda N}{8(\sqrt{2} - 1)^2 N^2} = \frac{\lambda}{4(\sqrt{2} - 1)^2 N} \leq \frac{1.46}{N}$$

et, pour  $N \geq 1000$ ,

$$(4.45) \quad \mathcal{M}(u_1, v_0; f_2) \leq \frac{1.46}{N} + \frac{2}{5} \leq 0.41 \leq (0.64)^2.$$

LE QUATRIÈME TERME  $\mathcal{M}(u_1, v_0; N - 1)$ . Posons  $f(t) = N - 1$ ,  $F(t) = (N - 1)/t$ ; on a  $tF'(t) = -\frac{N-1}{t}$ , et par (1.25) et (4.32)

$$(4.46) \quad \mathcal{M}(u_1, v_0; N - 1) = \left\| \frac{N-1}{t} \right\|_{[u_1, v_0]} + \frac{2}{5} \\ \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} + \frac{2}{5} < 1.61 < (1.27)^2.$$

En conclusion, on peut majorer  $|Q_1(N, 2)|$  défini par (4.3) à l'aide de (1.28) et, en ajoutant (4.43), (4.44), (4.45) et (4.46), on obtient

$$(4.47) \quad |Q_1(N, 2)| \leq 9.5(\log v_0 + 4)v_0^{7/8}(1.19 + 1.51 + 0.64 + 1.27) \\ = 43.8(\log v_0 + 4)v_0^{7/8}.$$

En utilisant (4.34), (4.47) entraîne

$$(4.48) \quad |Q_1(N, 2)| \leq 43.8(\log(1.18N) + 4)(1.18N)^{7/8} \leq (211 + 51 \log N)N^{7/8}.$$

## 4.5 RÉCAPITULATION

Par (1.18), (4.2), (4.16) et (4.42), il vient

$$Q(N, \lambda) = \alpha(\lambda)N + \tilde{R}(N, \lambda)$$

avec

$$(4.49) \quad \tilde{R}(N, \lambda) = -Q_1(N, \lambda) + Q_3(N, \lambda) + Q_4(N, \lambda) + \varepsilon(N, \lambda)$$

et (1.8) résulte de (4.48), (4.35), (4.41) et (1.32).

La méthode utilisée pour obtenir (4.48), (4.35) et (4.41) montre que, pour tout  $\lambda$  fixé,  $\lambda > \sqrt{2}$ , on a  $Q_1(N, \lambda) = O_\lambda(N^{7/8}(\log N))$ ,  $Q_3(N, \lambda) = O_\lambda(N^{1/2}(\log N))$ ,  $Q_4(N, \lambda) = O_\lambda(1)$ , et, par (1.31), on a  $\varepsilon(N, \lambda) = O_\lambda(1)$ ; ainsi, par (4.49), (1.6) est démontré, ce qui achève la preuve du théorème 1.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] COHEN, H. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Springer-Verlag, 1993.
- [2] CRANDALL, R. and C. POMERANCE. *Prime Numbers : A Computational Perspective*. Springer-Verlag, 2001.
- [3] DABOSSI, H. et J. RIVAT. Explicit upper bounds for exponential sums over primes. *Math. Comp.* 70 (2001), 431–447.
- [4] DESHOUILERS, J.-M. and H. IWANIEC. On the greatest prime factor of  $n^2 + 1$ . *Ann. Inst. Fourier* 32 (1982), 1–11.
- [5] DICKSON, L. E. *Studies in the Theory of Numbers*. The University of Chicago Press, 1930.
- [6] —— *History of the Theory of Numbers*, t. 3. Chelsea Publishing Company, 1971.
- [7] GRAHAM, S. and G. KOLESNIK. *Van der Corput's Method of Exponential Sums*. London Math. Soc. Lecture Note Series 126. Cambridge University Press, 1991.
- [8] HANROT, G., J. RIVAT, G. TENENBAUM and P. ZIMMERMANN. Density results on floating-point invertible numbers. *Theoret. Comput. Sci.* 291 (2003), 135–141.
- [9] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th edition. Oxford at the Clarendon Press, 1964.
- [10] HOOLEY, C. On the greatest prime factor of a quadratic polynomial. *Acta Math.* 117 (1967), 281–299.
- [11] —— *Applications of Sieve Methods to the Theory of Numbers*. Cambridge Tracts in Mathematics 70. Cambridge University Press, 1976.
- [12] HUXLEY, M. N. Exponential sums and lattice points, III. *Proc. London Math. Soc.* (3) 87 (2003), 591–609.
- [13] IWANIEC, H. *Topics in Classical Automorphic Forms*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 17. Amer. Math. Soc., 1991.

- [14] Le système MAPLE de calcul formel, <http://www.maplesoft.com>
- [15] MULLER, J.-M. *Elementary Functions, Algorithms and Implementations*. Birkhäuser, 1997.
- [16] NITAJ, A. L'algorithme de Cornacchia. *Expositiones Math.* 13 (1995), 358–365.
- [17] Le système PARI/GP, <http://www.parigp-home.de>
- [18] SIERPIŃSKI, W. Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques. *Prace mat.-fiz.* 17 (1906), 77–118; et *Œuvres Choisies*, vol. 1, 73–108.
- [19] SMITH, H. J. S. *The Collected Mathematical Papers of Henry John Stephen Smith*, vol. 1. Chelsea Publishing Company, 1965.
- [20] VAALER, J. Some extremal functions in Fourier analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985), 183–216.
- [21] WEIL, A. On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 34 (1948), 204–207.

(Reçu le 18 novembre 2003)

Jean-Michel Muller

Laboratoire d'Informatique du Parallélisme, UMR 5668  
 Ecole Normale Supérieure de Lyon  
 46, allée d'Italie  
 F-69364 Lyon Cedex 07  
 France  
 e-mail : Jean-Michel.Muller@ens-lyon.fr

Jean-Louis Nicolas

Xavier-François Roblot

Institut Girard Desargues, UMR 5028  
 Bâtiment Doyen Jean Braconnier  
 Université Claude Bernard (Lyon 1)  
 21, avenue Claude Bernard  
 F-69622 Villeurbanne  
 France  
 e-mail : jlnicola@in2p3.fr  
 roblot@euler.univ-lyon1.fr