

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ADDITIVE NUMBER THEORY SHEDS EXTRA LIGHT ON THE HOPF-STIEFEL  $\circ$  FUNCTION  
**Autor:** Plagne, Alain

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66682>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ACKNOWLEDGEMENTS. I was introduced to the  $\mu$  function by Shalom Eliahou during the conference “Multilinear Algebra and Matroid Theory” held in Lisboa, Portugal (March 24–26, 2002). There, he asked me for a formula for  $\mu_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ , a question which led me to Theorem 3. He then kindly indicated to me the application to the  $\beta_p$  functions. The author is grateful to Shalom Eliahou for his help as well as for a careful reading of preliminary versions of this paper. I would like to associate Michel Kervaire to these thanks, for the interest he took in this paper.

## REFERENCES

- [1] BOLLOBAS, B. and I. LEADER. Sums in the grid. *Discrete Math.* 162 (1996), 31–48.
- [2] CAUCHY, A.L. Recherches sur les nombres. *J. École polytechnique* (1813), 99–123.
- [3] DAVENPORT, H. On the addition of residue classes. *J. London Math. Soc.* 10 (1935), 30–32.
- [4] ——— A historical note. *J. London Math. Soc.* 22 (1947), 100–101.
- [5] ELIAHOV, S. and M. KERVAIRE. Sumsets in vector spaces over finite fields. *J. Number Theory* 71 (1998), 12–39.
- [6] HOPF, H. Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra. *Comment. Math. Helv.* 13 (1940–41), 219–239.
- [7] HURWITZ, A. Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1898), 309–316.
- [8] ——— Über die Komposition der quadratischen Formen. *Math. Ann.* 88 (1923), 1–25.
- [9] KNESER, M. Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. *Math. Z.* 58 (1953), 459–484.
- [10] PFISTER, A. Zur Darstellung von  $-1$  als Summe von Quadraten in einem Körper. *J. London Math. Soc.* 40 (1965), 159–165.
- [11] ——— Quadratische Formen in beliebigen Körpern. *Invent. Math.* 1 (1966), 116–132.
- [12] RAJWADE, A.R. *Squares*. LMS Lecture Notes 171. Cambridge, 1993.
- [13] SHAPIRO, D. Products of sums of squares. *Exposition. Math.* 2 (1984), 235–261.
- [14] ——— *Compositions of Quadratic Forms*. Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [15] STIEFEL, E. Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra. *Comment. Math. Helv.* 13 (1940–41), 201–218.
- [16] YIU, P. On the product of two sums of 16 squares as a sum of squares of integral bilinear forms. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 41 (1990), 463–500.

- [17] YUZVINSKY, S. Orthogonal pairings of Euclidean spaces. *Michigan Math. J.* 28 (1981), 109–119.

*(Reçu le 6 décembre 2002)*

Alain Plagne

LIX

École polytechnique

F-91128 Palaiseau Cedex

France

*e-mail*: [plagne@lix.polytechnique.fr](mailto:plagne@lix.polytechnique.fr)