

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ADDITIVE NUMBER THEORY SHEDS EXTRA LIGHT ON THE HOPF-STIEFEL  $\circ$  FUNCTION  
**Autor:** Plagne, Alain  
**Kapitel:** 2.2 The upper bound  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66682>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2.2 THE UPPER BOUND

Let  $H$  be any subgroup of  $G$ . Choose  $\mathcal{A}_0$  and  $\mathcal{B}_0$  in  $G/H$  with respective cardinalities  $\lceil r/|H| \rceil$  and  $\lceil s/|H| \rceil$  and such that

$$|\mathcal{A}_0 + \mathcal{B}_0| = \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil).$$

Now choose  $\mathcal{A}$  of cardinality  $r$  and  $\mathcal{B}$  of cardinality  $s$  in  $G$  such that the image of  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) by the canonical projection on  $G/H$  is included in  $\mathcal{A}_0$  (resp.  $\mathcal{B}_0$ ). One has

$$|\mathcal{A} + \mathcal{B}| \leq \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H|.$$

This proves the first lemma we need.

LEMMA 1. *For any finite Abelian group  $G$*

$$\mu_G(r, s) \leq \min_{H \leq G} \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H|.$$

The second useful point is synthesized in the next folkloric lemma.

LEMMA 2. *Let  $G$  be a finite Abelian group. For any positive integer  $m$ , the following two propositions are equivalent*

- (i)  $m$  divides  $\exp G$ ,
- (ii) there exists a subgroup  $H$  of  $G$  such that  $G/H$  is isomorphic to  $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ .

In the case of a cyclic group  $K$ , trivial considerations (take two sets with consecutive elements), show that, for any  $u, v \leq |K|$ ,

$$(2.2) \quad \mu_K(r, s) \leq r + s - 1.$$

Using consecutively Lemma 1, inequality (2.2) and Lemma 2 yields the following chain of inequalities:

$$\begin{aligned} \mu_G(r, s) &\leq \min_{H \leq G} \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H| \\ &\leq \min_{H \leq G, G/H \text{ cyclic}} \mu_{G/H}(\lceil r/|H| \rceil, \lceil s/|H| \rceil)|H| \\ &\leq \min_{H \leq G, G/H \text{ cyclic}} (\lceil r/|H| \rceil + \lceil s/|H| \rceil - 1)|H| \\ &= \min_{|G/H| \text{ divides } \exp G} (\lceil r/|H| \rceil + \lceil s/|H| \rceil - 1)|H| \\ &= \min_{f | \exp G} (\lceil rf/|G| \rceil + \lceil sf/|G| \rceil - 1) \frac{|G|}{f}. \end{aligned}$$

The change of variable  $d = |G|/f$  yields a parameter  $d$  subject to the two restrictions  $\frac{|G|}{\exp G} \mid d$  and  $d \mid |G|$ ; this proves the upper bound in Theorem 4.