

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ADDITIVE NUMBER THEORY SHEDS EXTRA LIGHT ON THE HOPF-STIEFEL \circ FUNCTION
Autor: Plagne, Alain
Kapitel: 2.1 The lower bound
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-66682>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

With these results, we know the behaviour of μ_G at the two endpoints of the spectrum (cyclic groups and groups of prime exponent). What now remains to be done is to fill the gap between the upper bound and the lower bound for general finite Abelian groups.

2. PROOF OF THEOREM 4

Let G be any given finite Abelian group and let $1 \leq r, s \leq |G|$.

2.1 THE LOWER BOUND

If $\mu_G(r, s) \geq r + s - 1$, the result is immediate (take $d = 1$). We may thus assume that

$$(2.1) \quad \mu_G(r, s) \leq r + s - 1.$$

Then, choosing two sets \mathcal{A} and \mathcal{B} in G with respective cardinalities r and s , such that $|\mathcal{A} + \mathcal{B}|$ attains $\mu_G(r, s)$, we get

$$|\mathcal{A} + \mathcal{B}| = \mu_G(r, s) \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - 1.$$

We are in a position to apply Kneser's theorem [9] on the structure of sets with a small sumset. It follows that there exists a subgroup H of G (namely the stabilizer of $\mathcal{A} + \mathcal{B}$) such that

$$|\mathcal{A} + \mathcal{B}| = |\mathcal{A} + H| + |\mathcal{B} + H| - |H|.$$

Denoting by $(\mathcal{A} + H)/H$ (resp. $(\mathcal{B} + H)/H$) the H -cosets that \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) intersects, we obtain

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} + \mathcal{B}| &= \left(\left| \frac{\mathcal{A} + H}{H} \right| + \left| \frac{\mathcal{B} + H}{H} \right| - 1 \right) |H| \\ &\geq (\lceil r/f \rceil + \lceil s/f \rceil - 1)f \end{aligned}$$

where f denotes the cardinality of H . Since Lagrange's theorem shows that f divides $|G|$, we get

$$|\mathcal{A} + \mathcal{B}| \geq \min_{d| |G|} (\lceil r/d \rceil + \lceil s/d \rceil - 1)d.$$

From this it follows that, in any case,

$$\mu_G(r, s) \geq \min_{d| |G|} (\lceil r/d \rceil + \lceil s/d \rceil - 1)d,$$

which is the desired lower bound.