

Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

ADDITIVE NUMBER THEORY SHEDS  
EXTRA LIGHT ON THE HOPF-STIEFEL  $\circ$  FUNCTION

by Alain PLAGNE

ABSTRACT. The famous Hopf-Stiefel  $\circ$  function appears in several places in mathematics (linear and bilinear algebra, topology, intercalate matrices, ...). However, although the object of much study, this function kept a part of mystery since no simple formula was known for it. We shall derive a simple and practical explicit formula for  $\circ$  and more generally for  $\beta_p$  ( $p$  arbitrary prime), a generalized function due to Eliahou and Kervaire. The proof relies on a new result in combinatorial group theory which follows from additive number theoretical arguments. It is shown that this last result generalizes earlier ones by Eliahou and Kervaire and by Yuzvinsky.

1. INTRODUCTION

A *composition formula* of size  $[r, s, n]$  over some field  $\mathbf{F}$  (that we assume to be of characteristic different from 2) is an identity of the form

$$(x_1^2 + \cdots + x_r^2)(y_1^2 + \cdots + y_s^2) = (z_1^2 + \cdots + z_n^2),$$

where  $z_1, z_2, \dots, z_n$  are  $n$  bilinear forms in the variables  $(x_1, \dots, x_r)$  and  $(y_1, \dots, y_s)$ , with coefficients in  $\mathbf{F}$ . For example, the law of moduli for complex numbers provides the identity

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2,$$

which is a composition formula of size  $[2, 2, 2]$ . The law of moduli for quaternions (respectively for octonions) provides a composition formula of size  $[4, 4, 4]$  (respectively  $[8, 8, 8]$ ) in a similar way. Conversely, Hurwitz's theorem [7] (see also [8]) states that the only possible values of  $n$  for which a composition formula of size  $[n, n, n]$  exists are 1, 2, 4 and 8.