**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 49 (2003)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE PREUVE DU THÉORÈME DE LIOUVILLE EN GÉOMÉTRIE CONFORME DANS LE CAS ANALYTIQUE

**Autor:** Frances, Charles

**Kapitel:** 3. Une application: le théorème de Liouville dans le cas analytique

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-66680

## 3. Une application : le théorème de Liouville dans le cas analytique

Nous allons maintenant appliquer la propriété d'invariance conforme des géodésiques isotropes au cadre riemannien. Cela semble un petit peu incongru puisque dans ce cas, bien sûr, il n'y a pas de courbes isotropes. Néanmoins, lorsque la variété considérée est analytique, un bon moyen d'en faire apparaître est de tout complexifier. Aussi commençons-nous par quelques rappels sur la complexification.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de $\mathbf{R}^n$ et $B(x,r)$ la boule euclidienne ouverte de centre $x$ et de rayon $r$. On note $\widehat{B}(x,r)$ la boule ouverte de $\mathbf{C}^n$ de centre $x$ et de rayon $r$. Considérons une série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=i} b_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x_n-a_n)^{\alpha_n}$$

qui converge pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $B(a,r)$.

Alors la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=i} b_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z_n-a_n)^{\alpha_n}$$

converge pour tout $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\widehat{B}(a,r)$.

Maintenant, si $f$ est une application analytique définie sur un ouvert connexe $U$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, on peut la complexifier sur des boules de rayon assez petit dans $U$. Cela permet de définir une extension globale $\widehat{f}$ de $f$ à un ouvert $\widehat{U}$ de $\mathbf{C}^n$ contenant $U$.

Lorsque $f$ est une application analytique à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut également la complexifier en appliquant le procédé précédent à chaque fonction coordonnée (l'ouvert $\widehat{U}$ n'est a priori pas le même pour toutes les fonctions coordonnées mais comme elles sont en nombre fini, on peut en trouver un commun). Ainsi, n'importe quel tenseur analytique (métrique pseudo-riemannienne, structure conforme, structure symplectique) défini sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ peut se complexifier en un tenseur holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Par analyticité, certaines propriétés se conservent lors de la complexification. Par exemple toute application conforme analytique $f$ de $(U,g)$ dans $(V,g')$ se complexifie en $\widehat{f}$ conforme et holomorphe de $(\widehat{U},\widehat{g})$ dans $(\widehat{V},\widehat{g'})$.

Nous allons à présent montrer la proposition suivante, qui donne directement le théorème de Liouville grâce au lemme de Möbius. On note $g_{\mathrm{can}}$ la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

PROPOSITION 5. *Pour $n \geq 3$, une application $f$ conforme et analytique entre deux ouverts $U$ et $V$ de $(\mathbf{R}^n, g_{can})$ envoie localement les $(n-1)$-sphères de $U$ sur les $(n-1)$-sphères de $V$.*

*Preuve.* L'application $f$ est analytique : on peut donc la complexifier en $\widehat{f}$ de $\widehat{U}$ sur $\widehat{V}$. De même, la métrique canonique restreinte à $U$ et à $V$ se complexifie en $\widehat{g}_{\mathrm{can}}$ sur $\widehat{U}$ et $\widehat{V}$ (c'est en fait la restriction à ces deux ouverts de la forme quadratique complexe $z_1^2 + \cdots + z_n^2$). Le corollaire 4 permet d'affirmer que $\widehat{f}$ envoie les géodésiques isotropes de $(\widehat{U}, \widehat{g}_{\mathrm{can}})$ sur les géodésiques isotropes de $(\widehat{V}, \widehat{g}_{\mathrm{can}})$. Or les géodésiques pour la métrique $\widehat{g}_{\mathrm{can}}$ sont les droites complexes affines de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire les courbes $z \mapsto a + bz$ avec $a$ et $b$ dans $\mathbf{C}^n$. Par conséquent, si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ appartient à $\widehat{U}$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ est l'image de $u$ par $\widehat{f}$, alors $\widehat{f}$ doit envoyer l'intersection du cône $C_u$ d'équation $\sum_{j=1}^n (z_j - u_j)^2 = 0$ avec $\widehat{U}$ sur l'intersection du cône $C_v$ d'équation $\sum_{j=1}^n (z_j - v_j)^2 = 0$ avec $\widehat{V}$.

On note, pour tout $j$, $u_j = u_{1j} + iu_{2j}$ et on prend $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de $C_u \cap \mathbf{R}^n$. Ce point doit vérifier $\sum_{j=1}^n (x_j - u_j)^2 = 0$, ce qui se traduit par deux conditions.

La première s'écrit $\sum_{j=1}^n (x_j - u_{1j})^2 = \sum_{j=1}^n u_{2j}^2$ et indique que $x$ appartient à la $(n-1)$-sphère de centre $p_u = (u_{11}, \ldots, u_{1n})$ et de rayon $(u_{21}^2 + \cdots + u_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$.

La seconde s'écrit $\sum_{j=1}^n u_{2j}(x_j - u_{1j}) = 0$ et dit que $x$ appartient à l'hyperplan affine passant par $p_u$ et orthogonal à la direction $(u_{21}, \ldots, u_{2n})$. Ainsi $C_u \cap \mathbf{R}^n$ est une $(n-2)$-sphère centrée en $p_u$ et de rayon $(u_{21}^2 + \cdots + u_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$. Comme $u$ est dans $\widehat{U}$, le point $p_u$ appartient à $U$. En faisant décrire à $(u_{21}^2 + \cdots + u_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$ un petit intervalle autour de 0, on obtient toutes les $(n-2)$-sphères centrées en $p_u$ de rayon suffisament petit.

Ceci montre qu'il existe un voisinage de $p_u$ tel que toute $(n-2)$-sphère contenue dans ce voisinage est envoyée par $f$ sur une $(n-2)$-sphère de $V$. Par intersection, on en déduit que $f$ envoie localement les cercles sur des cercles, et on conclut la preuve grâce au

LEMME 6. *Un difféomorphisme entre deux ouverts $U$ et $V$ de $\mathbf{R}^n$ qui envoie localement cercles sur cercles, envoie localement $(n-1)$-sphères sur $(n-1)$-sphères.*

*Preuve.* Soit $p$ un point de $U$. Par hypothèse, il existe un voisinage $U_p$ de $p$ tel que tout cercle inclus dans $U_p$ est envoyé par $f$ sur un cercle. On considère une sphère $S$ incluse dans $U_p$ et on choisit deux points antipodaux $x_N$ et $x_S$ sur $S$. L'image $\Sigma = f(S)$ est une hypersurface lisse incluse dans $V$.

On choisit $\rho$ une inversion de pôle $f(x_N)$. Comme $S$ est la réunion des cercles de $S$ passant par $x_N$ et $x_S$, $\rho(\Sigma\backslash\{f(x_N)\})$ est réunion de droites passant par $\rho \circ f(x_S)$. C'est un cône de codimension 1, de sommet $\rho \circ f(x_S)$ et lisse en $\rho \circ f(x_S)$, donc un hyperplan. On en déduit que $\Sigma\backslash\{f(x_N)\}$ est une sphère privée du point $f(x_N)$, ce qui achève la preuve. □

REMARQUE 7. Dans le cas $n = 2$ la démonstration est mise en défaut puisque $C_u \bigcap \mathbf{R}^2$ est en général réduit à deux points.

REMERCIEMENTS. Je remercie vivement Abdelghani Zeghib pour le soutien qu'il a apporté à ce travail, ainsi que le rapporteur pour ses précieuses remarques.

## BIBLIOGRAPHIE

[AM] ABRAHAM, R. and J. E. MARSDEN. *Foundations of Mechanics.* Second edition. Benjamin/Cummings, Advanced Book Program, Reading (Mass.), 1978.

[H] HARTMAN, P. On isometries and on a theorem of Liouville. *Math. Z. 69* (1958), 202–210.

[J] JACOBOWITZ, H. Two notes on conformal geometry. *Hokkaido Math. J. 20* (1991), 313–329.

[M] MATSUMOTO, S. Foundations of flat conformal structure. In: *Aspects of Low-Dimensional Manifolds*, 167–261. Adv. Stud. Pure Math. 20. Kinokuniya, Tokyo, 1992.

[Sp] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Second edition. Publish or Perish, Wilmington, 1979.

[St] STERNBERG, S. *Lectures on Differential Geometry.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N. J.), 1964.

*(Reçu le 18 novembre 2002)*

Charles FRANCES

École Normale Supérieure de Lyon
U. M. P. A.
46, allée d'Italie
F-69364 Lyon Cedex 07
France
*e-mail:* cfrances@umpa.ens-lyon.fr