

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI  
**Autor:** Capitanio, Gianmarco  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

par Gianmarco CAPITANIO \*)

**ABSTRACT.** The minimax solution is a weak solution of a Cauchy problem for the Hamilton-Jacobi equation, constructed from a generating family (quadratic at infinity) of its geometric solution. In this paper we give a new construction of the minimax in terms of Morse theory, and we show its stability by small perturbations of the generating family. Then we show that the max-min solution coincides with the minimax solution. Finally, we consider the wave front corresponding to the geometric solution as the graph of a multi-valued solution of the Cauchy problem, and we give a geometric criterion to find the graph of the minimax.

### INTRODUCTION

En 1991 Marc Chaperon a proposé, dans [Cha], une méthode géométrique pour construire des solutions faibles du problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(PC) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, q) + H(t, q, \partial_q u(t, q)) = 0, & \text{pour tout } t > 0, q \in Q, \\ u(0, q) = u_0(q), & \text{pour tout } q \in Q, \end{cases}$$

de hamiltonien  $H$  et donnée initiale  $u_0$  sur une variété fermée  $Q$ .

La méthode classique des caractéristiques conduit, d'après une idée de Maslov, à considérer comme solution généralisée de (PC) une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent de l'espace-temps  $\mathbf{R} \times Q$ , la *solution géométrique*.

La “projection” de la solution géométrique dans l'espace des jets d'ordre 0 sur  $Q$  est, en général, le graphe d'une fonction multivaluée. La méthode de minimax permet de déduire une “vraie” fonction à partir de cette solution multi-

\*) Recherche soutenue par l'Istituto Nazionale di Alta Matematica “F. Severi”.

valuée. L'outil principal dans cette construction sont les familles génératrices quadratiques à l'infini des sous-variétés lagrangiennes. Le théorème d'existence et d'unicité de ces familles permet d'associer à chaque point de l'espace-temps une fonction, quadratique à l'infini dans les paramètres (la famille génératrice évaluée en ce point), dont on considère la valeur critique de minimax. La fonction ainsi définie s'avère être une solution faible lipschitzienne de  $(PC)$ , la *solution de minimax*.

Ce travail est divisé en trois parties.

Dans la première partie on présente une nouvelle construction de la *valeur critique de minimax* d'une fonction quadratique à l'infini, basée sur la théorie de Morse. Cette construction permet de caractériser de manière simple le minimax d'une fonction générique parmi les fonctions quadratiques à l'infini en termes du complexe de Morse associé. Le résultat principal de cette partie est la *stabilité de la valeur critique de minimax par petites déformations* de la fonction.

Dans la deuxième partie on rappelle la construction de la solution géométrique de  $(PC)$  et on démontre que toute solution géométrique est isotope, pour temps finis, à la section nulle du fibré cotangent; elle admet donc une unique famille génératrice quadratique à l'infini  $S(t, q; \xi)$ . La solution de minimax est, en tout point fixé  $(t_0 > 0, q_0)$  de l'espace-temps, le minimax de la fonction génératrice quadratique à l'infini,  $\min \max \{\xi \mapsto S(t_0, q_0; \xi)\}$ . La stabilité par petites déformations donne une preuve nouvelle (géométrique) de la continuité de cette solution. On montre aussi que la solution de *max-min*, définie de manière analogue, coïncide avec celle de minimax.

Dans la troisième partie on montre comment réduire le problème de déterminer la solution de minimax associée à un front d'onde (graphe d'une fonction multivaluée) de dimension quelconque au cas d'un tel front de dimension 1. Un théorème récent de Chekanov et Pushkar ([Ch2], [C-P]) permet alors d'établir un critère géométrique purement combinatoire pour déterminer le graphe de la solution de minimax directement sur le front d'onde.

**REMERCIEMENTS.** Plusieurs personnes m'ont aidé pendant la réalisation de ce travail: je les remercie très chaleureusement. Franco Cardin et Marc Chaperon m'ont introduit à ce sujet et m'ont posé le problème initial; ils ont suivi toujours avec intérêt ma recherche. Notamment, sans le soutien de Franco Cardin, la suite n'aurait pas été possible. Je dois à Emmanuel Ferrand les références [Bar], [Ch2] et [C-P]: il m'a expliqué le théorème de Chekanov-Pushkar et m'a suggéré de l'utiliser dans mon travail. Enfin, sans l'aide de Yuri Chekanov, le Théorème 3.5 serait encore une conjecture.

## 1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI

### 1.1 PRÉLIMINAIRES

Soient  $X$  un espace topologique,  $D^n$  un disque de dimension  $n$ , orienté, et  $\psi: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$  une application. On considère sur  $\mathbf{S}^{n-1} = \partial D^n$  l'orientation induite. On appelle *cellule* de dimension  $n$  le couple  $\sigma^n := (D^n, \psi)$ . L'espace que l'on construit en identifiant chaque point  $x$  de  $\mathbf{S}^{n-1}$  au point  $\psi(x)$  est obtenu *en attachant à  $X$  la cellule  $\sigma^n$* ; on le note  $X \cup \sigma^n$  ou bien  $X \cup_{\psi} D^n$ .

Un espace est dit *cellulaire* s'il est obtenu par l'attachement de cellules (un nombre fini pour chaque dimension) à un nombre fini de points (cellules de dimension 0). Un espace cellulaire  $X$  est un *complexe cellulaire* si chaque cellule est attachée à une cellule de dimension plus petite.

Il est bien connu que tout espace cellulaire est homotopiquement équivalent à un complexe cellulaire, voir par exemple [DNF], vol. III, §4.

Soit  $X$  un complexe cellulaire. La réunion des cellules de dimension  $k \leq n$  est appelée *squelette cellulaire* de dimension  $n$ , que l'on note  $X^n$ . On a alors la suite des squelettes emboîtés

$$X^0 \subset \cdots \subset X^k \subset \cdots \subset X.$$

L'espace quotient  $X^{k-1}/X^{k-2}$ , où  $X^{k-2}$  est identifié à un point, est un bouquet de sphères de dimension  $k-1$ . Considérons une cellule  $\sigma^k = (D^k, \psi)$  et l'application

$$\widetilde{\psi}_i: \partial D^k = \mathbf{S}^{k-1} \xrightarrow{\psi} X^{k-1} \xrightarrow{Id} X^{k-1}/X^{k-2} \xrightarrow{\pi_i} \mathbf{S}_i^{k-1},$$

où  $\pi_i$  est la projection sur la  $i$ -ème sphère du bouquet. Soit  $\sigma_i^{k-1}$  la cellule de  $X$  correspondant à la sphère  $\mathbf{S}_i^{k-1}$ .

**DÉFINITION.** On appelle *coefficient d'incidence* du couple de cellules  $\sigma^k, \sigma_i^{k-1}$  le nombre entier

$$[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] := \deg(\widetilde{\psi}_i).$$

Soient  $E = \mathbf{R}^K$  et  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de Morse excellente<sup>1)</sup>, avec un nombre fini de points critiques. D'après le lemme de Morse, autour d'un point

---

<sup>1)</sup> Une fonction est *de Morse* si ses points critiques sont tous non dégénérés, *excellente* si les valeurs critiques sont toutes distinctes.

critique  $\bar{\xi}$  de  $f$ , il existe un système de coordonnées  $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$  tel que :

$$f(\xi_1, \dots, \xi_K) = f(\bar{\xi}) - \xi_1^2 - \dots - \xi_k^2 + \xi_{k+1}^2 + \dots + \xi_K^2.$$

Le nombre  $k$ , dénoté par  $\text{ind}(\bar{\xi})$ , est l'*indice* du point critique  $\bar{\xi}$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  on note

$$E_f^\lambda = E^\lambda := \{\xi \in E \mid f(\xi) \leq \lambda\}.$$

**THÉORÈME 1.1** ([Mil]). *Si l'intervalle  $[a, b]$  ne contient aucune valeur critique de  $f$ , alors  $E^b$  et  $E^a$  sont difféomorphes.*

**THÉORÈME 1.2** ([Mil]). *Soient  $c$  la seule valeur critique dans l'intervalle  $[c - \epsilon, c + \epsilon]$  et  $\bar{\xi}$  le point critique correspondant, d'indice  $\text{ind}(\bar{\xi}) = i$ . Alors  $E^{c+\epsilon}$  et  $E^c$  se rétractent sur l'espace  $E^{c-\epsilon} \cup \sigma^i$  que l'on obtient de  $E^{c-\epsilon}$  en attachant à son bord une cellule  $\sigma^i = (D^i, \psi)$  de dimension  $i$ .*

Pour  $\xi, \eta$  points critiques de  $f$ , tels que  $\text{ind}(\xi) - \text{ind}(\eta) = 1$ , on note  $[\xi : \eta]$  l'indice d'incidence des cellules correspondantes.

**REMARQUE.** Les Théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour toute fonction de Morse excellente, dès que le champ gradient est défini et intégrable; par exemple si la condition de Palais-Smale est vérifiée: toute suite  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\nabla f(\xi_n) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$  et  $\{f(\xi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, admet une sous-suite convergente.

Soit  $b > 0$  un nombre réel assez grand pour que l'intervalle  $] -b, b [$  contienne toutes les valeurs critiques de  $f$ . On déduit du Théorème 1.1 que  $E^\lambda \simeq E^{-b}$  pour  $\lambda \leq -b$  et  $E^\lambda \simeq E^b$  pour  $\lambda \geq b$ . On note alors  $E^{\pm\infty} := E^{\pm b}$ .

Soit  $\{\xi_1^k, \dots, \xi_{\#(k)}^k\}$  l'ensemble des points critiques d'indice  $k$  de  $f$ , ordonnés selon leur valeur critique:  $f(\xi_\ell^k) < f(\xi_{\ell+1}^k)$ .

**DÉFINITION.** Le *complexe de Morse* de  $f$  est le complexe cellulaire  $(M_*^f, \partial_*)$ , défini comme suit :

- l'espace  $M_k^f$  des chaînes de dimension  $k$  est l'espace des combinaisons linéaires formelles sur  $\mathbf{Q}$  des points critiques d'indice  $k$  de  $f$ :

$$M_k^f := \left\{ \sum_{\ell=1}^{\#(k)} \alpha_\ell \xi_\ell^k \mid \alpha_\ell \in \mathbf{Q} \right\} \simeq \mathbf{Q}^{\#(k)};$$

- l'opérateur de bord<sup>2)</sup> est l'application linéaire  $\partial: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  définie par la formule

$$\partial \xi_\ell^k := \sum_{m=1}^{\#(k-1)} [\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \xi_m^{k-1}.$$

REMARQUE. D'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, l'espace  $E/E^{-\infty}$  est un espace cellulaire, homotopiquement équivalent au complexe cellulaire  $(M_*^f, \partial_*)$ . Il s'ensuit que

$$\tilde{H}_*(M_*^f, \partial_*) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}),$$

où  $\tilde{H}_*$  dénote le complexe d'homologie réduite à valeurs dans  $\mathbf{Q}$ .

En suivant une idée de Cerf ([Cer]), S. A. Barannikov a montré que l'on peut “diagonaliser” les complexes de Morse. C'est pour rendre possible cette diagonalisation que l'on a défini le complexe de Morse sur  $\mathbf{Q}$ , bien que le complexe originel soit à coefficients entiers.

LEMME ALGÉBRIQUE ([Bar]). *Dans chaque  $M_k^f$  il existe un changement de générateurs, représenté par une matrice triangulaire supérieure inversible de dimension  $\#(k)$ , qui met le complexe de Morse sous forme canonique, c'est-à-dire que les nouveaux générateurs (ordonnés)  $\{\Xi_\ell^k\}_{\ell,k}$  ( $\ell = 1, \dots, \#(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ ) vérifient*

$$(1) \quad \partial \Xi_\ell^k = 0 \quad \text{ou} \quad \partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}.$$

*Démonstration.* Par récurrence : supposons que les générateurs  $\Xi_j^h$  soient du type (1) pour  $h = k$  et  $j \leq \ell$ , et pour  $h < k$  et  $j \in \{1, \dots, \#(h-1)\}$ . Soit  $Q$  l'ensemble des indices  $q$  tels que  $\Xi_q^{k-1} = \partial \Xi_{q^*}^k$  pour quelque  $q^* \leq j$ , et  $P := \{1, \dots, \#(k-1)\} \setminus Q$ . L'égalité  $\partial \Xi_{j+1}^k = \sum_{m=1}^{\#(k-1)} \alpha_m \Xi_m^{k-1}$  s'écrit donc

$$\partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \sum_{p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

Si  $\alpha_p = 0$  pour tout  $p \in P$ , le générateur  $\Xi_{j+1}^k := \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \xi_{q^*}^k$  est canonique, en effet  $\partial \Xi_{j+1}^k = 0$ . Sinon, soit  $p_0$  le plus grand indice dans  $P$  tel que  $\alpha_{p_0} \neq 0$  :

$$(2) \quad \partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \alpha_{p_0} \Xi_{p_0}^{k-1} + \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

---

<sup>2)</sup> Pour la démonstration du fait que  $\partial^2 = 0$ , voir [DNF], vol. III, §4.

Remplaçons le générateur  $\Xi_{p_0}^{k-1}$  par  $\tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$ , qui est encore de la forme (1), car  $\partial \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial \Xi_{p_0}^{k-1} = 0$ . L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}} \partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1};$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}} \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right)$$

vérifie  $\partial \Xi_{j+1}^k = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$ .  $\square$

### REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces  $M_k^f$  on peut définir un autre opérateur de bord  $\delta: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  par la formule

$$\delta \xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1}) \xi_m^{k-1},$$

où  $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs  $Y := -\nabla f / |\nabla f|^2$  de  $\xi_\ell^k$  à  $\xi_m^{k-1}$ . Puisque l'attachement des cellules  $\sigma_\ell^k$  est induit par la rétraction des espaces  $E^\lambda$  le long des trajectoires intégrales de  $Y$ , on a  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de  $Y$  entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes  $(M_*^f, \partial_*)$  et  $(M_*^f, \delta_*)$  ont la même forme canonique.

## 1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit  $(M_*^f, \partial_*)$  le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$ . A chaque point critique  $\xi_\ell^k$  correspond le générateur  $\Xi_\ell^k$ , c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j \leq \ell} \alpha_j \xi_j^k, \quad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0.$$

DÉFINITION. On dit que deux points critiques  $\xi_\ell^k$  et  $\xi_m^{k-1}$  de  $f$  sont *incident* si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ , *liés* si  $\partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$ . Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.

DÉFINITION. On appelle *diagramme (du complexe) de Morse* la représentation suivante du complexe de Morse de  $f$ . On considère  $K + 1$  axes réels verticaux (avec la même échelle et l'origine à la même hauteur), numérotés, de gauche à droite, de  $K$  à 0. Sur le  $i$ -ème axe on considère les points critiques de  $f$  d'indice  $i$ , disposés selon leur valeur critique. On joint par un segment en tirets les couples de points critiques incidents, par un segment continu les couples de points critiques liés (cf. Figure 1).

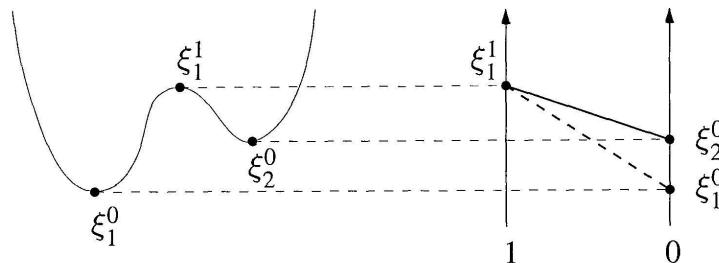


FIGURE 1  
Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto \xi^4 - \xi^2 + \xi$

REMARQUES. Considérons un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ .

- (1) Les segments qui ont  $\xi_\ell^k$  comme extrémité sont tous du même côté de l'axe où se trouve  $\xi_\ell^k$ , car  $\partial^2 = 0$ .
- (2) Les segments (orientés du point d'indice plus grand vers celui d'indice plus petit) ont tous pente négative, car si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  alors  $f(\xi_\ell^k) > f(\xi_m^{k-1})$ .
- (3) Un point critique peut être une extrémité de plusieurs segments en tirets, mais d'un seul segment continu (au plus).

PROPOSITION 1.3. Soit  $(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  un couple de points critiques liés. Alors  $\xi_m^{k-1}$  est le point critique de valeur critique maximale parmi les points critiques incidents à  $\xi_\ell^k$  tels que  $[\xi_j^k : \xi_m^{k-1}] = 0$  pour tout  $j < \ell$ ;  $\xi_\ell^k$  est le point critique de valeur critique minimale parmi les points critiques incidents à  $\xi_m^{k-1}$  tels que  $[\xi_\ell^k : \xi_j^{k-1}] = 0$  pour tout  $j > m$ .

PROPOSITION 1.4. Un point critique  $\xi$  est libre si et seulement si pour tout point critique  $\eta$  incident à  $\xi$ , il existe un point critique  $\xi'$ , incident à  $\eta$ , tel que

$$|f(\xi') - f(\eta)| < |f(\xi) - f(\eta)|.$$

Les deux propositions sont une conséquence immédiate du choix de l'indice  $p_0$  dans la preuve du lemme algébrique.

**PROPOSITION 1.5.** *Deux points critiques de  $f$  liés le sont aussi en tant que points critiques de  $-f$ .*

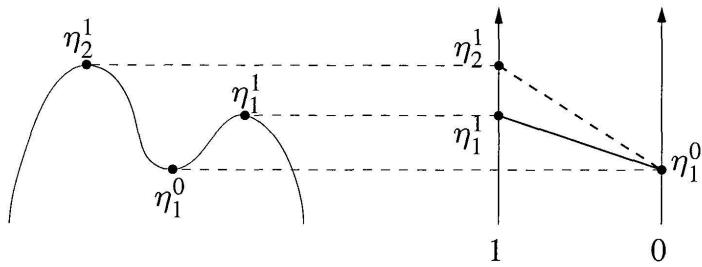


FIGURE 2  
Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto -(\xi^4 - \xi^2 + \xi)$

*Démonstration.* Un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ , d'indice  $k$ , est un point critique de  $-f$ , d'indice  $K-k$ . Soit  $c := f(\xi_\ell^k)$ ; d'après le Théorème 1.2 on a

$$E_f^{c+\epsilon} \simeq E_f^{c-\epsilon} \cup \sigma_\ell^k, \quad E_{-f}^{-c+\epsilon} \simeq E_{-f}^{-c-\epsilon} \cup \tau_m^{K-k}.$$

Or, puisque  $\partial\sigma_\ell^k$  et  $\partial\tau_m^{K-k+1}$  sont enchaînées, on a  $[\sigma_j^i, \sigma_h^{i-1}] = \pm [\tau_h^{K-i+1}, \tau_j^{K-i}]$  (voir [DNF], vol. III, § 18). Il s'ensuit que les complexes de Morse de  $f$  et de  $-f$  ont les mêmes couples de points critiques incidents. Puisque l'on obtient le complexe de  $-f$  de celui de  $f$  par une symétrie qui ne change pas la pente des segments (cf. Figure 2), la proposition précédente entraîne que les couples de points critiques liés sont les mêmes.  $\square$

### 1.3 LE NIVEAU CRITIQUE DE MINIMAX

Soit maintenant  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , quadratique à l'infini, c'est-à-dire  $f(\xi) = Q_\infty(\xi)$  pour  $|\xi|$  assez grand, où  $Q_\infty$  est une forme quadratique non dégénérée d'indice  $k_\infty$ . On ne suppose pas nécessairement que  $f$  soit de Morse excellente. Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$  considérons la famille d'inclusions naturelles  $i_\lambda: E^\lambda \hookrightarrow E$ , qui induit les homomorphismes  $i_\lambda^*: \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \rightarrow \tilde{H}_*(E^\lambda, E^{-\infty})$  des groupes d'homologie relative réduite à valeurs en  $\mathbf{Q}$ .

Comme  $f$  est quadratique à l'infini, on a

$$\tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(\mathbf{S}^{k_\infty}).$$

Soit  $\Gamma$  un générateur de  $\tilde{H}_{k_\infty}(E, E^{-\infty}) \simeq \mathbf{Q}$ .

DÉFINITION. On appelle *minimax* de  $f$  le nombre réel

$$\min \max(f) := \inf\{\lambda \in \mathbf{R} \mid i_\lambda^* \Gamma \neq 0\}.$$

REMARQUE. Puisque la topologie des niveaux change au passage de ce niveau, le minimax est une valeur critique de  $f$ .

Dans le cas des fonctions de Morse excellentes, on peut caractériser le minimax d'une fonction en utilisant la classification de ses points critiques donnée au § 1.2.

THÉORÈME 1.6. *Si  $f$  est une fonction de Morse excellente, quadratique à l'infini, elle admet un seul point critique libre, d'indice  $k_\infty$ , et le minimax de  $f$  est le niveau critique réalisé par ce point.*

*Démonstration.* Soit  $\xi$  un point critique de  $f$ ,  $\Xi$  le générateur correspondant du complexe de Morse en forme canonique. Alors  $\xi$  est libre si et seulement si

$$\partial\Xi = 0 \quad \text{et} \quad \Xi \notin \partial M^f,$$

c'est-à-dire si et seulement si  $\Xi$  est le représentant d'une classe  $[\Xi]$  non nulle dans  $H_*(M^f, \partial)$ . D'après l'isomorphisme  $\widetilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(M_*^f, \partial_*)$  on déduit qu'il existe un seul générateur  $\Xi_\ell^{k_\infty}$  tel que  $[\Xi_\ell^{k_\infty}]$  est bien définie et non nulle dans  $H_*(M_*^f, \partial_*)$ . Par conséquent,  $f$  a un seul point critique libre, d'indice  $k_\infty$ , et le minimax de  $f$  est réalisé par ce point.  $\square$

Pour pouvoir utiliser cette caractérisation du minimax il faut se ramener au cas des fonctions de Morse excellentes, c'est-à-dire des fonctions génériques. Pour cela il suffit de “déformer” un peu notre fonction.

DÉFINITION 1.7. Une *déformation* de  $f$  est un élément  $g$  de  $C^2(\mathbf{R}^K; \mathbf{R})$  tel que  $g(\xi) = f(\xi)$  pour  $|\xi|$  assez grand. Une *petite déformation* de  $f$  est une déformation proche de  $f$  pour la norme  $C^2$ .

THÉORÈME 1.8. *Le minimax est stable par petites déformations de  $f$ .*

*Démonstration.* Soient  $c_1 < \dots < c_r$  les valeurs critiques de  $f$ ,  $\epsilon > 0$  fixé, assez petit pour que  $c_i + \epsilon < c_{i+1} - \epsilon$  pour tout  $i = 1, \dots, r-1$ . Si  $g$  est une déformation de  $f$  assez petite, ses valeurs critiques sont contenues dans la réunion des ensembles  $]c_i - \epsilon, c_i + \epsilon[$  (cf. Figure 3).

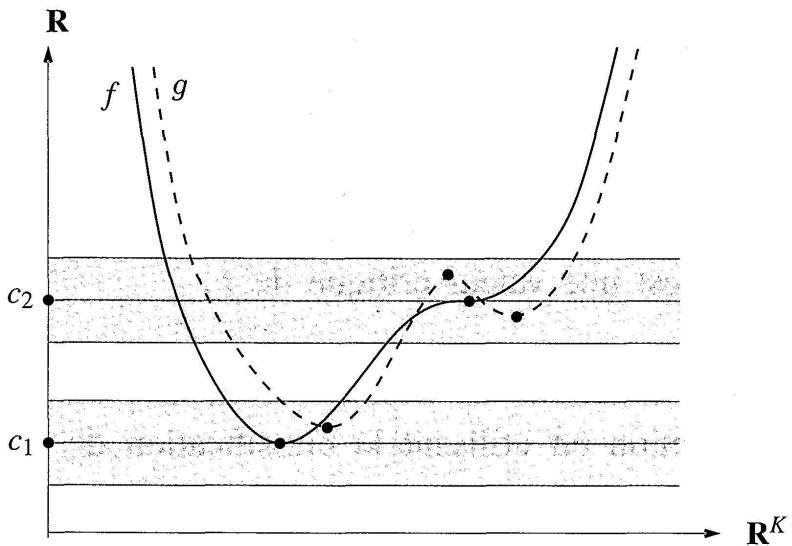


FIGURE 3

Petite déformation qui rend générique une fonction non de Morse

Par conséquent, pour tout  $i$ , les ensembles  $E^{c_i+\epsilon}$  et  $E_g^{c_i+\epsilon}$  sont difféomorphes, aussi bien que les ensembles  $E^{c_i-\epsilon}$  et  $E_g^{c_i-\epsilon}$ . Il s'ensuit que

$$\tilde{H}_*(E^{c_i+\epsilon}) \simeq \tilde{H}_*(E_g^{c_i+\epsilon}), \quad \tilde{H}_*(E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E_g^{-\infty}).$$

Si on pose

$$\begin{aligned} A_k &:= H_k(E^{-\infty}), & B_k &:= \tilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}), & C_k &:= \tilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}, E^{-\infty}), \\ A'_k &:= H_k(E_g^{-\infty}), & B'_k &:= \tilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}), & C'_k &:= \tilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty}), \end{aligned}$$

on a les suites exactes longues en homologie relative:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & A_k & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & A_{k-1} \longrightarrow B_{k-1} \dots \\ & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \star \downarrow & & \downarrow \simeq & \downarrow \simeq \\ \dots & A'_k & \longrightarrow & B'_k & \longrightarrow & C'_k & \longrightarrow & A'_{k-1} \longrightarrow B'_{k-1} \dots \end{array}$$

Le "lemme des cinq" bien connu entraîne que la flèche  $\star$ . est aussi un isomorphisme:  $\tilde{H}_k(E^{c_i+\epsilon}, E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_k(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty})$ . Si on note  $u = c_\ell$  le minimax de  $f$ , il en résulte que

$$\tilde{H}_{k_\infty}(E_g^{u+\epsilon}, E_g^{-\infty}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{H}_{k_\infty}(E_g^{c_i+\epsilon}, E_g^{-\infty}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \ell - 1,$$

donc le minimax de  $g$  appartient à l'ensemble  $[u - \epsilon, u + \epsilon]$ , ce qui démontre le théorème.  $\square$

Le minimax de  $f$  admet la construction "duale" naturelle suivante. Soient  $\check{E}^c := E_{-f}^{-c}$ ,  $j_\lambda: \check{E}^\lambda \hookrightarrow E$  la famille d'inclusions naturelles et  $\Delta$  un générateur de  $\tilde{H}_{K-k_\infty}(E, \check{E}^{+\infty}) \simeq \mathbf{Q}$ .

DÉFINITION. On appelle *max-min* de  $f$  le nombre

$$\max \min(f) := \sup\{\lambda \in \mathbf{R} \mid j_\lambda^* \Delta \neq 0\} = -\min \max(-f).$$

THÉORÈME 1.9. *Le minimax de  $f$  coïncide avec le max-min.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 1.8 on peut supposer  $f$  générique, donc de Morse excellente. Alors on déduit de la Proposition 1.5 que  $f$  et  $-f$  ont le même point critique libre.  $\square$

Le résultat suivant sera utile plus loin.

PROPOSITION 1.10. *Soit  $f$  une fonction excellente,  $\bar{\xi}$  un point critique dégénéré de  $f$ , de valeur critique  $c := f(\bar{\xi})$ . Supposons que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe deux déformations  $g, h$  de  $f$  telles que :*

- (i)  $g$  et  $h$  sont  $\epsilon$ -proches de  $f$  ;
- (ii)  $g$  n'a aucune valeur critique dans  $]c - \epsilon, c + \epsilon[$  ;
- (iii)  $h$  a deux valeurs critiques,  $c_1 = f(\bar{\xi}_1)$  et  $c_2 = f(\bar{\xi}_2)$  dans  $]c - \epsilon, c + \epsilon[$ , telles que  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont non dégénérés.

Alors  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont liés.

*Démonstration.* Le même argument que pour la preuve du Théorème 1.8 (où l'on considère  $E^{c-\epsilon}$  au lieu de  $E^{-\infty}$ ) montre que

$$\tilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) \simeq \tilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c-\epsilon}).$$

Or, d'après le Théorème 1.2, on a  $\tilde{H}_*(E_h^{c+\epsilon}, E_h^{c-\epsilon}) = 0$ . Par conséquent  $\tilde{H}_*(E_g^{c+\epsilon}, E_g^{c-\epsilon}) = 0$ , c'est-à-dire  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont incidents. Il s'ensuit que  $\bar{\xi}_1$  et  $\bar{\xi}_2$  sont liés (Proposition 1.3).  $\square$

## 2. LA SOLUTION DE MINIMAX

### 2.1 RAPPELS DE GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Soit  $X$  une variété différentielle de dimension  $n$ ,  $T^*X = \{(x; y)\}$  le fibré cotangent<sup>3)</sup> de  $X$ ,  $\pi: T^*X \rightarrow X$  la projection naturelle  $(x, y) \mapsto x$ . Le fibré  $T^*X$ , muni de la forme symplectique canonique  $dy \wedge dx$ , est une variété symplectique de dimension  $2n$ .

<sup>3)</sup> Pas nécessairement trivial.

On appelle *isotopie hamiltonienne*<sup>4)</sup> le flot au “temps”  $T$  d’un hamiltonien

$$h: [0, T] \times T^*X \rightarrow T^*X.$$

Deux sous-variétés du fibré cotangent sont *isotopes* s’il existe une isotopie qui transforme l’une dans l’autre. Une sous-variété de  $T^*X$  est *lagrangienne* si sa dimension est égale à la dimension de la base  $X$  du fibré et si la forme symplectique s’annule sur cette sous-variété. Une isotopie transforme des sous-variétés lagrangiennes en sous-variétés lagrangiennes.

DÉFINITION. Une *famille génératrice* (globale) d’une sous-variété lagrangienne  $L$  du fibré cotangent est une famille de fonctions  $\{S_\xi: X \rightarrow \mathbf{R}\}_{\xi \in \mathbf{R}^K}$ , dépendant des paramètres  $\xi \in \mathbf{R}^K$ , telle que :

- la fonction  $S: X \times \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$ , définie par  $S(x; \xi) := S_\xi(x)$ , est de classe  $C^2$  ;
- 0 est une valeur régulière de l’application  $(x; \xi) \mapsto \partial_\xi S(x; \xi)$ , c’est-à-dire :

$$\text{rk}(\partial_{\xi\xi}^2 S, \partial_{\xi x}^2 S)|_{\{\partial_\xi S=0\}} = K.$$

- la famille engendre la sous-variété lagrangienne

$$L = \{(x, \partial_x S(x; \bar{\xi})) \mid \exists \bar{\xi} \in \mathbf{R}^K : \partial_\xi S(x; \bar{\xi}) = 0\}.$$

Etant donnée une famille génératrice  $S: X \times \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$  d’une sous-variété lagrangienne, les opérations suivantes permettent de construire une nouvelle famille génératrice  $T$  (de paramètres  $\eta$ ) de la même sous-variété :

- (o) *Addition d’une constante*: si  $C \in \mathbf{R}$ , on pose  $\eta = \xi$  et  $T(x; \eta) = S(x; \xi) + C$  ;
- (i) *Stabilisation*: si  $K' \in \mathbf{N}$  et  $Q$  est une forme quadratique non dégénérée de  $\mathbf{R}^{K'}$ , on pose  $\eta = (\xi, \xi')$  et  $T(x; \eta) = S(x; \xi) + Q(\xi')$  .
- (ii) *Difféomorphisme*: si  $(x; \eta) \mapsto (x, \xi(x, \eta))$  est un difféomorphisme préservant les fibres du fibré trivial  $X \times \mathbf{R}^K \rightarrow X$ , on pose  $T(x; \eta) = S(x; \xi(x, \eta))$ .

On remarque que l’opération de stabilisation augmente le nombre de paramètres de la famille génératrice.

DÉFINITION. On dit que deux familles génératrices sont *équivalentes* si l’on peut obtenir l’une à partir de l’autre à l’aide d’une suite d’opérations (o), (i) et (ii).

---

<sup>4)</sup> Dans la suite on ne considérera que des isotopies hamiltoniennes.

En fait, il se trouve que si deux familles sont équivalentes, on peut obtenir l'une de l'autre par une stabilisation, suivie d'un difféomorphisme et de l'addition d'une constante.

**DÉFINITION.** Une famille génératrice est *quadratique à l'infini* (fgqi) s'il existe une forme quadratique non dégénérée  $Q_\infty$  telle que  $S(x; \xi) = Q_\infty(\xi)$ , pour  $|\xi|$  assez grand.

Les fgqi sont une classe très importante de fonctions génératrices pour le résultat suivant d'existence (dû à Sikorav, voir [Sik]) et d'unicité (dû à Viterbo, voir [Vi1], [The]).

**THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE SIKORAV-VITERBO.** *Si  $X$  est une variété fermée<sup>5)</sup>, toute sous-variété lagrangienne de  $T^*X$  isotope à la section nulle  $\{(x; 0) \mid x \in X\}$  admet une fgqi; de plus, toutes les fgqi d'une telle sous-variété sont équivalentes.*

### REMARQUES.

(1) Le théorème reste vrai dans le cas des variétés non compactes si l'isotopie est à support compact ou, ce qui revient au même, si la variété est transversale à la base  $X$  en dehors d'un compact, c'est-à-dire si la projection  $\pi$  est une bijection entre  $L$  et  $X$ .

(2) Il existe une version de contact (pour les sous-variétés legendriennes de  $J^1X$ ) du théorème d'existence de Sikorav, dû à Yu. Chekanov ([Ch1]), mais pas, à ma connaissance, pour le théorème d'unicité de Viterbo.

**DÉFINITION.** Soit  $\Sigma_L := \{(x, y) \in L \mid \text{rk } D\pi(x, y) < \dim X\}$  l'ensemble des *points singuliers* de  $L$ . La *caustique* de  $L$  est la projection  $\pi(\Sigma_L)$  sur  $X$  de l'ensemble des points singuliers.

Généralement, l'ensemble des points singuliers est l'union de la variété régulière de codimension 1 des points singuliers simples (où le rang de  $D\pi$  est  $\dim X - 1$ ) et d'une réunion finie de variétés de codimension au moins 3 (voir [Ar1]).

On rappelle que  $L$  est *exacte* si la 1-forme de Liouville  $y dx$ , restreinte à  $L$ , est exacte, c'est-à-dire s'il existe une fonction  $\zeta: L \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $y dx|_L = d\zeta$ . Si c'est le cas, on peut associer à  $L$  une sous-variété legendrienne

---

<sup>5)</sup> C'est-à-dire compacte et sans bord.

$\widehat{L}$  de l'espace  $J^1X = \{(x, z, y)\}$  des jets d'ordre 1 sur  $X$  (muni de la forme de contact standard  $dz - y dx$ ), définie à une constante en  $z$  près :

$$\widehat{L} := \{(q, \zeta(q, p), p) \mid (q, p) \in L\}.$$

DÉFINITION. On appelle *front d'onde* ou *diagramme de Cerf* de  $L$  l'image  $F_L$  de  $\widehat{L}$  par la projection  $(x, z, y) \mapsto (x, z)$  dans l'espace  $J^0X = \{(x, z)\}$  des jets d'ordre 0 sur  $X$ .

Soit  $S(x; \xi)$  une fgqi de  $L$ .

DÉFINITION. L'*ensemble de Maxwell*  $M_L$  de  $L$  est l'ensemble des points  $x \in X$  tels que la fonction de Morse  $\xi \mapsto S(x; \xi)$  n'est pas excellente.

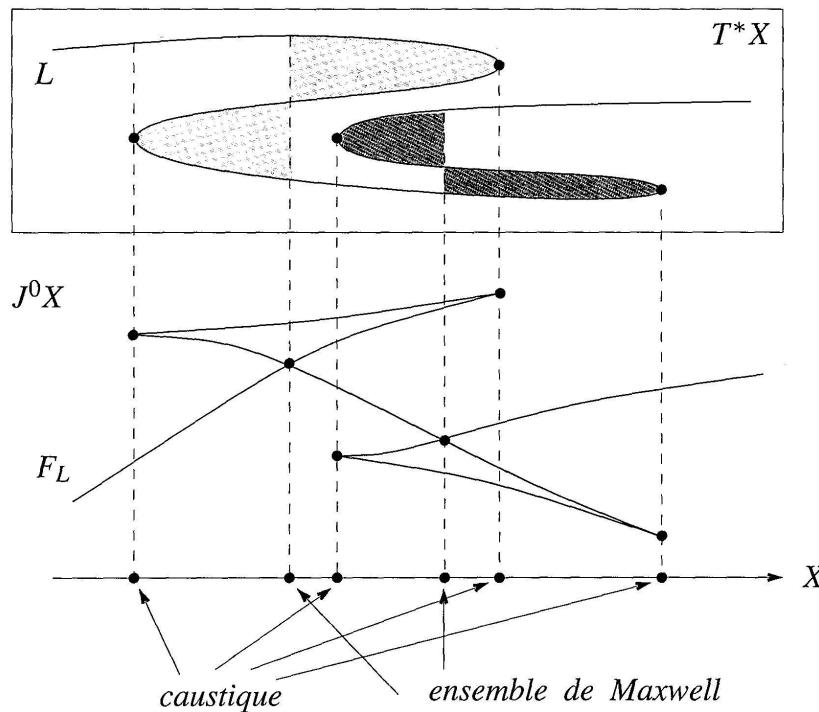


FIGURE 4

Caustique et ensemble de Maxwell d'une courbe lagrangienne et du front associé

#### REMARQUES.

- (1) D'après le théorème d'unicité de Viterbo, l'ensemble de Maxwell ne dépend que de  $L$ .
- (2) La projection naturelle  $F_L \rightarrow X$  est une fibration en dehors de la caustique et de l'ensemble de Maxwell (cf. Figure 4).

(3) L'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique est une hypersurface stratifiée (c'est-à-dire une réunion finie de variétés lisses, les *strates*, connexes par arcs, deux à deux disjointes, telles que la fermeture de chaque strate est la même strate et une réunion finie de strates de dimension plus petite), voir [Ar2].

(4) La caustique et l'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique ont mesure nulle.

## 2.2 LA SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE $(PC)$

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi sur une variété  $Q$  (sans bord, mais pas forcément compacte) de hamiltonien  $H : [0, +\infty[ \times T^*Q \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^2$  dans  $]0, +\infty[ \times T^*Q$  et continue au bord, et donnée initiale  $u_0 : Q \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^1$  :

$$(PC) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, q) + H(t, q, \partial_q u(t, q)) = 0, & \forall t > 0, q \in Q \\ u(0, q) = u_0(q), & \forall q \in Q. \end{cases}$$

Dans cette section on construit une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent de l'espace temps, la solution géométrique de  $(PC)$ . Le théorème de Sikorav-Viterbo permet de lui associer une “unique” fgqi  $S(t, q; \xi)$ . Cette fonction est définie à une constante additive près; une fois cette constante convenablement fixée,  $S$  est une solution, en générale multivoque, de  $(PC)$ . Son graphe<sup>6)</sup>

$$\{(t, q, S(t, q; \tilde{\xi})) \mid \partial_\xi S(t, q; \tilde{\xi}) = 0\}$$

est le front d'onde de la solution géométrique.

Dans la prochaine section on utilisera la méthode de minimax pour choisir en tout point  $(t, q)$  un unique point critique de  $\xi \mapsto S(t, q; \xi)$ ; on obtiendra de cette manière une section du front, qui s'avère être le graphe d'une fonction bien définie, solution faible de  $(PC)$ .

Sur le fibré cotangent  $T^*Q = \{(q, p)\}$ , muni de la forme symplectique canonique  $dp \wedge dq$ , le champ hamiltonien  $X_H = (\partial_p H, -\partial_q H)$  induit le flot  $\phi : [0, +\infty[ \times T^*Q \rightarrow T^*Q$ . Ses composantes  $\phi^t(q, p) = (\tilde{q}(t), \tilde{p}(t))$ , que l'on appelle les *caractéristiques* de  $X_H$ , sont les solutions des équations de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{q}(t) = \partial_p H(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)), \\ \frac{d}{dt} \tilde{p}(t) = -\partial_q H(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)), \end{cases}$$

telles que  $\tilde{q}(0) = q$  et  $\tilde{p}(0) = p$ .

---

<sup>6)</sup> Plus précisément, le contour apparent du graphe de  $S$ , projection le long de l'axe des  $\xi$ .

Soit  $\Lambda_0 := \{(q, du_0(q)) \mid q \in Q\}$  la sous-variété lagrangienne de  $T^*Q$  engendrée par la donnée initiale, et  $\Lambda_t := \phi^t(\Lambda_0)$  son évolution au temps  $t$ .

#### REMARQUES.

- (1) La sous-variété  $\Lambda_0$  est isotopie à la section nulle de  $T^*Q$ , l'isotopie étant engendrée par l'hamiltonien  $-u_0$ .
- (2) Chaque  $\Lambda_t$  est isotopie à la section nulle de  $T^*Q$ ; en effet  $\Lambda_t$  est isotopie à  $\Lambda_0$  par l'isotopie  $\phi^{-t}$ , et les isotopies forment un groupe.
- (3) Il s'ensuit que  $\Lambda_t$  est exacte et, d'après le théorème de Viterbo, admet une unique fgqi  $S_t(q; \xi)$ .

Considérons maintenant la variété “espace-temps”  $\mathcal{Q} := \mathbf{R} \times Q$ , et son fibré cotangent  $T^*\mathcal{Q} = \{(t, q; \tau, p)\}$ , muni de la forme symplectique  $dp \wedge dq + d\tau \wedge dt$ . Le hamiltonien autonome  $\mathcal{H}(t, q; \tau, p) := \tau + H(t, q, p)$  engendre le flot  $\Phi: [0, +\infty[ \times T^*\mathcal{Q} \rightarrow T^*\mathcal{Q}$ , de composantes

$$\Phi^s(t, q; \tau, p) = (t + s, \tilde{q}(t + s); \tilde{\tau}(t + s), \tilde{p}(t + s)),$$

où  $\tilde{q}, \tilde{p}$  sont les caractéristiques de  $X_H$  telles que  $\tilde{q}(t) = q$  et  $\tilde{p}(t) = p$ , et  $\tilde{\tau}(t) = -H(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t))$ .

Pour tout  $t \geq 0$ , considérons l'application

$$i_t: T^*Q \rightarrow T^*\mathcal{Q}, \quad (q, p) \mapsto (t, q; -H(t, q, p), p).$$

Un calcul direct montre que la variété que l'on obtient par la réunion des courbes caractéristiques du flot  $\Phi$ , sortant de  $i_0(\Lambda_0)$ ,

$$\Lambda := \bigcup_{s>0} \Phi^s(i_0(\Lambda_0)) \subset T^*\mathcal{Q},$$

est lagrangienne. De même, pour tout  $T > 0$  fixé, la sous-variété de  $T^*\mathcal{Q}$

$$\Lambda^T := \bigcup_{0 < s < T} \Phi^s(i_0(\Lambda_0))$$

est aussi lagrangienne.

**DÉFINITION.** On appelle  $\Lambda$  la *solution géométrique* de (PC), et  $\Lambda^T$  la *solution géométrique tronquée* au temps  $T$ .

**REMARQUE.** Pour  $s$  fixé,  $\Phi^s$  translate  $\Lambda$  d'un temps  $s$  le long les caractéristiques, c'est-à-dire :

$$\Phi^s(i_t(\Lambda_t)) = \Phi^s \circ \Phi^t(i_0(\Lambda_0)) = \Phi^{s+t}(i_0(\Lambda_0)) = i_{s+t}(\Lambda_{t+s})$$

(propriété de semi-groupe du flot).

THÉORÈME 2.1. *Pour tout  $T > 0$ , la solution géométrique tronquée au temps  $T$  est isotope à la section nulle  $\{(t, q; 0, 0) \mid -T < t < 0, q \in Q\}$ .*

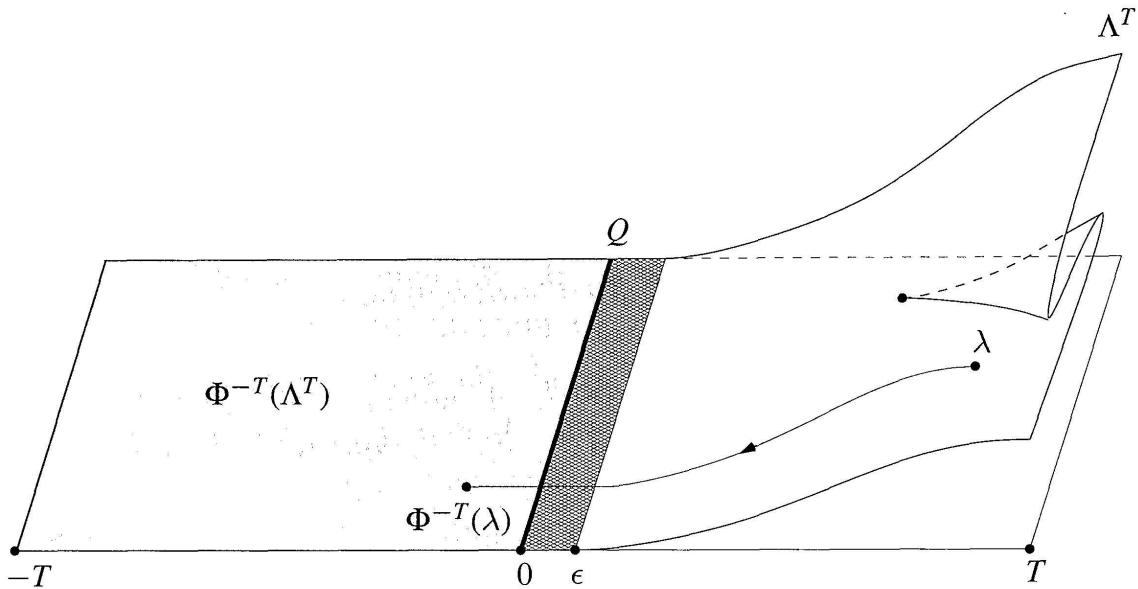


FIGURE 5

L'isotopie entre la solution géométrique tronquée et la section nulle

*Démonstration.* Puisque pour des temps petits il existe une solution classique de  $(PC)$ , il est facile de se ramener, par une isotopie, au cas où la solution géométrique  $\Lambda$  coïncide avec la section nulle pour tout temps inférieur à un certain  $\epsilon > 0$  assez petit. Alors pour tout  $t < \epsilon' < \epsilon$ , on a  $H(t, q, p) = 0$ . On peut considérer l'extension suivante de  $H$ , de classe  $C^2$ :

$$\tilde{H}(t, q, p) := \begin{cases} H(t, q, p), & \text{pour tout } t \geq 0, (q, p) \in T^*Q, \\ 0 & \text{pour tout } t \leq 0, (q, p) \in T^*Q. \end{cases}$$

Le flot  $\tilde{\Phi}$  engendré par  $\tilde{\mathcal{H}} := \tau + \tilde{H}$  étend le flot  $\Phi$  à  $\mathbf{R}$  tout entier. La sous-variété lagrangienne

$$\tilde{\Lambda} := \bigcup_{s \in \mathbf{R}} \tilde{\Phi}^s(i_0(\Lambda_0))$$

de  $T^*Q$  coïncide avec  $\Lambda$  dans le demi-espace  $\{t > 0\}$  et avec la section nulle dans  $\{t < 0\}$ . Par conséquent, pour tout  $T > 0$  fixé,  $\tilde{\Phi}^{-T}$  est une isotopie entre  $\Lambda^T$  et la section nulle (cf. Figure 5).  $\square$

On peut ainsi appliquer le théorème de Sikorav-Viterbo aux solutions géométriques tronquées de  $(PC)$ .

**COROLLAIRE.** *Pour tout  $T > 0$  fixé,  $\Lambda^T$  admet une unique fgqi  $S(t, q; \xi)$  (modulo les opérations d'équivalence (i) et (ii)), telle que son graphe restreint à  $t = 0$  coïncide avec le graphe de la donnée initiale  $u_0$ .*

Dans la suite,  $S$  sera toujours une telle fgqi.

*Démonstration.* Soit  $\tilde{S}(t, q; \xi)$  l'unique fgqi de  $\Lambda^T$ . Or, cette fonction est une primitive de la forme de Liouville  $p dq$  de  $\Lambda_0$  :

$$d\tilde{S}(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = du_0(q) dq,$$

où  $\bar{\xi}_0(q)$  est le seul point critique de  $\xi \mapsto S_0(q; \xi)$ . Par conséquent il existe une unique constante  $C$  telle que  $S := \tilde{S} + C$  vérifie  $S(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$  pour tout  $q \in Q$ .  $\square$

**REMARQUE.** On peut construire une famille génératrice globale de la solution géométrique  $\Lambda$  comme suit. La *fonctionnelle d'action*  $\int pdq - Hdt$  est une famille génératrice formelle (l'espace de paramètre étant de dimension infinie) de  $\Lambda$ . En utilisant une méthode de point fixe, proposée par Amann-Conley-Zehnder, on obtient une vraie fonction génératrice, voir [Car].

### 2.3 LA SOLUTION DE MINIMAX

Soient  $t > 0, q \in Q$  et  $S(t, q; \xi)$  la fgqi de la solution géométrique tronquée  $\Lambda^T$ , pour  $T > t$ . La fonction  $\xi \mapsto S(t, q; \xi)$  est quadratique à l'infini, donc on peut lui associer le niveau critique de minimax, étudié au § 1.3.

**DÉFINITION** (Chaperon). On appelle *solution de minimax* de (PC) la fonction

$$u(t, q) := \min \max \{ \xi \mapsto S(t, q; \xi) \}.$$

**REMARQUE.** L'autre solution que l'on peut construire avec ce même argument (cf. [Cha]), la *solution de max-min* est, pour le Théorème 1.9, la même solution.

M. Chaperon ([Cha]), T. Joukovskaïa ([Jou]), C. Viterbo ([Vi2]) ont étudié les propriétés de cette fonction; en particulier Joukovskaïa a classifié les singularités génériques de  $u$  en dimension petite ( $\dim Q \leq 2$ ).

THÉORÈME 2.2 (Chaperon). *La solution de minimax est une solution faible<sup>7)</sup> de (PC), lipschitzienne sur chaque intervalle compact  $[0, T]$ , et indépendante du choix de la fgqi.*

REMARQUE. Pour le Théorème 1.8, on peut supposer, sans perte de généralité, que la solution géométrique de (PC) soit générique. Dans ce cas l'ensemble  $\pi(\Sigma) \cup M_\Lambda$  est de mesure nulle.

*Démonstration.* Soit  $\Lambda$  générique. La continuité de la solution de minimax  $u$  est une conséquence immédiate de la stabilité du minimax par petites déformations. En effet, fixons un point  $(t_0, q_0)$  de l'espace-temps et un  $\epsilon > 0$ . Pour tout  $(t, q)$  assez proche de  $(t_0, q_0)$ , la fonction  $\xi \mapsto S(t, q; \xi)$  est une perturbation de  $\xi \mapsto S(t_0, q_0; \xi)$  aussi petite que l'on veut. D'après le Théorème 1.8, on déduit que  $|u(t_0, q_0) - u(t, q)| < \epsilon$ .

Les autres propriétés de la solution de minimax sont simples à démontrer; on renvoie pour les détails aux travaux déjà cités.

Soit  $(t_0, q_0) \notin M_\Lambda$ ,  $t_0 > 0$ . Par le théorème de la fonction implicite il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $(t_0, q_0)$  dans  $]0, +\infty[ \times Q$  où le point critique libre de  $\xi \mapsto S(t, q; \xi)$  est une fonction  $\bar{\xi}(t, q)$  de classe  $C^1$ , définie par  $\partial_\xi S(t, q; \xi) = 0$ . Alors pour tout  $(t, q) \in \mathcal{U}$  on a  $u(t, q) = S(t, q; \bar{\xi}(t, q))$ , donc  $u$  est de classe  $C^1$ , et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; en effet

$$\partial_t u(t, q) = \partial_t S(t, q; \bar{\xi}(t, q)), \quad \partial_q u(t, q) = \partial_q S(t, q; \bar{\xi}(t, q)),$$

et par définition de fgqi on a  $\partial_t S(t, q; \bar{\xi}(t, q)) + H(t, q, \partial_q S(t, q; \bar{\xi}(t, q))) = 0$ . Donc, en dehors de l'ensemble de Maxwell de  $\Lambda$ ,  $u$  est dérivable et vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi. La solution de minimax satisfait la donnée initiale, parce que l'on a choisi la fgqi de la solution géométrique telle que  $S(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$ , où  $\bar{\xi}_0(q)$  est le seul point critique de  $\xi \mapsto S(0, q; \xi)$ .

Pour tout  $0 < T < +\infty$ ,  $u|_{[0, T]}$  est lipschitzienne: en effet  $H$  et  $u_0$  sont lipschitziens, donc en un temps fini les espaces tangents aux fronts d'onde ne sont jamais verticaux.

On déduit enfin du théorème de Viterbo que  $u$  ne dépend pas du choix de  $S$  parmi les fgqi de  $\Lambda$  telles que  $S(0, q; \bar{\xi}(q)) = u_0(q)$ .  $\square$

REMARQUE. Viterbo a montré que les mêmes résultats restent vrais pour hamiltoniens et données initiales seulement lipschitziens, voir [Vi2]. On approche  $H$  et  $u_0$  par des suites de fonctions  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{u_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,

<sup>7)</sup> C'est-à-dire  $u$  est continue et presque partout dérivable, et en ces points vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi; de plus  $u$  satisfait la donnée initiale.

suffisamment régulières, convergentes vers  $H$  et  $u_0$  respectivement. Pour chaque  $n \in \mathbf{N}$  on construit la solution de minimax  $u_n$  du problème de Cauchy de hamiltonien  $H_n$  et donnée initiale  $(u_{0,n})$ ; il suit que la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  est la solution de minimax du problème de Cauchy de hamiltonien  $H$  et donnée initiale  $u_0$ .

### 3. CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SOLUTION DE MINIMAX

#### 3.1 NOTATIONS

Soit  $J^0\mathbf{R} = \{(q, z)\} \simeq \mathbf{R}^2$  l'espace des jets d'ordre 0 sur  $\mathbf{R}$ ,  $\pi_0: J^0\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la projection naturelle  $(q, z) \mapsto q$ . Un front d'onde dans  $J^0\mathbf{R}$  est la projection dans  $J^0\mathbf{R}$  d'une courbe legendrienne de  $J^1\mathbf{R} = \{(q, z, p)\} \simeq \mathbf{R}^3$  par  $\pi_1: (q, z, p) \mapsto (q, z)$ . Pour un front générique, les seules singularités possibles sont des cusps et des auto-intersections transverses.

Soit  $F$  un front de  $J^0\mathbf{R}$ . On appelle *section* de  $F$  toute partie connexe maximale  $\sigma$  qui est le graphe d'une fonction  $\chi_\sigma: \pi_0(\sigma) \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^1$  par morceaux. Une *branche* de  $F$  est une section de classe  $C^1$ .

Un front est *long* si, en dehors d'un compact de  $\mathbf{R}$ , il est le graphe d'une fonction, *plat* si sa tangente n'est jamais verticale. On peut dans ce cas coorienter le front en fixant en tout point le vecteur orthonormal dont la coordonnée en  $z$  est positive. Si le front est ainsi orienté, on peut distinguer deux types de cusp: *montant*, si en suivant le front, on passe d'une branche à l'autre en la direction de la normale fixée, *descendant* si on passe en la direction opposée.

Deux courbes legendriennes de  $J^1\mathbf{R}$  sont *isotopes* (par une isotopie *legendrienne*) s'il existe un chemin de l'une à l'autre dans l'espace des courbes legendriennes plongées de  $J^1\mathbf{R}$ . Pour la famille correspondante de fronts les perestroikas qui interviennent génériquement sont montrés à la Figure 6; il s'agit des projections des mouvements de Reidemeister pour les noeuds relèvement des fronts dans l'espace de contact (voir par exemple [Ar3]): *queue d'aronde* ( $Q$ ), *pyramide* ( $P$ ), *porte-monnaie* ( $B$ ) et *auto-tangence sûre*<sup>8</sup> ( $J^-$ ).

Les auto-tangences dangereuses<sup>9</sup>) sont interdites car elles correspondent à un point d'auto-intersection de la courbe legendrienne dont le front est la projection. Pour un front plat toutes les auto-tangences sont dangereuses.

---

<sup>8</sup>) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est opposée.

<sup>9</sup>) Au point d'auto-tangence la coorientation des deux branches est la même.

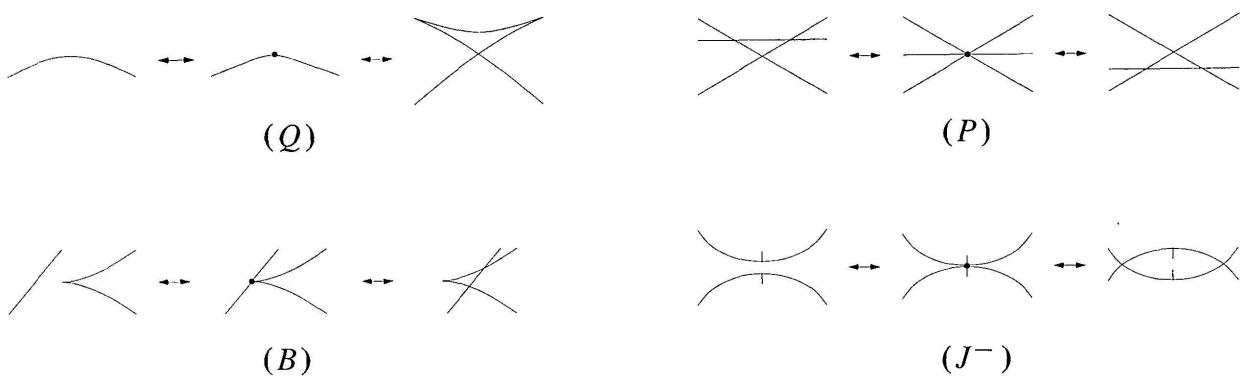


FIGURE 6  
Singularités permises dans l'isotopie entre deux fronts

Le nombre de cusps d'un front, comptés avec leur signe (positif pour les cusps montants, négatif pour les cusps descendants), le *nombre de Maslov*, est invariant par isotopies legendriennes.

### 3.2 DÉCOMPOSITIONS ADMISSIBLES (D'APRÈS CHEKANOV ET PUSHKAR)

Dans cette section on rappelle brièvement la construction d'un nouvel invariant des noeuds legendriens, dû à Yu. Chekanov et P. Pushkar, qui permettra d'établir une caractérisation géométrique de la solution de minimax.

La projection d'un noeud legendrien de  $J^1\mathbf{R}$  dans  $J^0\mathbf{R}$  par  $\pi_1$  est un front fermé. Soit  $\Sigma$  un tel front, générique.

On appelle *décomposition* de  $\Sigma$  des courbes  $X_1, \dots, X_n$  fermées, ayant un nombre fini d'auto-intersections, telles que pour  $i \neq j$ ,  $X_i \cap X_j$  contient un nombre fini de points, et  $X_1 \cup \dots \cup X_n = \Sigma$ .

Un point double  $x \in X_i \cap X_j$  de  $\Sigma$  est un *point de saut* si  $X_i$  et  $X_j$  ne sont pas lisses en  $x$ , *de Maslov* si le nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui séparent le long du front les deux branches se coupant en  $x$  est 0.

**DÉFINITION.** Une décomposition  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\Sigma$  est *admissible* si :

- (1) chaque  $X_i$  est homéomorphe au bord d'un disque :  $\partial X_i = B_i$  ;
- (2) pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $q \in \mathbf{R}$ , l'ensemble

$$B_i(q) := \{z \in \mathbf{R} \mid (q, z) \in B_i\}$$

est connexe; en particulier si c'est un point, ce point est un cusp du front;

- (3) si  $(q_0, z) \in X_i \cap X_j$  ( $i \neq j$ ) est un point de saut alors pour  $q \neq q_0$ , assez proche  $q_0$ , l'ensemble  $B_i(q) \cap B_j(q)$  est soit  $B_i(q)$ , soit  $B_j(q)$ , soit vide;
- (4) les points de sauts sont tous de Maslov.

## REMARQUES.

(1) Il suit des conditions (1) et (2) que chaque courbe  $X_i$  a exactement deux cusps, qui divisent la courbe en deux parties, que l'on note  $\sigma_i^+$  et  $\sigma_i^-$  (avec la convention suivante : pour tout  $(q, z_i^\pm) \in \sigma_i^\pm$  générique, on a  $z_i^- < z_i^+$ ).

(2) La condition (3) équivaut à demander qu'aucun point de saut ne réalise l'une des *configurations interdites* montrées à la Figure 7.

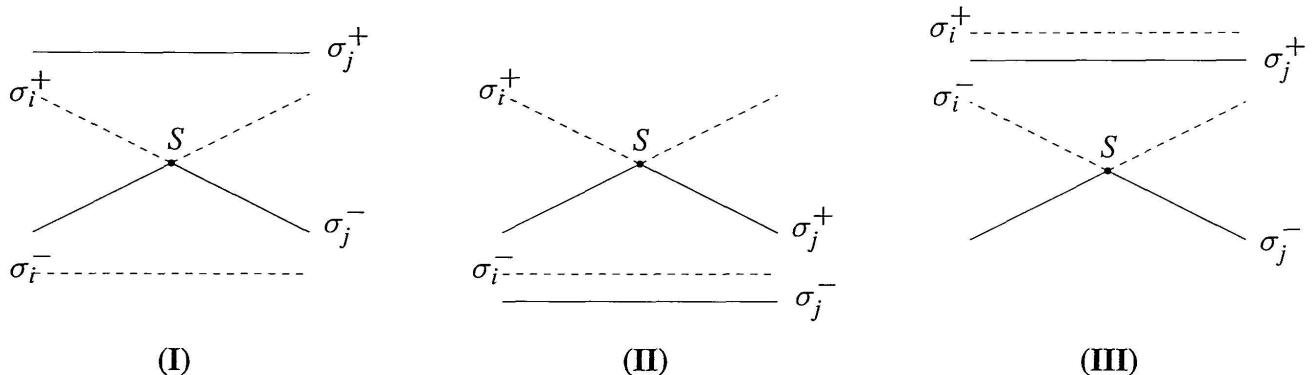


FIGURE 7

Configurations interdites autour des points de saut

Notons par  $\#(\mathcal{D})$  le nombre de courbes  $X_i$  et par  $\#(\mathcal{S})$  le nombre de points de saut dans une décomposition admissible  $\mathcal{D}$  du front  $\Sigma$ .

**THÉORÈME DE CHEKANOV-PUSHKAR** ([Ch2], [C-P]). *Le nombre de décompositions admissibles d'un front projection d'un nœud legendrien est invariant par isotopies legendriennes du nœud; de plus, le nombre  $\#(\mathcal{D}) - \#(\mathcal{S})$  est constant le long de l'isotopie.*

**EXEMPLE 3.1.** La Figure 8 montre deux décompositions d'un front générique, projection d'un nœud legendrien. Le front est isotope au front lèvre (le front ayant deux cusps et aucune auto-intersection), donc; d'après le théorème de Chekanov-Pushkar, la décomposition (1) est la seule admissible.



FIGURE 8

### 3.3 CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DU MINIMAX

Revenons au problème de Cauchy (*PC*), notamment dans le cas  $Q = \mathbf{R}$ :

$$(PCR) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, q) + H(t, q, \partial_q u(t, q)) = 0, & \forall t > 0, q \in \mathbf{R} \\ u(0, q) = u_0(q), & \forall q \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Fixons  $t_0 > 0$ . Soit  $S(t, q; \xi)$  une fgqi de la solution géométrique  $\Lambda$  de (*PCR*) (ou, plus précisément, une fgqi de la solution géométrique tronquée  $\Lambda^T$ , avec  $T > t_0$ ). D'après le théorème d'unicité de Viterbo,  $S_{t_0}(q; \xi) := S(t_0, q; \xi)$  est la fgqi de  $\Lambda_{t_0} = \Lambda \cap T^*(\{t_0\} \times \mathbf{R})$ ; il s'ensuit que les solutions de minimax associées à  $\Lambda$  et  $\Lambda_{t_0}$  ont la même valeur aux points  $(t_0, q_0)$  et  $q_0$  respectivement, à savoir  $\min \max \{\xi \mapsto S(t_0, q_0; \xi)\}$ .

**DÉFINITION.** On appelle *solution multivoque* un front de  $J^0 \mathbf{R}$  long plat, isotope au front nul  $\{(q, 0) \in J^0 \mathbf{R}\}$ , projection d'une courbe légendrienne (plongée) transversale à la base en dehors d'un compact.

Dans la suite on suppose ces fronts orientés par l'orientation induite par la première composante de  $J^0 \mathbf{R}$ . Il résulte des sections 2.2 et 2.3 que le front d'onde de  $\Lambda_{t_0}$ , graphe de  $S_{t_0}$ , est de type solution multivoque.

**REMARQUE.** Le théorème d'unicité de Viterbo permet de ramener le problème de déterminer la solution de minimax d'un problème de Cauchy (*PC*) quelconque au cas  $Q = \mathbf{R}$ . En effet, considérons la solution  $\Lambda^T$  du problème général. Soient  $S(t, q; \xi)$  sa fgqi et  $F$  le front d'onde de  $\Lambda^T$ , graphe de  $S$ . Si  $\gamma$  est une courbe lisse, paramétrée par  $\mathbf{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in ]0, T[ \times Q$  et sans aucun point singulier, la restriction  $\Lambda_\gamma$  de la solution géométrique au fibré cotangent de  $\gamma$  est une sous variété lagrangienne. Une fois identifié  $\gamma$  à  $\mathbf{R}$ ,  $(s, \xi) \mapsto S(\gamma(s); \xi)$  est la fgqi de  $\Lambda_\gamma \subset T^* \mathbf{R}$  (théorème d'unicité); son graphe  $F_\gamma$  coïncide avec la restriction de  $F$  à  $J^0 \gamma \simeq J^0 \mathbf{R}$ . Donc pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , le minimax de  $F_\gamma$  au point  $s$  est égal au minimax de  $F$  au point  $\gamma(s)$ .

De plus, on peut choisir  $\gamma$  de manière que  $F_\gamma$  soit un front de type solution multivoque. En effet  $F_\gamma$  est plat car  $F$  l'est. Pour que  $F_\gamma$  soit long, on peut choisir  $\gamma$  comme suit: si  $Q = \mathbf{R}^n$  on prend n'importe quelle droite  $d$  dans  $\{t_0\} \times Q$ ; sinon on choisit pour  $\gamma$  une courbe telle que  $\gamma(\pm\infty) \in \{0\} \times Q$ . Pour montrer que le front  $F_\gamma$  est isotope à un front qui est le graphe d'une fonction (et donc au front nul), considérons dans l'espace des courbes lisses dans  $]0, T[ \times Q$  sans singularités un chemin  $\{\gamma_r\}$  entre  $\gamma_0 = \gamma$  et  $\gamma_1 = \{0\} \times d$  dans le premier cas et entre  $\gamma$  et une courbe contenue en  $t = 0$  dans le second

(voir la Figure 9). Alors pour tout chemin générique de ce type,  $\{F_{\gamma_r}\}$  est l'isotopie cherchée<sup>10)</sup>.

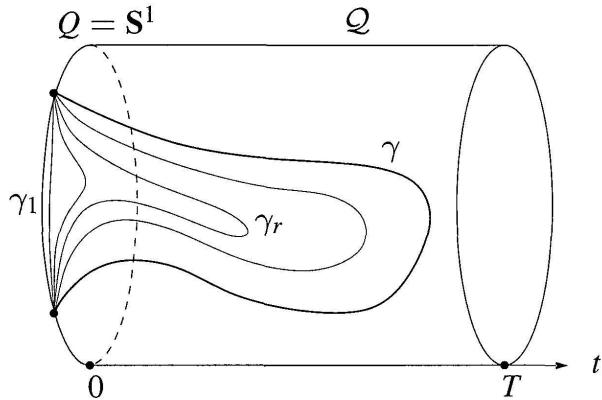


FIGURE 9

Réduction au cas unidimensionnel (dans le cas  $Q = \mathbf{S}^1$ )

Dans la suite on va donc étudier le minimax d'un front d'onde de  $J^0\mathbf{R}$  de type solution multivoque, graphe d'une fgqi  $S(q; \xi)$ . Nous allons donner l'équivalent global (pour tout  $q \in \mathbf{R}$ ) de la subdivision des points critiques de  $\xi \mapsto S(q; \xi)$  (pour chaque  $q \in \mathbf{R}$  fixé) en point critique libre et couples de points critiques liés. La section du front parcourue par le point critique libre de  $S$  lorsque  $q$  parcourt  $\mathbf{R}$  est le graphe de la solution de minimax.

Pour utiliser le théorème de Chekanov et Pushkar il faut fermer le front en ajoutant une section à l'infini. Ce nouveau front est le graphe d'une fonction qui n'a aucun point critique libre. Lorsque  $q$  parcourt  $\mathbf{R}$ , chaque couple de points critiques liés parcourt sur le front une courbe fermée (ayant deux cusps). Ces courbes fermées sont la seule décomposition admissible du front; en particulier une de ces courbes est formée par le graphe de la solution de minimax et la section à l'infini. Par conséquent, étant donné un front de type solution multivoque, on peut déterminer le graphe de la solution de minimax à l'aide de la décomposition admissible de ce front.

Soit  $\alpha$  une branche de  $F$ ; d'après le théorème de la fonction implicite il existe une application lisse  $\bar{\xi}_\alpha: \pi_0(\alpha) \rightarrow \mathbf{R}^K$  telle que  $\alpha$  soit le graphe de  $q \mapsto S(t_0, q; \bar{\xi}_\alpha(q))$ . Pour tout point  $q$  à l'intérieur de  $\pi_0(\alpha)$ ,  $\bar{\xi}_\alpha(q)$  est un point critique non dégénéré de  $S$ . Son indice  $\text{ind}(\bar{\xi}(q))$  ne dépend pas de  $q$ . On appelle *indice* de  $\alpha$  le nombre (indépendant du choix de  $S$ )  $\text{ind}(\bar{\xi}(q)) - k_\infty$  (où  $k_\infty$  est l'indice de la forme quadratique de  $S$ ).

<sup>10)</sup> Cela n'est pas vrai en général pour tout chemin: un front  $F_{\gamma_r}$  pourrait avoir des auto-tangences, qu'on peut faire disparaître par une perturbation arbitrairement petite du chemin, puisque le front  $F$  n'a pas d'auto-tangences.

En tout point générique  $q \in \mathbf{R}$ , considérons les couples de points critiques liés de  $\xi \mapsto S(q; \xi)$ . Si le front est générique et si  $2n$  est le nombre de cusps de  $F$ , cela définit  $2n$  sections  $(\sigma_1^+, \sigma_1^-), \dots, (\sigma_n^+, \sigma_n^-)$ , prolongées par continuités aux points non génériques. On pose  $X_i := \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$ .

Le front  $F$  n'est pas la projection d'un nœud de  $J^1\mathbf{R}$ ; pour se ramener à cette situation il faut "fermer" le front en ajoutant deux cusps et une section à l'infini  $\sigma_\infty$  (plate), comme à la Figure 10. On note  $\tilde{F}$  ce front, qui coïncide

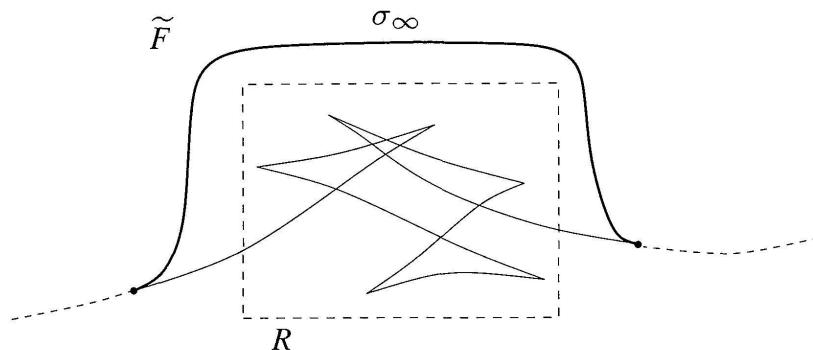


FIGURE 10  
Le front  $\tilde{F}$ , compactification de  $F$

avec  $F$  dans un rectangle  $R$  de  $J^0\mathbf{R}$  contenant toutes les branches bornées de  $F$  (comme le minimax coïncide avec le max-min, on obtient les mêmes résultats si la branche à l'infini passe au dessous de  $R$ ). Ce nouveau front est la projection par  $\pi_1$  d'un nœud legendrien  $\tilde{L}$  de  $J^1\mathbf{R}$ . On fixe sur  $\tilde{F}$  l'orientation induite par celle de  $F$ .

Soit  $u$  la solution de minimax de (PCR). La *section de Chaperon-Sikorav*, notée  $\sigma_{CS}$ , est la section de  $\tilde{F}$  qui coïncide avec le graphe du minimax à l'intérieur de  $R$ . Soit  $X_0 := \sigma_\infty \cup \sigma_{CS}$ . Il est facile de voir que  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  est une décomposition de  $\tilde{F}$ .

**THÉORÈME 3.2.** *La décomposition  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  est la seule admissible.*

*Démonstration.* D'après la section 1.2, les courbes  $X_0, X_1, \dots, X_n$  satisfont les axiomes (1) et (2) des décompositions admissibles. La condition (4) est aussi vérifiée parce que la différence d'indice de deux branches est égal au nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui les séparent le long du front (Proposition 1.10).

Il reste à montrer que la condition (3) est satisfaite, ce qui revient à montrer que les configurations interdites (I), (II) et (III) de la Figure 7 ne se produisent jamais. Pour toute courbe  $X_i = \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$ , et  $q$  à l'intérieur de

$\pi_0(X_i)$ , on note  $(q, \xi_i^+) \in \sigma_i^+$  et  $(q, \xi_i^-) \in \sigma_i^-$ , avec  $\xi_i^+ > \xi_i^-$ , les deux points de  $X_i$  au dessus de  $q$ ; pour  $X_0 = \sigma_\infty \cup \sigma_{CS}$ , on note  $(q, \xi_\infty) \in \sigma_\infty$  et  $(q, \xi_\ell) \in \sigma_{CS}$ , avec  $\xi_\infty > \xi_\ell$ .

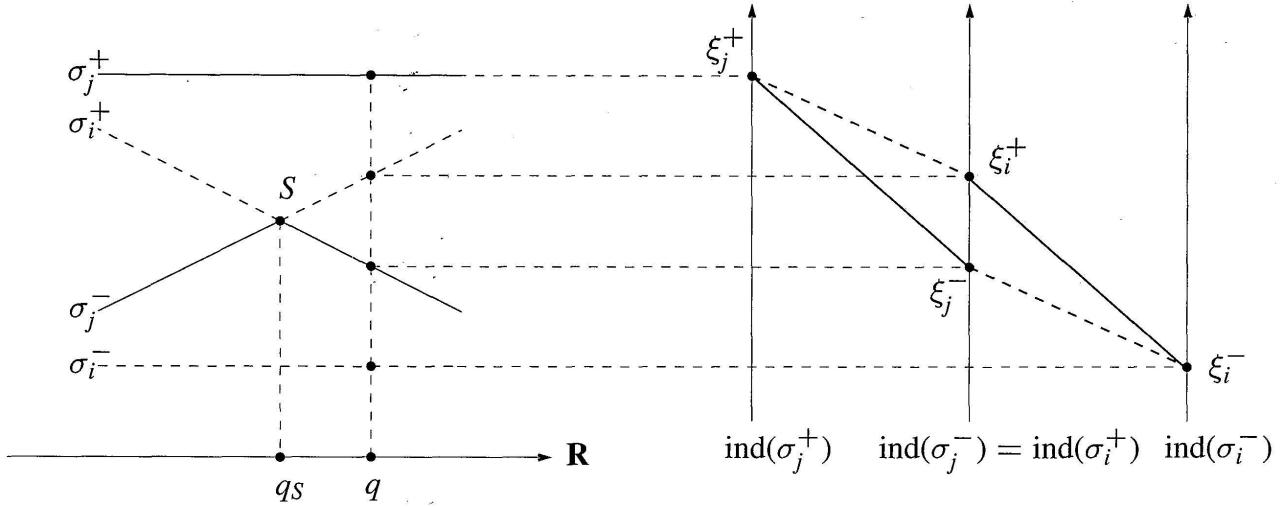


FIGURE 11

Diagramme de Morse correspondant à la configuration interdite (I)

Soient  $S$  un point de saut,  $qs := \pi_0(S)$ ,  $q \neq qs$  assez proche de  $qs$ . Supposons d'abord que  $S \in X_i \cap X_j$ , avec  $i \neq j$  non nuls. Les diagrammes de Morse de  $S$  correspondant aux configurations interdites (I), (II) et (III) contredisent la Proposition 1.3, comme le montrent la Figure 11 pour la configuration (I) et la Figure 12 pour les configurations (II) et (III).

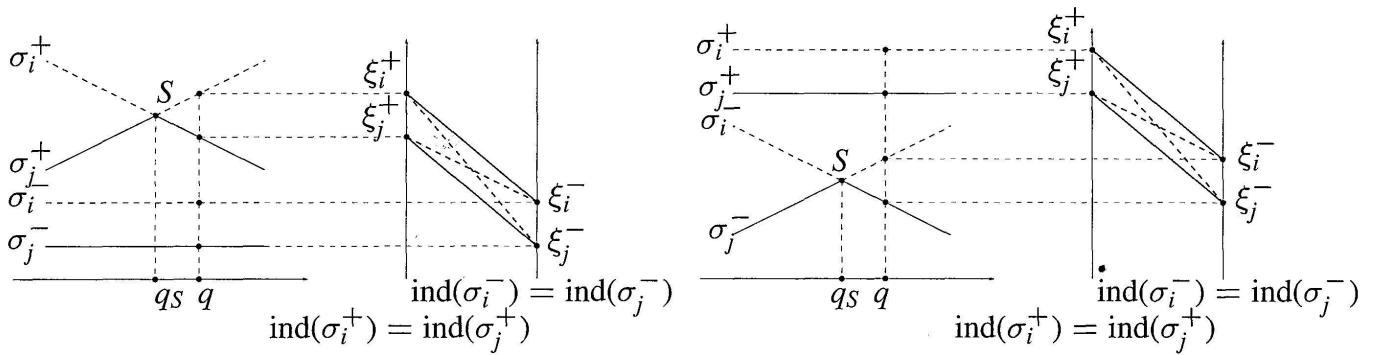


FIGURE 12

Diagrammes de Morse des configurations interdites (II) et (III)

Puisque  $\sigma_\infty$  n'a aucun point de saut, il reste les sauts de type  $S \in \sigma_{CS} \cap X_i$ , avec  $i > 0$ . Comme on suppose que la section à l'infini  $\sigma_\infty$  passe au dessus des autres sections de  $\tilde{F}$ , la configuration (III) ne se produit jamais. Les configurations (I) et (II) conduisent encore à des diagrammes de Morse qui contredisent la Proposition 1.3, voir la Figure 13.

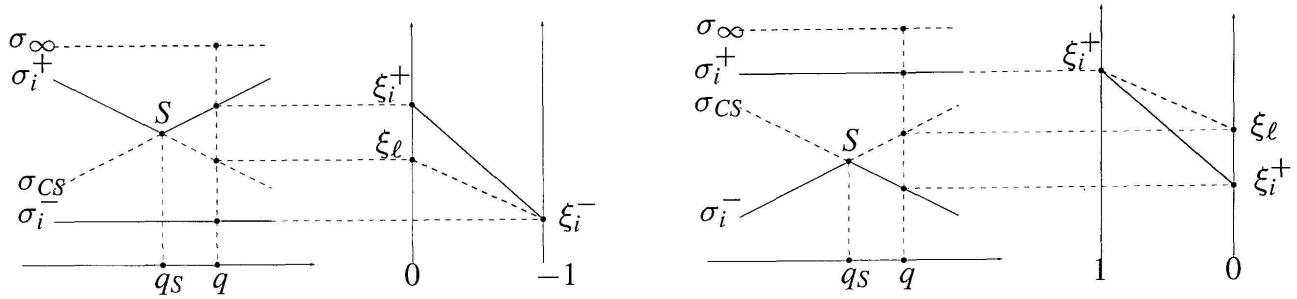


FIGURE 13  
Diagrammes de Morse des configurations interdites (I) et (II)

On a ainsi démontré que notre décomposition est admissible. Comme la courbe legendrienne  $L$  dont  $F$  est la projection est isotope à  $\{(q, 0, 0) \in J^1\mathbf{R}\}$ ,  $\tilde{F}$  est isotope au front lèvre. Ce front a une seule décomposition admissible, donc par le théorème de Chekanov-Pushkar,  $\tilde{F}$  aussi admet une unique décomposition admissible.  $\square$

#### REMARQUES.

(1) Le Théorème 3.2 fournit un critère géométrique purement combinatoire qui permet de déterminer la solution de minimax d'un front d'onde (de type solution multivoque) de dimension 1 : il suffit pour cela de trouver la seule décomposition admissible d'une compactification du front. La section associée à la section à l'infini est alors la section de Chaperon-Sikorav du front compactifié, ce qui détermine sans ambiguïté le graphe de la solution de minimax sur le front initial.

(2) Les axiomes qui définissent les décompositions admissibles d'un front d'onde ont été définis par Chekanov et Pushkar comme généralisation de la classification des points critiques d'une fonction de Morse en couple de fonctions critiques liés. En ce sens le Théorème 3.2 est le cas simple dont le théorème de Chekanov et Pushkar est la généralisation.

**EXEMPLE 3.3.** D'après l'exemple 3.1, le graphe de la solution de minimax associée au front montré à la Figure 14 est la section marquée par un trait plus épais.

#### 3.4 TRIANGLES ÉVANESCENTS

Dans cette section on donne une méthode qui permet de remplacer un front d'onde de type solution multivoque par un front plus simple du même type et ayant le même minimax. Cela permet de déterminer le minimax du front initial en itérant cette méthode un nombre fini de fois.

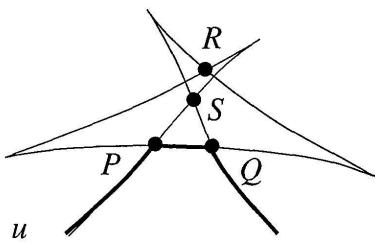


FIGURE 14

Soit  $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$  une famille à un paramètre de fronts de type solution multivoque, projection d'une isotopie legendrienne  $\{L_r\}_{r \in [0,1]}$ .

**DÉFINITION.** On appelle *intersection triple* une perestroika de  $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$  de type “pyramide” (P), telle que le point triple soit l’intersection de trois branches de même indice.

**REMARQUE.** D’après la définition de décomposition admissible, la seule perestroika de la famille  $\{F_r\}_{r \in [0,1]}$  qui change de manière non continue l’unique décomposition admissible du front initial est l’intersection triple (Figure 15).

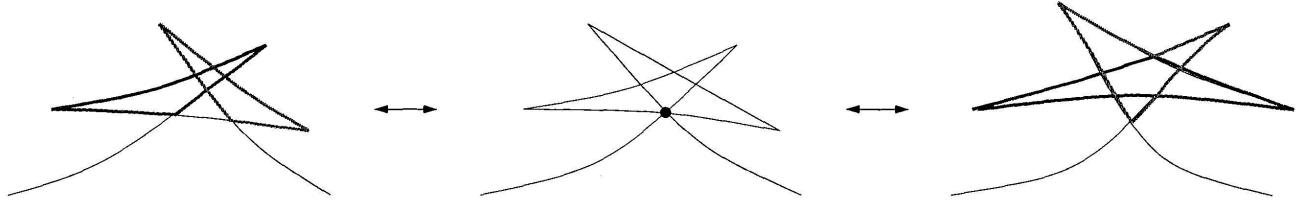


FIGURE 15

Changement de la décomposition admissible en passant par une intersection triple

Considérons maintenant le front  $F$  comme la trace d’une courbe  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}^2 = J^0\mathbf{R}$ , paramétrée par  $s \in \mathbf{R}$ . Soit  $D = \Gamma(s_0) = \Gamma(s_1)$ , avec  $s_0 < s_1$ , un point double du front, intersection de deux branches de même indice. L’ensemble  $\Gamma([s_0, s_1])$  est un *triangle de sommet*  $D$  s’il a exactement deux cusps. On note alors  $\mathcal{T}(D)$  un tel triangle et, pour  $\epsilon > 0$  aussi petit que l’on veut,  $F - \mathcal{T}(D)$  un front de type solution multivoque qui coïncide avec l’ensemble  $\Gamma(\mathbf{R} \setminus [s_0, s_1])$  en dehors de la boule  $\mathcal{B}_D(\epsilon)$  de  $\mathbf{R}^2$  centrée en  $D$  de rayon  $\epsilon$ , et qui est le graphe d’une fonction lisse à l’intérieur de cette boule (cf. Figure 16).

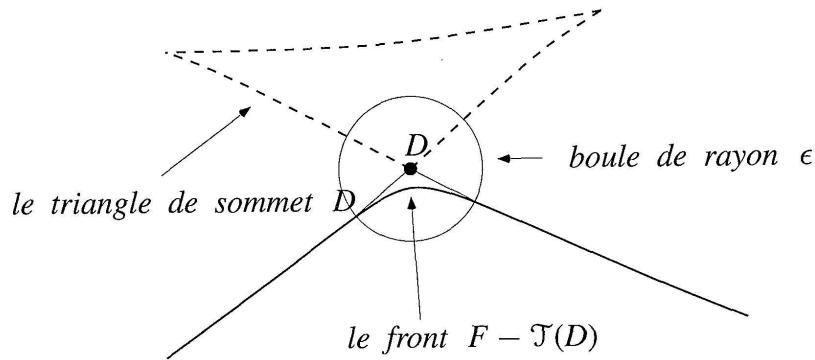


FIGURE 16  
Le front  $F - \mathcal{T}(D)$

**DÉFINITION.** Un triangle  $\mathcal{T}(D)$  de sommet  $D$  est *évanescents* s'il existe un chemin sans intersections triples entre  $F$  et  $F - \mathcal{T}(D)$  dans l'espace des solutions multivoques.

**EXEMPLE 3.4.** Considérons le front de l'exemple 3.3, montré à la Figure 14. Les triangles  $\mathcal{T}(P)$  et  $\mathcal{T}(Q)$  sont évanescents, tandis que le triangle  $\mathcal{T}(R)$  ne l'est pas (en effet pour l'effacer il faut forcément passer par une intersection triple au point  $S$ ).

Soit  $\mathcal{D} = \{X_0, \dots, X_n\}$  la décomposition admissible d'une compactification  $\tilde{F}$  d'un front de type solution multivoque  $F$ .

**THÉORÈME 3.5.** Si  $n \geq 1$ , au moins une des courbes  $X_i$ , avec  $i > 0$ , est un triangle évanescents.

*Démonstration.* Considérons le graphe (connexe) associé à la décomposition admissible de  $\tilde{F} = \pi_1(\tilde{L})$ , c'est-à-dire le graphe ayant un sommet pour chaque courbe  $X_i \in \mathcal{D}$  et une arête entre deux sommets pour chaque point de saut entre les courbes correspondantes. D'après le théorème de Chekanov-Pushkar, le nombre  $\#(\mathcal{D}) - \#(\mathcal{S})$  est invariant par isotopie légendrienne de  $\tilde{L}$ . Puisque  $\tilde{L}$  est isotope à un cercle dont la projection est le front lèvre, ce nombre est toujours 1 pour les fronts obtenus par compactification d'une solution multivoque. Or,  $\#(\mathcal{D})$  étant le nombre de sommets et  $\#(\mathcal{S})$  le nombre d'arêtes du graphe, on déduit que ce graphe est un arbre, dont les feuilles<sup>11)</sup> sont des triangles. Enfin, il est facile de voir que les triangles qui forment une courbe  $X_i \in \mathcal{D}$  ( $i > 0$ ) sont évanescents.  $\square$

<sup>11)</sup> Les feuilles d'un arbre sont les sommets dont est issue une seule arête.

De toute évidence on a le fait suivant.

**PROPOSITION 3.6.** *Si un triangle  $\mathcal{T}(D)$  est évanescents, alors les sections de minimax de  $F$  et de  $F - \mathcal{T}(D)$  coïncident en dehors de  $\mathcal{B}_D(\epsilon)$ .*

**REMARQUE.** La Proposition 3.6 donne une méthode pour simplifier récursivement le front d'onde dont on cherche le minimax : on recherche parmi les triangles du front ceux qui sont évanescents. Après un nombre fini de pas, on efface tous les cusps du front ; la section restante coïncide, en dehors d'un nombre fini de boules arbitrairement petites, avec le minimax du front initial.

**EXEMPLE 3.7.** Considérons le front générique  $F$  de type solution multi-voque montré à la Figure 17. A côté de chaque branche on a noté son indice. La solution de minimax est la section mise en évidence.

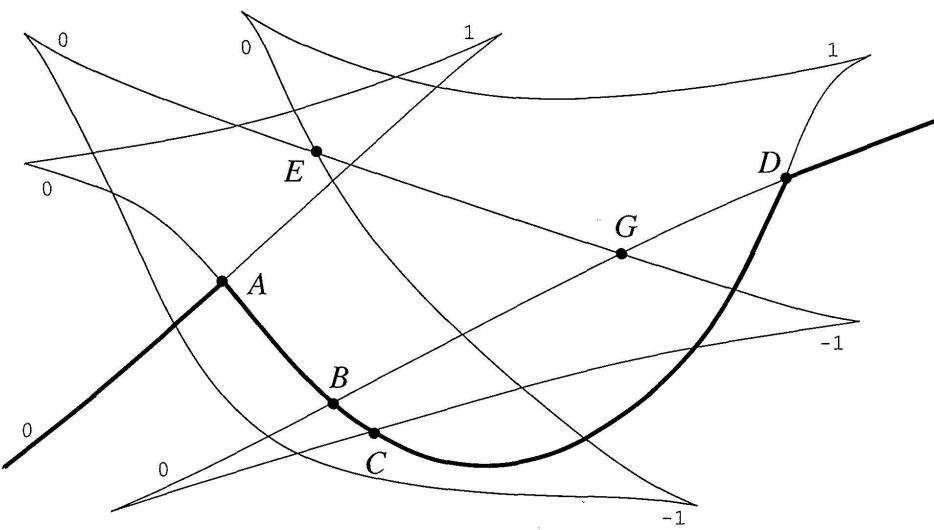


FIGURE 17

Pour montrer cela, on applique la Proposition 3.6 : les triangles  $\mathcal{T}(G)$  et  $\mathcal{T}(E)$  sont évanescents (pour le premier c'est clair, pour le deuxième, il faut remarquer que la branche d'indice  $-1$  de ce triangle peut traverser les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ ). Donc en dehors de deux boules aussi petites que l'on veut, centrées en  $G$  et en  $E$ , les sections de minimax de  $F$  et de  $F - \mathcal{T}(G) - \mathcal{T}(E)$  sont les mêmes (voir la Figure 18). Les triangles  $\mathcal{T}(A)$  et  $\mathcal{T}(D)$  du nouveau front sont de toute évidence évanescents, ce qui prouve que le minimax est bien celui annoncé.

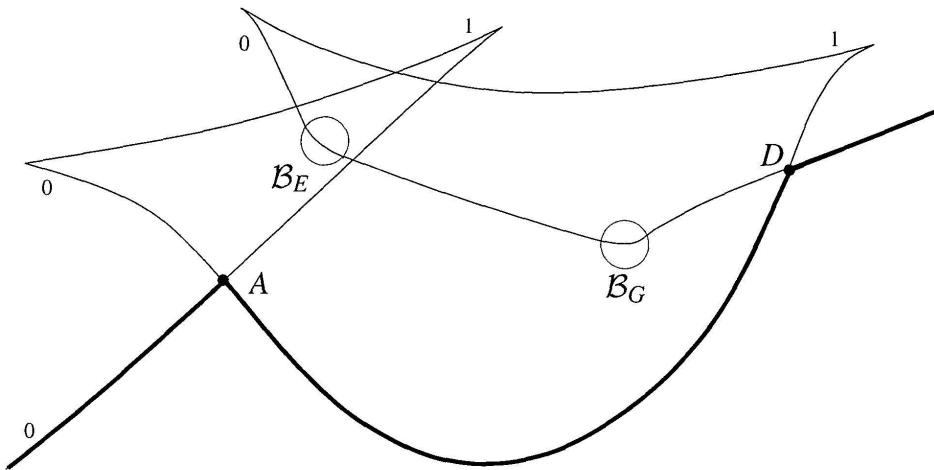


FIGURE 18  
Le front  $F - \mathcal{T}(G) - \mathcal{T}(E)$

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ar1] ARNOLD, V. I. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir, Moscou, 1976.
- [Ar2] —— *Singularities of Caustics and Wave Fronts*. Kluwer, Dordrecht, 1990.
- [Ar3] —— Invariants and perestroikas of wave fronts on the plane. *Proc. Steklov Inst. Math.* 209 (1995), 11–64.
- [Bar] BARANNIKOV, S. A. The framed Morse complex and its invariants. In: *Singularities and Bifurcations* (ed. V. I. Arnold). *Advances in Soviet Mathematics* 21, 93–115. Amer. Math. Society, 1994.
- [Car] CARDIN, F. The global finite structure of generic envelope loci for Hamilton-Jacobi equations. *J. Math. Phys.* (2) 43 (2002), 417–430.
- [Cer] CERF, J. La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 39 (1970), 5–173.
- [Cha] CHAPERON, M. Lois de conservation et géométrie symplectique. *C. R. Acad. Sci. Paris* 312 série I (1991), 345–348.
- [Ch1] CHEKANOV, YU. Critical points of quasi-functions and generating families of legendrian manifolds. *Funktional. Anal. i Prilozhen.* (2) 30 (1996), 56–69; trad. angl. *Funct. Anal. Appl.* (2) 30 (1996), 118–128.
- [Ch2] —— New invariants of legendrian knots. *European Congress of Mathematics, Barcelona, Vol. II. Progress in Mathematics* 202. Birkhäuser, 2000.
- [C-P] CHEKANOV, YU. and P. PUSHKAR. Arnold's four-cusp conjecture and invariants of legendrian knots. (En préparation.)
- [DNF] DUBROVIN, B. A., A. T. FOMENKO et S. P. NOVIKOV. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications*. Mir, Moscou, 1985.
- [Jou] JOUKOVSKAÏA, T. Singularités de minimax et solutions faibles d'équations aux dérivées partielles. Thèse de Doctorat à l'Université de Paris VII, 1993.
- [Mil] MILNOR, J. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.

- [Sik] SIKORAV, J.-C. Problèmes d'intersection et de points fixes en géométrie hamiltonienne. *Comment. Math. Helv.* 62 (1987), 62–73.
- [The] THÉRET, D. A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions. *Topolgy Appl.* 96 (1999) 249–266.
- [Vi1] VITERBO, C. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Ann.* 292 (1992), 685–710.
- [Vi2] —— Solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi et géométrie symplectique. *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Palaiseau*, 1996.

(Reçu le 8 avril 2002)

Gianmarco Capitanio

Université Paris 7  
UFR de Mathématiques  
Équipe de Géométrie et Dynamique  
Case 7012  
2, place Jussieu  
F-75251 Paris Cedex 05  
France  
*e-mail:* Gianmarco.Capitanio@math.jussieu.fr