Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOME REMARKS ON NONCONNECTED COMPACT LIE GROUPS
Autor: HÄMMERLI, Jean-François
Bibliographie
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66678

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

connected component by SO(3) *(i.e. by "any" group of the same rank), or the group of components by* $\mathbf{Z}/4$ *(i.e. by "any" group of the same size), will force the extension to be split.*

Proof. The assertions about the connected component and the group of components are clear. Let us show that the extension associated to G is not split. Let us denote $[g,\gamma] \in G$ the image of $(g,\gamma) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{D}_8$ under the canonical projection. Let $\mathbf{S}^1$ denote the standard maximal torus in SU(2), and let N denote its normalizer in G. We have

$$N = \left\{[t,e] : t \in \mathbf{S}^1\right\} \amalg \left\{[jt,e] : t \in \mathbf{S}^1\right\} \amalg \left\{[t,r] : t \in \mathbf{S}^1\right\} \amalg \left\{[jt,r] : t \in \mathbf{S}^1\right\}$$
$$\amalg \left\{[t,s] : t \in \mathbf{S}^1\right\} \amalg \left\{[jt,s] : t \in \mathbf{S}^1\right\} \amalg \left\{[t,rs] : t \in \mathbf{S}^1\right\} \amalg \left\{[jt,rs] : t \in \mathbf{S}^1\right\}.$$

By contradiction, suppose that the extension associated to G is split, i.e. there exists a section. As $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ is abelian, thus nilpotent, we deduce, by Proposition 5.4, that the extension associated to N is also split. We want to show that this is not possible by considering the elements of order 2 in N. For $n = 0, 1$, a straightforward calculation shows that in the component corresponding to $r^n s$, an element $[t, r^n s]$ is of order 2 if and only if $t = \pm\mathbf{1}$, and that the sub-component $\left\{[jt, r^n s] : t \in \mathbf{S}^1\right\}$ does not contain any element of order 2. Two of the three non-trivial elements in $\Gamma \cong \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ must thus be mapped by the section to $[\pm\mathbf{1}, s]$ and $[\pm\mathbf{1}, rs]$. Therefore, as the section is a homomorphism, the image of the third non-trivial element is

$$[\pm\mathbf{1}, rs] \cdot [\pm\mathbf{1}, s] = [\pm\mathbf{1}, r] \ ,$$

which is not of order 2. A contradiction that shows that the extension associated to G is not split.

The property of minimality follows by Theorem 5.3, and by the fact that any extension with SO(3) as normal subgroup is a direct product (because SO(3) is complete, i.e. centerless and with trivial outer automorphism group). □

REFERENCES

[1] ADAMS, J. F. Maps between classifying spaces, II. *Invent. Math. 49* (1978), 1–65.

[2] ADEM, A. and R. J. MILGRAM. *Cohomology of Finite Groups.* Springer, 1994.

[3] BOREL, A. and J. DE SIEBENTHAL Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos. *Comment. Math. Helv. 23* (1949), 200–221.

[4] BOURBAKI, N. *Groupes et algèbres de Lie (Chapitres 2 et 3).* Hermann, 1972.

[5] —— *Groupes et algèbres de Lie (Chapitre 9).* Masson, 1983.

[6] BROWN, K. S. *Cohomology of Groups.* GTM 87. Springer, 1982.

[7] CURTIS, M., A. WIEDERHOLD and B. WILLIAMS. Normalizers of maximal tori. In: *Lecture Notes in Math. 418*, 31–47. Springer, 1974.

[8] DE SIEBENTHAL, J. Sur les sous-groupes fermés d'un groupe de Lie clos. *Comment. Math. Helv. 25* (1951), 210–256.

[9] —— Sur les groupes de Lie compacts non connexes. *Comment. Math. Helv. 31* (1956/57), 41–89.

[10] DYNKIN, E. B. Automorphisms of semi-simple Lie algebras. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 76* (1951), 629–632.

[11] EILENBERG, S. and S. MAC LANE. Cohomology theory in abstract groups, II. Group extensions with non-abelian kernel. *Ann. of Math. (2) 48* (1947), 326–341.

[12] HÄMMERLI, J.-F. Une généralisation de la notion de tore maximal dans les groupes de Lie compacts non connexes. Travail de diplôme. Université de Neuchâtel, 1995.

[13] —— Normalizers of maximal tori and classifying spaces of compact Lie groups. Ph.D. thesis. University of Neuchâtel, 2000.

[14] HOFMANN, K. H. and S. A. MORRIS. *The Structure of Compact Groups.* de Gruyter, 1998.

[15] KIRILLOV, A. A. *Elements of the Theory of Representations.* Springer, 1976.

[16] MAC LANE, S. *Homology.* Springer, 1963.

[17] MATTHEY, M. Sur les sous-groupes principaux et les normalisateurs de tores maximaux dans les groupes de Lie compacts connexes. Travail de diplôme. Université de Neuchâtel, 1995.

[18] MCINNES, B. Disconnected forms and the standard group. *J. Math. Phys. (8) 38* (1997), 4354–4362.

[19] OLIVER, B. The representation ring of a compact Lie group revisited. *Comment. Math. Helv. 73* (1998), 353–378.

[20] OSSE, A. λ-structures and representation rings of compact connected Lie groups. *J. Pure Appl. Algebra 121* (1997), 69–93.

[21] ROBINSON, D. J. S. *A Course in the Theory of Groups.* GTM 80 (2nd ed.). Springer, 1996.

[22] SEGAL, G. The representation ring of a compact Lie group. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 34* (1968), 113–128.

[23] TOM DIECK, T. *Transformation Groups and Representation Theory.* Lecture Notes in Math. *766*. Springer, 1979.

(Reçu le 25 juin 2002)

Jean-François Hämmerli

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne
Bâtiment de Chimie
CH-1015 Lausanne
Switzerland
e-mail: jean-francois.haemmerli@ima.unil.ch