

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ANALYSE DE FOURIER DES FRACTIONS CONTINUES À QUOTIENTS RESTREINTS  
**Autor:** Queffélec, Martine / Ramaré, Olivier  
**Kapitel:** 7. Une question de Montgomery  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66692>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$r = u^\eta \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\delta - 2\delta^2}{(4 - \delta)(1 + 2\delta)}$$

ce qui est licite si l'on suppose  $\delta > 1/2$ . En reportant dans (17), il vient

$$|\hat{\mu}(u)| \ll u^\eta + u^{-7\delta^2/[(4-\delta)(1+2\delta)]} + u^\eta u^{15\varepsilon/(1+2\delta)} \ll u^{\eta+8\varepsilon},$$

car le second terme est négligeable.

Nous avons ainsi établi le théorème 1.4.

## 7. UNE QUESTION DE MONTGOMERY

Montgomery a posé dans [12] la question suivante (problème 45):

*Existe-t-il un nombre normal à quotients partiels bornés ?*

**DÉFINITION 7.1.** Un nombre  $x \in [0, 1)$  est normal en base  $q$  où  $q$  est un entier  $q \geq 2$  si et seulement si la suite  $(q^n x)$  est équirépartie modulo 1, ce qui, via le critère de Weyl, s'écrit :

$$\forall k \neq 0, \quad \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(kq^n x) = 0.$$

Le théorème de Borel établit que si  $q \geq 2$ , presque tout nombre (au sens de la mesure de Lebesgue) est normal en base  $q$ . C'est le théorème ergodique appliqué à la transformation  $x \in [0, 1) \rightarrow qx \bmod 1$ . Qu'en est-il en restriction à un sous-ensemble de nombres irrationnels de  $[0, 1)$  ? Un outil est le suivant :

**THÉORÈME 7.2 (Davenport-Erdős-LeVeque).** Soit  $(s_n)$  une suite d'entiers et soit  $\mu$  une mesure de probabilité portée par  $[0, 1)$  telle que

$$\sum_{N \geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m, n=1}^N \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) < \infty,$$

pour tout entier  $k \neq 0$ , alors pour  $\mu$ -presque tout  $x \in [0, 1)$ , la suite  $(s_n x)$  est équirépartie modulo 1.

*Démonstration.* Fixons  $k \neq 0$ . Notons  $S_{N,k}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(ks_n x)$ , et  $I_{N,k} = \int |S_{N,k}(x)|^2 d\mu(x)$ . L'hypothèse n'est autre que

$$\sum_{N \geq 1} \frac{I_{N,k}}{N} < +\infty, \quad \forall k \neq 0.$$

Nous utilisons un lemme classique sur les séries :

LEMME 7.3. Soit  $(x_n)$  une suite de réels  $\geq 0$  telle que  $\sum_{n>0} x_n/n < \infty$ . Alors il existe une suite d'entiers  $(N_r)$  telle que :

- a)  $\sum_r x_{N_r} < \infty$  ;
- b)  $\lim_r N_{r+1}/N_r = 1$ .

Nous omettons provisoirement l'indice  $k$  et nous appliquons le lemme à la suite  $(I_N)$ . Il existe une suite  $(N_r)$  telle que

$$\sum_r I_{N_r} = \int \sum_r |S_{N_r}(x)|^2 d\mu(x) < \infty.$$

En particulier,  $\sum_r |S_{N_r}(x)|^2 < \infty$   $\mu$ -presque partout et  $S_{N_r}(x) \rightarrow 0$   $\mu$ -presque partout. Maintenant nous interpolons :

Si  $N_r \leq N \leq N_{r+1}$ , on a :  $NS_N - N_r S_{N_r} = \sum_{N_r \leq n < N} e(ks_n x)$  et  $|NS_N - N_r S_{N_r}| \leq \sum_{N_r \leq n < N} 1 = N - N_r \leq N_{r+1} - N_r$ , de sorte que

$$N|S_N| \leq N_r |S_{N_r}| + N_{r+1} - N_r \quad \text{et} \quad |S_N(x)| \leq |S_{N_r}(x)| + \frac{N_{r+1} - N_r}{N_r}.$$

Par la propriété b) du lemme,  $S_N(x)$  tend vers 0 pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , ce qui prouve l'équirépartition modulo 1 de la suite  $(s_n x)$  pour  $\mu$ -presque tout  $x$ .  $\square$

COROLLAIRE 7.4. Soit  $X$  un ensemble de réels portant une mesure de probabilité  $\mu$  telle que  $\hat{\mu}(n) = O(|n|^{-\delta})$  où  $\delta > 0$ .

Alors, pour toute suite  $(s_n)$  strictement croissante d'entiers, la suite  $(s_n x)$  est équirépartie modulo 1 pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 7.2 avec  $s_n$  et  $\mu$  la mesure portée par  $X$ . Or si  $k \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^N \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) &= N + \sum_{m,n \leq N, m \neq n} \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) \\ &\leq N + C \sum_{m,n \leq N, m \neq n} |k(s_n - s_m)|^{-\delta} \\ &\leq N + 2C \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} |(s_n - s_m)|^{-\delta}. \end{aligned}$$

Lorsque  $m > n$ ,  $s_m - s_n = s_m - s_{m-1} + s_{m-1} - \dots + s_{n+1} - s_n \geq m - n$ , et

$$\sum_{m,n=1}^N |\hat{\mu}(k(s_n - s_m))| \leq N + 2C \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} (m - n)^{-\delta}; \text{ maintenant,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} (m-n)^{-\delta} &= \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} n^{-\delta} \\ &\leq N \sum_{n=1}^{N-1} n^{-\delta} = O(N^{2-\delta}). \end{aligned}$$

Finalement  $\sum_{N \geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m,n=1}^N |\hat{\mu}(k(s_n - s_m))| < \infty$  puisque  $\delta > 0$ .  $\square$

Nous en déduisons le résultat suivant qui contient celui de Baker :

**COROLLAIRE 7.5.** *Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini d'entiers  $\geq 1$  contenant au moins deux éléments; il existe une infinité de  $x \in F(\mathcal{A})$  normal en toute base dès que la dimension de Hausdorff de  $F(\mathcal{A})$  est  $> 1/2$ .*

*Démonstration.* Soit  $1/2 < \delta < \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A})$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{\delta(2\delta-1)}{8(2\delta+1)(4-\delta)}$  et  $q$  un entier  $\geq 2$ . Il résulte du corollaire 7.4 appliqué avec  $s_n = q^n$  et  $\mu = \mu_{\varepsilon, \delta}$  la mesure de Kaufman portée par  $F(\mathcal{A})$ , donnée par le théorème 1.4, que l'ensemble

$$\mathcal{N}_q = \{x \in F(\mathcal{A}) \text{ normal en base } q\}$$

est de mesure pleine pour la mesure de probabilité  $\mu$ . Ainsi  $\mu(\bigcap_{q \geq 2} \mathcal{N}_q) = 1$  d'où le corollaire.  $\square$

## 8. COMMENTAIRES ET QUESTIONS

Les mesures de Kaufman ainsi construites possèdent deux propriétés importantes: le comportement höldérien de la fonction de répartition et le comportement asymptotique précis de la transformée de Fourier. En fait la seconde propriété, fondamentale ici, découle en partie de la première, mais le comportement höldérien joue un rôle primordial dans l'approche de la conjecture de Littlewood par Pollington & Velani [14].

Les ensembles  $F(\mathcal{A})$ ,  $|\mathcal{A}| \geq 2$ , sont donc des ensembles de multiplicité stricte, lorsqu'ils possèdent une dimension de Hausdorff  $> 1/2$ . On peut se demander si la borne  $1/2$  est infranchissable ou si elle relève au contraire de la construction. La propriété pour un ensemble d'être de multiplicité peut paraître stable: un résultat fameux de Salem & Zygmund (voir [10]) établit, pour des ensembles de type Cantor à rapport de dissection  $\xi$ , l'équivalence:

$$E \text{ est de multiplicité} \iff \frac{1}{\xi} \notin S$$