5. Intégrales oscillantes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

$$\nu(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{J_0})) \le 2\underbrace{(\nu_m \times \cdots \times \nu_m)}_{j_0}(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{J_0}))\,;$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\mu(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{pJ_0})) &\le 2^p \nu_m(C(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)) \cdots \nu_m(C(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1} \dots, \tilde{a}_{\lambda m})) \\ &\le C^{-2\delta} 2^{2\lambda\delta+p} \Sigma_m(\delta)^{-\lambda} h^\delta\,.\end{aligned}$$

Pour finir, nous remarquons que $2^{2\lambda\delta+p} = 2^{\lambda(2\delta+1/j_0)}$, puis que $2^{(2\delta+1/j_0)} \le 8 \le \Sigma_m(\delta)$ par choix de m. □

5. Intégrales oscillantes

Nous établissons trois lemmes sur des intégrales oscillantes. Les deux premiers portent sur la mesure de Lebesgue alors que le dernier est une idée originale de Kaufman.

Lemme 5.1. *Si f est C^2 sur $[0,1]$, vérifie $|f'(t)| \ge a$ et $|f''(t)| \le b$, alors nous avons*

$$\left| \int_0^1 e(f(t))dt \right| \le \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\,,$$

avec la notation usuelle $e(x) = \exp(2i\pi x)$.

Il s'agit là d'une version intégrale modifiée du lemme de Kuzmin-Landau, aussi ce que l'on nomme de façon informelle « le critère de la dérivée première ».

Le second lemme s'applique lorsque $f'(t)$ s'annule dans l'intervalle en question.

Lemme 5.2. *Si f est C^2 sur $[0,1]$ et $f'(t) = (\alpha t + \beta)g(t)$ où g vérifie $|g(t)| \ge a$ et $|g'(t)| \le b$ avec $b \ge a$, alors nous avons*

$$\left| \int_0^1 e(f(t))dt \right| \le 6\frac{b}{a^{3/2}|\alpha|^{1/2}}\,.$$

Classiquement, la méthode de la phase stationnaire donnerait une contribution de l'ordre de $1/\sqrt{f''(-\beta/\alpha)}$, lorsque b/a est de l'ordre de 1, et c'est bien ce que donne notre lemme.

Le dernier lemme permet de comparer l'intégrale d'une fonction par rapport à deux mesures distinctes.

LEMME 5.3. *Soit F une fonction C^1 sur* $[0,1]$ *bornée en valeur absolue par* 1 *et telle que* $|F'(t)| \leq M$. *Notons* $m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt$. *Soit ensuite* λ *une mesure de probabilité sur* $[0,1]$ *et notons par* $\Lambda(u)$ *le maximum des* $\lambda[t, t+u]$ *pour tout* t *dans* $[0, 1-u]$. *Nous avons alors pour tout* $r > 0$

$$\int_0^1 |F(t)|\, d\lambda \leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}).$$

Démonstration. Recouvrons $[0,1]$ par au plus M/r intervalles disjoints de longueur r/M. Il reste au plus un intervalle de plus petite longueur. Soit N le nombre de ces intervalles sur lesquels $\sup |F(t)| \geq 2r$. En utilisant le théorème des accroissements finis, nous constatons que $|F(t)| \geq r$ sur tous les intervalles considérés. Par conséquent

$$m_2 \geq N r^2 \frac{r}{M}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 |F(t)|\, d\lambda &\leq 2r + (N+1)\Lambda(r/M) \\ &\leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}). \qquad \square\end{aligned}$$

6. ESTIMATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Nous nous occupons ici du comportement asymptotique de

$$\hat{\mu}(u) = \int_0^1 e(ut)\, d\mu(t)$$

pour $|u|$ grand; nous supposerons, sans rectriction, u positif.

Commençons par rappeler que si $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ et $t = T^J(x) = [0; a_{J+1}, \ldots]$

$$\begin{aligned}[0; a_1, a_2, \ldots, a_J + t] &= \frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} \\ &= \frac{P_J}{Q_J} + \frac{(-1)^J t}{(Q_J + tQ_{J-1})Q_J}.\end{aligned}$$

Partons donc de $J = kJ_0$ fixé: par construction, nous pouvons décomposer notre mesure μ sous la forme

$$\mu = \underbrace{\nu \times \cdots \times \nu}_{k} \times \mu := \rho_k \times \mu$$