

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI  
**Autor:** Capitanio, Gianmarco  
**Kapitel:** 3.3 Caractérisation géométrique du minimax  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3.3 CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DU MINIMAX

Revenons au problème de Cauchy (PC), notamment dans le cas  $Q = \mathbf{R}$  :

$$(PCR) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, q) + H(t, q, \partial_q u(t, q)) = 0, & \forall t > 0, q \in \mathbf{R} \\ u(0, q) = u_0(q), & \forall q \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Fixons  $t_0 > 0$ . Soit  $S(t, q; \xi)$  une fgqi de la solution géométrique  $\Lambda$  de (PCR) (ou, plus précisément, une fgqi de la solution géométrique tronquée  $\Lambda^T$ , avec  $T > t_0$ ). D'après le théorème d'unicité de Viterbo,  $S_{t_0}(q; \xi) := S(t_0, q; \xi)$  est la fgqi de  $\Lambda_{t_0} = \Lambda \cap T^*(\{t_0\} \times \mathbf{R})$ ; il s'ensuit que les solutions de minimax associées à  $\Lambda$  et  $\Lambda_{t_0}$  ont la même valeur aux points  $(t_0, q_0)$  et  $q_0$  respectivement, à savoir  $\min \max \{\xi \mapsto S(t_0, q_0; \xi)\}$ .

**DÉFINITION.** On appelle *solution multivoque* un front de  $J^0\mathbf{R}$  long plat, isotope au front nul  $\{(q, 0) \in J^0\mathbf{R}\}$ , projection d'une courbe legendrienne (plongée) transversale à la base en dehors d'un compact.

Dans la suite on suppose ces fronts orientés par l'orientation induite par la première composante de  $J^0\mathbf{R}$ . Il résulte des sections 2.2 et 2.3 que le front d'onde de  $\Lambda_{t_0}$ , graphe de  $S_{t_0}$ , est de type solution multivoque.

**REMARQUE.** Le théorème d'unicité de Viterbo permet de ramener le problème de déterminer la solution de minimax d'un problème de Cauchy (PC) quelconque au cas  $Q = \mathbf{R}$ . En effet, considérons la solution  $\Lambda^T$  du problème général. Soient  $S(t, q; \xi)$  sa fgqi et  $F$  le front d'onde de  $\Lambda^T$ , graphe de  $S$ . Si  $\gamma$  est une courbe lisse, paramétrée par  $\mathbf{R} \ni s \mapsto \gamma(s) \in ]0, T[ \times Q$  et sans aucun point singulier, la restriction  $\Lambda_\gamma$  de la solution géométrique au fibré cotangent de  $\gamma$  est une sous variété lagrangienne. Une fois identifié  $\gamma$  à  $\mathbf{R}$ ,  $(s, \xi) \mapsto S(\gamma(s); \xi)$  est la fgqi de  $\Lambda_\gamma \subset T^*\mathbf{R}$  (théorème d'unicité); son graphe  $F_\gamma$  coïncide avec la restriction de  $F$  à  $J^0\gamma \simeq J^0\mathbf{R}$ . Donc pour tout  $s \in \mathbf{R}$ , le minimax de  $F_\gamma$  au point  $s$  est égal au minimax de  $F$  au point  $\gamma(s)$ .

De plus, on peut choisir  $\gamma$  de manière que  $F_\gamma$  soit un front de type solution multivoque. En effet  $F_\gamma$  est plat car  $F$  l'est. Pour que  $F_\gamma$  soit long, on peut choisir  $\gamma$  comme suit: si  $Q = \mathbf{R}^n$  on prend n'importe quelle droite  $d$  dans  $\{t_0\} \times Q$ ; sinon on choisit pour  $\gamma$  une courbe telle que  $\gamma(\pm\infty) \in \{0\} \times Q$ . Pour montrer que le front  $F_\gamma$  est isotope à un front qui est le graphe d'une fonction (et donc au front nul), considérons dans l'espace des courbes lisses dans  $]0, T[ \times Q$  sans singularités un chemin  $\{\gamma_r\}$  entre  $\gamma_0 = \gamma$  et  $\gamma_1 = \{0\} \times d$  dans le premier cas et entre  $\gamma$  et une courbe contenue en  $t = 0$  dans le second

(voir la Figure 9). Alors pour tout chemin générique de ce type,  $\{F_{\gamma_r}\}$  est l'isotopie cherchée<sup>10</sup>).

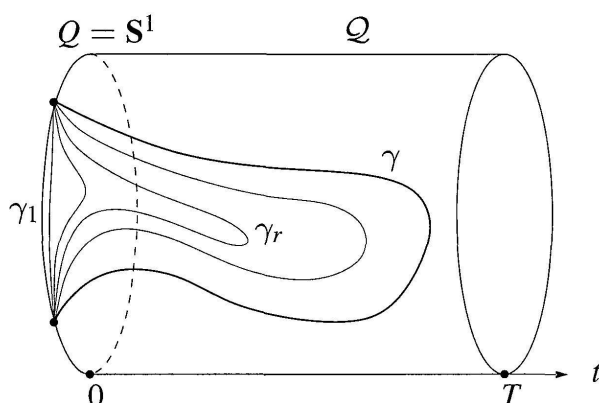


FIGURE 9

Réduction au cas unidimensionnel (dans le cas  $Q = S^1$ )

Dans la suite on va donc étudier le minimax d'un front d'onde de  $J^0\mathbf{R}$  de type solution multivoque, graphe d'une fgqi  $S(q; \xi)$ . Nous allons donner l'équivalent global (pour tout  $q \in \mathbf{R}$ ) de la subdivision des points critiques de  $\xi \mapsto S(q; \xi)$  (pour chaque  $q \in \mathbf{R}$  fixé) en point critique libre et couples de points critiques liés. La section du front parcourue par le point critique libre de  $S$  lorsque  $q$  parcourt  $\mathbf{R}$  est le graphe de la solution de minimax.

Pour utiliser le théorème de Chekanov et Pushkar il faut fermer le front en ajoutant une section à l'infini. Ce nouveau front est le graphe d'une fonction qui n'a aucun point critique libre. Lorsque  $q$  parcourt  $\mathbf{R}$ , chaque couple de points critiques liés parcourt sur le front une courbe fermée (ayant deux cusps). Ces courbes fermées sont la seule décomposition admissible du front; en particulier une de ces courbes est formée par le graphe de la solution de minimax et la section à l'infini. Par conséquent, étant donné un front de type solution multivoque, on peut déterminer le graphe de la solution de minimax à l'aide de la décomposition admissible de ce front.

Soit  $\alpha$  une branche de  $F$ ; d'après le théorème de la fonction implicite il existe une application lisse  $\bar{\xi}_\alpha: \pi_0(\alpha) \rightarrow \mathbf{R}^K$  telle que  $\alpha$  soit le graphe de  $q \mapsto S(t_0, q; \bar{\xi}_\alpha(q))$ . Pour tout point  $q$  à l'intérieur de  $\pi_0(\alpha)$ ,  $\bar{\xi}_\alpha(q)$  est un point critique non dégénéré de  $S$ . Son indice  $\text{ind}(\bar{\xi}(q))$  ne dépend pas de  $q$ . On appelle *indice* de  $\alpha$  le nombre (indépendant du choix de  $S$ )  $\text{ind}(\bar{\xi}(q)) - k_\infty$  (où  $k_\infty$  est l'indice de la forme quadratique de  $S$ ).

<sup>10</sup>) Cela n'est pas vrai en général pour tout chemin: un front  $F_{\gamma_r}$  pourrait avoir des auto-tangences, qu'on peut faire disparaître par une perturbation arbitrairement petite du chemin, puisque le front  $F$  n'a pas d'auto-tangences.

En tout point générique  $q \in \mathbf{R}$ , considérons les couples de points critiques liés de  $\xi \mapsto S(q; \xi)$ . Si le front est générique et si  $2n$  est le nombre de cusps de  $F$ , cela définit  $2n$  sections  $(\sigma_1^+, \sigma_1^-), \dots, (\sigma_n^+, \sigma_n^-)$ , prolongées par continuités aux points non génériques. On pose  $X_i := \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$ .

Le front  $F$  n'est pas la projection d'un nœud de  $J^1\mathbf{R}$ ; pour se ramener à cette situation il faut "fermer" le front en ajoutant deux cusps et une section à l'infini  $\sigma_\infty$  (plate), comme à la Figure 10. On note  $\tilde{F}$  ce front, qui coïncide

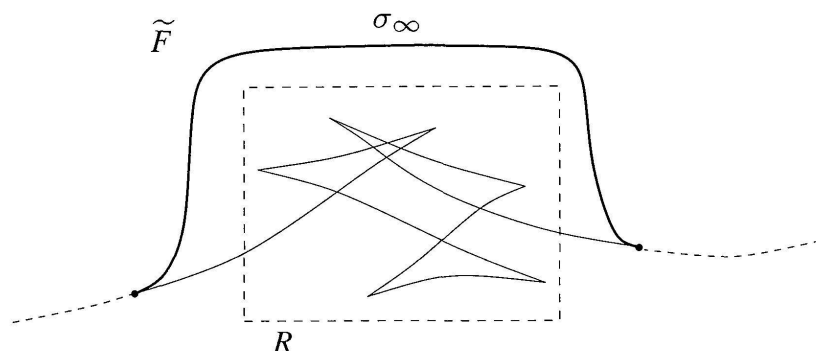


FIGURE 10

Le front  $\tilde{F}$ , compactification de  $F$

avec  $F$  dans un rectangle  $R$  de  $J^0\mathbf{R}$  contenant toutes les branches bornées de  $F$  (comme le minimax coïncide avec le max-min, on obtient les mêmes résultats si la branche à l'infini passe au dessous de  $R$ ). Ce nouveau front est la projection par  $\pi_1$  d'un nœud legendrien  $\tilde{L}$  de  $J^1\mathbf{R}$ . On fixe sur  $\tilde{F}$  l'orientation induite par celle de  $F$ .

Soit  $u$  la solution de minimax de  $(PCR)$ . La *section de Chaperon-Sikorav*, notée  $\sigma_{CS}$ , est la section de  $\tilde{F}$  qui coïncide avec le graphe du minimax à l'intérieur de  $R$ . Soit  $X_0 := \sigma_\infty \cup \sigma_{CS}$ . Il est facile de voir que  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  est une décomposition de  $\tilde{F}$ .

**THÉORÈME 3.2.** *La décomposition  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$  est la seule admissible.*

*Démonstration.* D'après la section 1.2, les courbes  $X_0, X_1, \dots, X_n$  satisfont les axiomes (1) et (2) des décompositions admissibles. La condition (4) est aussi vérifiée parce que la différence d'indice de deux branches est égal au nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui les séparent le long du front (Proposition 1.10).

Il reste à montrer que la condition (3) est satisfaite, ce qui revient à montrer que les configurations interdites (I), (II) et (III) de la Figure 7 ne se produisent jamais. Pour toute courbe  $X_i = \sigma_i^+ \cup \sigma_i^-$ , et  $q$  à l'intérieur de

$\pi_0(X_i)$ , on note  $(q, \xi_i^+) \in \sigma_i^+$  et  $(q, \xi_i^-) \in \sigma_i^-$ , avec  $\xi_i^+ > \xi_i^-$ , les deux points de  $X_i$  au dessus de  $q$ ; pour  $X_0 = \sigma_\infty \cup \sigma_{CS}$ , on note  $(q, \xi_\infty) \in \sigma_\infty$  et  $(q, \xi_\ell) \in \sigma_{CS}$ , avec  $\xi_\infty > \xi_\ell$ .

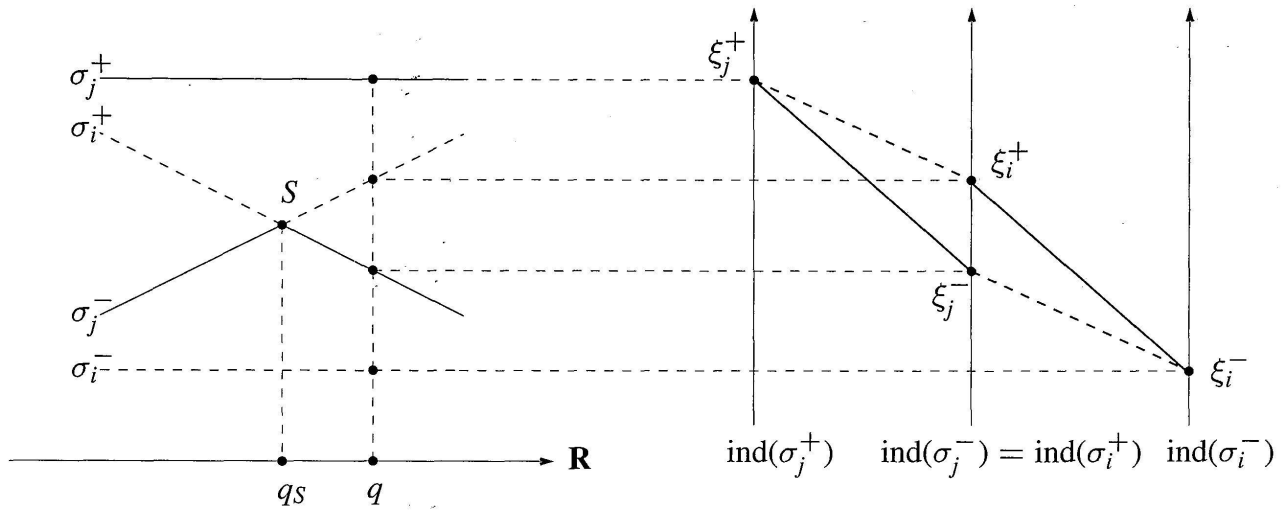


FIGURE 11

Diagramme de Morse correspondant à la configuration interdite (I)

Soient  $S$  un point de saut,  $q_s := \pi_0(S)$ ,  $q \neq q_s$  assez proche de  $q_s$ . Supposons d'abord que  $S \in X_i \cap X_j$ , avec  $i \neq j$  non nuls. Les diagrammes de Morse de  $S$  correspondant aux configurations interdites (I), (II) et (III) contredisent la Proposition 1.3, comme le montrent la Figure 11 pour la configuration (I) et la Figure 12 pour les configurations (II) et (III).

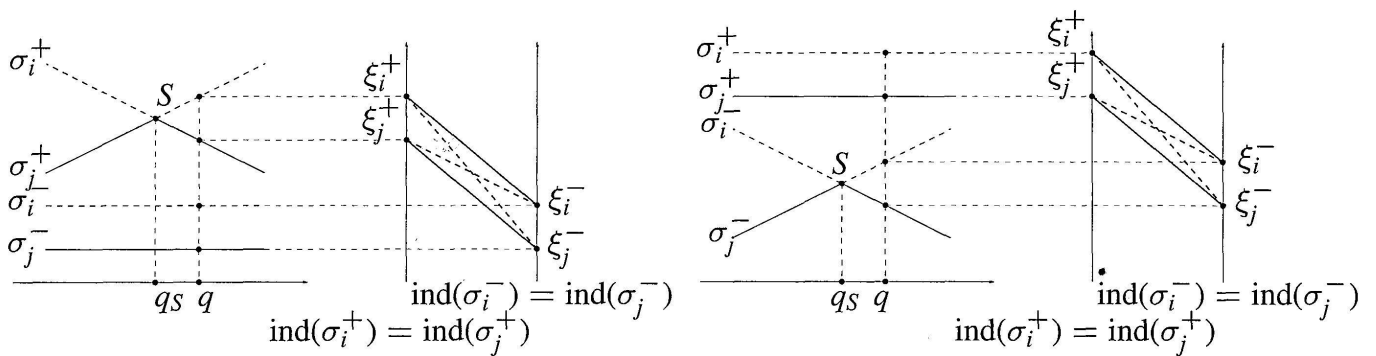


FIGURE 12

Diagrammes de Morse des configurations interdites (II) et (III)

Puisque  $\sigma_\infty$  n'a aucun point de saut, il reste les sauts de type  $S \in \sigma_{CS} \cap X_i$ , avec  $i > 0$ . Comme on suppose que la section à l'infini  $\sigma_\infty$  passe au dessus des autres sections de  $\tilde{F}$ , la configuration (III) ne se produit jamais. Les configurations (I) et (II) conduisent encore à des diagrammes de Morse qui contredisent la Proposition 1.3, voir la Figure 13.

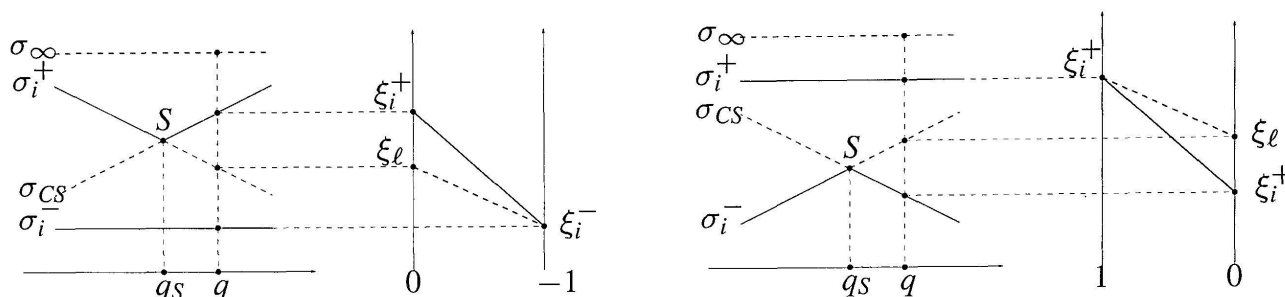


FIGURE 13

Diagrammes de Morse des configurations interdites (I) et (II)

On a ainsi démontré que notre décomposition est admissible. Comme la courbe legendrienne  $L$  dont  $F$  est la projection est isotope à  $\{(q, 0, 0) \in J^1 \mathbf{R}\}$ ,  $\tilde{F}$  est isotope au front lèvres. Ce front a une seule décomposition admissible, donc par le théorème de Chekanov-Pushkar,  $\tilde{F}$  aussi admet une unique décomposition admissible.  $\square$

#### REMARQUES.

(1) Le Théorème 3.2 fournit un critère géométrique purement combinatoire qui permet de déterminer la solution de minimax d'un front d'onde (de type solution multivoque) de dimension 1 : il suffit pour cela de trouver la seule décomposition admissible d'une compactification du front. La section associée à la section à l'infini est alors la section de Chaperon-Sikorav du front compactifié, ce qui détermine sans ambiguïté le graphe de la solution de minimax sur le front initial.

(2) Les axiomes qui définissent les décompositions admissibles d'un front d'onde ont été définis par Chekanov et Pushkar comme généralisation de la classification des points critiques d'une fonction de Morse en couple de fonctions critiques liés. En ce sens le Théorème 3.2 est le cas simple dont le théorème de Chekanov et Pushkar est la généralisation.

EXEMPLE 3.3. D'après l'exemple 3.1, le graphe de la solution de minimax associée au front montré à la Figure 14 est la section marquée par un trait plus épais.

### 3.4 TRIANGLES ÉVANESCENTS

Dans cette section on donne une méthode qui permet de remplacer un front d'onde de type solution multivoque par un front plus simple du même type et ayant le même minimax. Cela permet de déterminer le minimax du front initial en itérant cette méthode un nombre fini de fois.