Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES
Autor: Cantat, Serge
Kapitel: 6.3 Endomorphismes agissant par automorphismes dans les fibres
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66689

$L/(N\Gamma)$; cette variété Y est munie d'un endomorphisme f_Y agissant par automorphisme dans les fibres.

6.3 ENDOMORPHISMES AGISSANT PAR AUTOMORPHISMES DANS LES FIBRES

PROPOSITION 6.2. *Soit X une variété homogène complexe compacte dont la fibration de Tits a pour base un espace projectif. Si f est un endomorphisme de degré strictement supérieur à 1 qui agit par automorphisme dans les fibres, la fibration de Tits est un produit.*

Démonstration: première étape. Conservons les notations du paragraphe 6.1 et supposons pour commencer que la fibre de Tits F est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe L. Dans ce cas, quitte à remplacer l'endomorphisme f par l'un de ses itérés, l'action de f dans les fibres se fait par translation. En particulier, son action sur le groupe fondamental des fibres est triviale. Le degré de f étant supérieur à 1, l'action de $\bar{f}$ sur $\pi_2(\mathbf{P}^m)$ est la multiplication par un entier strictement plus grand que 1. L'équivariance de la suite exacte

$$(22) \qquad \cdots \to \pi_2(\mathbf{P}^m) \to \pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(\mathbf{P}^m) = \{0\} \to \cdots$$

montre donc que la première flèche a une image finie. Quitte à changer X par un revêtement fini, on peut donc supposer que le groupe fondamental de F s'injecte dans celui de X.

Si nous passons au revêtement universel $\widetilde{X}$ de X, la fibre de la fibration de Tits est alors remplacée par le groupe de Lie simplement connexe L et $\widetilde{X}$ est l'espace total d'un fibré principal sous l'action de L par translations à droite. L'endomorphisme f s'y relève en un morphisme d'espaces fibrés $\widetilde{f}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, qui est équivariant pour l'action de L par multiplication à droite à la source et par multiplication à droite après composition par un automorphisme de L au but. On obtient donc un morphisme $\widetilde{f}$ au-dessus de f entre deux fibrés principaux équivalents. Les classes caractéristiques du fibré principal $\widetilde{X}$ doivent être invariantes par $\bar{f}$ et sont donc nulles, car $\bar{f}$ agit par multiplication par un entier positif strictement plus grand que 1 sur chaque espace de cohomologie. Nous allons employer cette propriété à plusieurs reprises pour montrer que la fibration de Tits est en fait un produit.

Soit W le fibré vectoriel obtenu en faisant le produit fibré du fibré principal $\widetilde{X}$ par la représentation adjointe de L. Il suffit de montrer que ce fibré vectoriel est trivial. Par construction, $\widetilde{X}$ est un fibré principal obtenu par la suspension d'une représentation

(23) $$\rho\colon P \to L$$

où P est le stabilisateur du point $[1 : 0 : \ldots : 0]$ pour l'action de $\mathbf{PGL}(m+1, \mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{Sp}((m+1)/2, \mathbf{C})$) sur $\mathbf{P}^m$. Le fibré W est donc un fibré vectoriel homogène : il est obtenu par suspension de la représentation $\mathrm{ad}_L \circ \rho$ où ad_L désigne la représentation adjointe de L.

L'endomorphisme $\widetilde{f}$ détermine un endomorphisme de W (au-dessus de f) qui agit par isomorphisme linéaire dans les fibres. L'argument relatif aux classes caractéristiques du fibré $\widetilde{X}$ affirme ainsi que les classes de Chern de W sont nulles et, en particulier, que sa pente

(24) $$\mu(W) = \frac{c_1(W)}{\mathrm{rang}(W)}$$

est nulle. Si V était un sous-faisceau de W de pente $\mu(V)$ strictement supérieure à 0, son image réciproque par $\widetilde{f}^n$ serait de pente $d^n \mu(V)$, ce qui contredirait l'existence d'une borne supérieure pour les pentes des sous-faisceaux de W (voir [17], § V.7). Ceci montre que W est un fibré semi-stable et permet de trouver une décomposition de W en somme directe de sous-faisceaux

(25) $$W = \bigoplus_{i=1,\ldots,k} W_i$$

telle que chaque W_i est stable et de pente nulle [24]. L'image réciproque d'une telle décomposition par $\widetilde{f}$ est une nouvelle décomposition de W en faisceaux stables : par le corollaire 2.8 de [24], chaque $\widetilde{f}^*(W_i)$ est donc isomorphe à l'un des W_j. Ceci montre que toutes les classes de Chern des W_i sont nulles. Puisque $\mathbf{P}^n$ est simplement connexe, la nullité des classes de Chern et la stabilité assurent la trivialité. Les W_i, et donc W lui même, sont triviaux.

Ceci démontre la proposition lorsque la fibre de Tits est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple par un réseau : la fibration étant triviale, f admet un facteur inversible.

Seconde étape. Lorsque L est un groupe de Lie connexe simplement connexe quelconque, l'argument qui vient d'être donné montre que le fibré principal associé à sa partie semi-simple est trivial.

Dans la suite exacte (22) nous pouvons donc supposer que l'image de la première flèche est contenue dans l'intersection de Γ avec le radical de L. On peut donc supposer pendant quelques lignes que L est résoluble.

Un automorphisme d'un tore agit sur le groupe fondamental $\mathbf{Z}^n$ en ne possédant aucune valeur propre entière strictement plus grande que 1. Plus généralement, si L est résoluble, il n'existe pas de sous-groupe cyclique infini $A = \{\dots, a^{-1}, 1, a, a^2, \dots\}$ dans Γ tel que $f_*(a) = a^d$ avec $|d| > 1$. L'équivariance de la suite exacte (22) montre alors que l'image de la première flèche est triviale. Comme dans la première étape, on peut donc relever la dynamique au revêtement universel de X et supposer que les fibres de la projection sur $\mathbf{P}^m$ sont isomorphes au groupe de Lie simplement connexe L.

La variété $\widetilde{X}$ est obtenue en faisant une suspension à partir d'un morphisme du groupe parabolique P dans L et la première étape permet de supposer que le morphisme du groupe parabolique P à valeurs dans L est en fait à valeurs dans le radical résoluble $\mathrm{Rad}(L)$ de L.

Supposons pour commencer que P est le stabilisateur de $[1:0:\ldots:0]$ dans $\mathbf{SL}(m+1,\mathbf{C})$. Un tel morphisme est trivial sur le sous-groupe simple constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbf{SL}(m,\mathbf{C}). \tag{26}$$

Il est donc trivial sur le plus petit sous-groupe distingué contenant cette copie de $\mathbf{SL}(m,\mathbf{C})$ et il est facile d'en déduire que le morphisme factorise à travers la représentation de P dans $\mathbf{C}^*$ donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & A \end{pmatrix} \mapsto \alpha. \tag{27}$$

Si l'un des poids de la représentation associée est non nul, nous pouvons construire un fibré en droites $\widetilde{f}$-équivariant de classe de Chern non nulle, ce qui est impossible. Tous les poids de la représentation sont donc nuls et le morphisme de P dans L est trivial.

Supposons maintenant que P est le stabilisateur de $[1:0:\ldots:0]$ dans le groupe $\mathbf{Sp}(q,\mathbf{C})$, avec $m+1 = 2q$. Dans ce cas, le morphisme de P dans $\mathrm{Rad}(L)$ est trivial sur le sous-groupe de Lie simple

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \tag{28}$$

où A décrit $\mathbf{Sp}(q-1,\mathbf{C})$ et Id est l'élément neutre de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{C})$. Le morphisme de P dans $\mathrm{Rad}(L)$ est donc trivial sur le plus petit sous-groupe algébrique distingué qui contient ce groupe. Il transite ainsi par

$$\begin{pmatrix} M & a \\ 0 & A \end{pmatrix} \mapsto M, \tag{29}$$

où M est une matrice triangulaire supérieure de déterminant 1,

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Là encore, l'argument sur les classes de Chern permet de conclure que la représentation est triviale : les matrices M diagonales sont dans le noyau et le sous-groupe distingué qu'elles engendrent coïncide avec le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Nous avons donc montré dans tous les cas que la représentation de P était triviale, ce qui assure que X est un produit. Le théorème est démontré.

EXEMPLE 6.1. Pour les surfaces de Hopf (voir l'exemple 5.1), le revêtement universel coïncide avec le fibré tautologique de $\mathbf{P}^1$ (de fibre $\mathbf{C}^*$ et de classe de Chern -1). Cette surface n'a donc aucun endomorphisme non injectif qui soit de degré 1 dans les fibres. Nous pourrions le montrer directement en travaillant sur le revêtement universel $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$.

6.4 APPLICATION

Pour démontrer le théorème 1.1, il suffit maintenant de juxtaposer le paragraphe 6.2, la proposition 6.2 et le théorème de Paranjape et Srinivas : si f est un endomorphisme sans facteur inversible, la base de la fibration de Tits doit être un produit d'espaces projectifs et f induit un produit d'endomorphismes non inversibles, donc la fibre est une nilvariété.

REMARQUE 6.1. Certains endomorphismes de la base $\Pi_i \mathbf{P}^{m_i}$ ne se relèvent pas en des endomorphismes de X, même si la fibre de Tits est une nilvariété. Si l'on suppose que la fibre F est un quotient d'un groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_n$, une condition nécessaire et suffisante est que les endomorphismes $f_i \colon \mathbf{P}^{m_i} \to \mathbf{P}^{m_i}$ aient tous même degré pour les indices i tels que la suspension de F au-dessus de $\mathbf{P}^{m_i}$ est non triviale. Ce résultat peut être obtenu en utilisant les arguments présentés au cours des exemples 5.2 et 5.3. Nous le laissons en exercice.

7. ENDOMORPHISMES IRRÉDUCTIBLES

Dans [10], J.-Y. Briend et J. Duval montrent que les endomorphismes non inversibles de l'espace projectif possèdent tous une unique mesure de probabilité invariante d'entropie maximale. De plus, cette mesure coïncide avec