Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES
Autor: Cantat, Serge
Kapitel: 6.2 Un théorème de Jörg Winkelmann
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66689

6.2 UN THÉORÈME DE JÖRG WINKELMANN

Sur une variété parallélisable compacte L/Γ, les champs de vecteurs holomorphes globaux sont en correspondance bi-univoque avec les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ de L. Tout endomorphisme ϕ de L/Γ détermine alors un endomorphisme d'algèbre de Lie $\phi_*\colon \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ (voir [29]). Si L est simplement connexe, il existe donc un automorphisme Φ de L qui stabilise Γ (*i.e.* $\Phi(\Gamma) \subset \Gamma$) et un élément a de L tel que $\phi(g\Gamma) = a\Phi(g)\Gamma$.

Puisque ϕ_* est un morphisme d'algèbre de Lie, il préserve le radical résoluble de $\mathfrak{l}$. Ceci permet de trouver une fibration équivariante de L/Γ à valeurs dans S/Γ' où S est semi-simple. Puisque tous les endomorphismes des algèbres de Lie simples sont intérieurs, l'endomorphisme induit sur la base est un automorphisme et l'un de ses itérés est une translation à gauche. Ce raisonnement peut être poussé un cran plus loin et conduit au théorème suivant de J. Winkelmann [29] :

THÉORÈME 6.1 (J. Winkelmann). *Soit $F = L/\Gamma$ une variété complexe compacte parallélisable et f un endomorphisme holomorphe de F. Si N désigne le nilradical de L, il existe un automorphisme $f'\colon L/N\Gamma \to L/N\Gamma$ qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd} L/\Gamma \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & L/\Gamma \arrow[d, "\pi"] \\ L/(N\Gamma) \arrow[r, "f'"'] & L/(N\Gamma)\,. \end{tikzcd}$$

Reprenons l'étude de la fibration de Tits commencée au paragraphe 6.1. Le théorème précédent s'applique simultanément à l'action du groupe parabolique P et à celle induite par l'endomorphisme f sur les fibres. Nous pouvons donc énoncer une version fibrée du théorème de J. Winkelmann. Si nous notons L/Γ la fibre de Tits (où Γ est un réseau du groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe L), et N le radical nilpotent de L, nous obtenons un diagramme commutatif de fibrations

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{morphisme fibré}"] \arrow[d, "\Pi"'] & Y \arrow[d, "\Pi"] \\ \mathbf{P}^m \arrow[r, "id"'] & \mathbf{P}^m \end{tikzcd}$$

qui est équivariant sous l'action de f ; la variété Y est un espace homogène complexe compact dont la base de Tits est isomorphe à $\mathbf{P}^m$ et la fibre à

$L/(N\Gamma)$; cette variété Y est munie d'un endomorphisme f_Y agissant par automorphisme dans les fibres.

6.3 Endomorphismes agissant par automorphismes dans les fibres

Proposition 6.2. *Soit X une variété homogène complexe compacte dont la fibration de Tits a pour base un espace projectif. Si f est un endomorphisme de degré strictement supérieur à 1 qui agit par automorphisme dans les fibres, la fibration de Tits est un produit.*

Démonstration : première étape. Conservons les notations du paragraphe 6.1 et supposons pour commencer que la fibre de Tits F est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe L. Dans ce cas, quitte à remplacer l'endomorphisme f par l'un de ses itérés, l'action de f dans les fibres se fait par translation. En particulier, son action sur le groupe fondamental des fibres est triviale. Le degré de f étant supérieur à 1, l'action de $\bar{f}$ sur $\pi_2(\mathbf{P}^m)$ est la multiplication par un entier strictement plus grand que 1. L'équivariance de la suite exacte

$$(22) \qquad \cdots \to \pi_2(\mathbf{P}^m) \to \pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(\mathbf{P}^m) = \{0\} \to \cdots$$

montre donc que la première flèche a une image finie. Quitte à changer X par un revêtement fini, on peut donc supposer que le groupe fondamental de F s'injecte dans celui de X.

Si nous passons au revêtement universel $\widetilde{X}$ de X, la fibre de la fibration de Tits est alors remplacée par le groupe de Lie simplement connexe L et $\widetilde{X}$ est l'espace total d'un fibré principal sous l'action de L par translations à droite. L'endomorphisme f s'y relève en un morphisme d'espaces fibrés $\widetilde{f}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, qui est équivariant pour l'action de L par multiplication à droite à la source et par multiplication à droite après composition par un automorphisme de L au but. On obtient donc un morphisme $\widetilde{f}$ au-dessus de f entre deux fibrés principaux équivalents. Les classes caractéristiques du fibré principal $\widetilde{X}$ doivent être invariantes par $\bar{f}$ et sont donc nulles, car $\bar{f}$ agit par multiplication par un entier positif strictement plus grand que 1 sur chaque espace de cohomologie. Nous allons employer cette propriété à plusieurs reprises pour montrer que la fibration de Tits est en fait un produit.

Soit W le fibré vectoriel obtenu en faisant le produit fibré du fibré principal $\widetilde{X}$ par la représentation adjointe de L. Il suffit de montrer que ce fibré vectoriel est trivial. Par construction, $\widetilde{X}$ est un fibré principal obtenu par la suspension