Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES
Autor: Cantat, Serge
Kapitel: 6.1 Structure de la fibration de Tits
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66689

6.1 Structure de la fibration de Tits

Supposons que la base de la fibration de Tits est un espace projectif $\mathbf{P}^m$. La fibre F est une variété parallélisable : nous noterons L_0 la composante connexe de l'identité de son groupe d'automorphismes et L son revêtement universel. Il existe un sous-groupe discret cocompact Γ_0 de L_0 tel que $F = L_0/\Gamma_0$. L'image réciproque de Γ_0 par l'application de revêtement $L \to L_0$ sera notée Γ.

Si l'on écrit X sous la forme G/H, où G est un groupe de Lie complexe simplement connexe agissant holomorphiquement sur X, on récupère un morphisme $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^m)$ dont l'image S agit transitivement sur $\mathbf{P}^m$. En particulier, S coïncide avec le groupe $\mathbf{PGL}(n, \mathbf{C})$ ou éventuellement avec le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(n/2, \mathbf{C})$ si n est pair (voir [2]). Ces groupes sont simples, ce qui permet d'appliquer le théorème de Levi-Malcev et de trouver une section $\sigma\colon S \to G$ du morphisme ρ. Nous noterons encore S l'image dans G du groupe S.

Fixons un point q_0 de $\mathbf{P}^m$, par exemple celui de coordonnées $[1 : 0 : \ldots : 0]$, et notons P le stabilisateur de q_0 dans S, de sorte que $\mathbf{P}^m$ s'identifie à S/P. L'action de S sur X (via $\sigma\colon S \to G$) permute transitivement les fibres de la fibration de Tits. Nous pouvons donc reconstruire X comme la suspension de la représentation

$$P \to \mathrm{Aut}(F_{q_0})^0 = L_0 \tag{19}$$

obtenue par l'action de P sur la fibre F_{q_0} au-dessus du point Q. L'action de P ainsi construite se fait par translation à gauche.

Si S est le groupe spécial linéaire, alors P est (conjugué à)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ 0 & A \end{pmatrix} : \mathbf{b} \in \mathbf{C}^n,\ A \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C}),\ a = \det(A)^{-1} \right\}, \tag{20}$$

et lorsque S est le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(q, \mathbf{C})$,

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \star\star\star \\ 0 & a^{-1} & \star\star\star \\ & & \\ & 0 & A \end{pmatrix} : A \in \mathbf{Sp}(q-1, \mathbf{C}) \right\}. \tag{21}$$

Soit f un endomorphisme de X, $\bar{f}$ l'endomorphisme induit sur $\mathbf{P}^m$ et q un point de $\mathbf{P}^m$. Si s est un élément de S qui envoie F_q sur $F_{\bar{f}(q)}$, $s^{-1} \circ f$ détermine un endomorphisme de la fibre F_q. Ce dernier ne dépend du choix de s que modulo P : son action sur les groupes d'homotopies et d'homologie de F_q n'en dépend donc pas. Cette remarque permet de définir la notion d'*endomorphisme agissant par translation, par automorphisme ou par endomorphisme de degré d dans les fibres.*