

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES  
**Autor:** Cantat, Serge  
**Kapitel:** 6. Existence de facteurs inversibles.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66689>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$\text{Aut}^0(M_3)$  déterminée par la translation à gauche par l'élément

$$(17) \quad \rho_\tau \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\log(a)}{2i\pi}\tau \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque «l'image» de  $\rho_\tau$  est dans le centre de  $\mathcal{H}_3(\mathbf{C})$ , il est facile de voir que  $\rho_\tau$  définit bien une représentation à valeurs dans  $\text{Aut}(M_3)$  et que la variété  $X_\tau$  obtenue par suspension de cette représentation au-dessus de  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})/P$  est homogène. La fibration de Tits de  $X_\tau$  coïncide avec la projection sur  $\mathbf{P}^1$  et n'est pas triviale. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'image du second groupe d'homologie de  $\mathbf{P}^1$  dans la fibre  $M_3$  est engendrée par la matrice de paramètres  $x = y = 0, z = \tau$ .

Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers et  $\bar{f}$  est un endomorphisme de  $\mathbf{P}^1$  de degré  $pq$ , la transformation

$$(18) \quad f([u : v], \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \mapsto (\bar{f}([u : v]), \begin{pmatrix} 1 & p.x & pq.z \\ 0 & 1 & q.y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

détermine un endomorphisme de  $X_\tau$  de degré  $(pq)^5$ . Tous les endomorphismes de  $\mathbf{P}^1$  se relèvent donc en des endomorphismes de  $M_3$ . Les endomorphismes ainsi construits n'ont pas de facteur inversible.

**EXEMPLE 5.4.** Donnons maintenant un exemple de variété homogène non kähleriennne ne possédant pas d'endomorphisme de degré supérieur à 1. Soit  $X$  le quotient de  $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$  par un sous-groupe discret cocompact  $\Gamma$ . Pour montrer que tout endomorphisme  $f: X \rightarrow X$  est un automorphisme, utilisons que  $X$  est parallélisable, son fibré cotangent étant trivialisé par les 1-formes invariantes par translation à droites sur  $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$ . L'action de  $f$  sur les formes différentielles induit ainsi un endomorphisme  $f^*$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ , dont le déterminant est égal au degré topologique de  $f$ . Tout endomorphisme de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  étant un automorphisme intérieur (voir [16], prop. 1.98), le déterminant de  $f^*$  est égal à 1 et  $f$  est un automorphisme.

## 6. EXISTENCE DE FACTEURS INVERSIBLES.

Nous démontrons maintenant le théorème énoncé dans l'introduction. Les idées principales sont déjà apparues dans la partie précédente.

## 6.1 STRUCTURE DE LA FIBRATION DE TITS

Supposons que la base de la fibration de Tits est un espace projectif  $\mathbf{P}^n$ . La fibre  $F$  est une variété parallélisable : nous noterons  $L_0$  la composante connexe de l'identité de son groupe d'automorphismes et  $L$  son revêtement universel. Il existe un sous-groupe discret cocompact  $\Gamma_0$  de  $L_0$  tel que  $F = L_0/\Gamma_0$ . L'image réciproque de  $\Gamma_0$  par l'application de revêtement  $L \rightarrow L_0$  sera notée  $\Gamma$ .

Si l'on écrit  $X$  sous la forme  $G/H$ , où  $G$  est un groupe de Lie complexe simplement connexe agissant holomorphiquement sur  $X$ , on récupère un morphisme  $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{P}^n)$  dont l'image  $S$  agit transitivement sur  $\mathbf{P}^n$ . En particulier,  $S$  coïncide avec le groupe  $\mathbf{PGL}(n, \mathbf{C})$  ou éventuellement avec le groupe symplectique  $\mathbf{Sp}(n/2, \mathbf{C})$  si  $n$  est pair (voir [2]). Ces groupes sont simples, ce qui permet d'appliquer le théorème de Levi-Malcev et de trouver une section  $\sigma: S \rightarrow G$  du morphisme  $\rho$ . Nous noterons encore  $S$  l'image dans  $G$  du groupe  $S$ .

Fixons un point  $q_0$  de  $\mathbf{P}^n$ , par exemple celui de coordonnées  $[1 : 0 : \dots : 0]$ , et notons  $P$  le stabilisateur de  $q_0$  dans  $S$ , de sorte que  $\mathbf{P}^n$  s'identifie à  $S/P$ . L'action de  $S$  sur  $X$  (via  $\sigma: S \rightarrow G$ ) permute transitivement les fibres de la fibration de Tits. Nous pouvons donc reconstruire  $X$  comme la suspension de la représentation

$$(19) \quad P \rightarrow \text{Aut}(F_{q_0})^0 = L_0$$

obtenue par l'action de  $P$  sur la fibre  $F_{q_0}$  au-dessus du point  $Q$ . L'action de  $P$  ainsi construite se fait par translation à gauche.

Si  $S$  est le groupe spécial linéaire, alors  $P$  est (conjugué à)

$$(20) \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ 0 & A \end{pmatrix} : \mathbf{b} \in \mathbf{C}^n, A \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C}), a = \det(A)^{-1} \right\},$$

et lorsque  $S$  est le groupe symplectique  $\mathbf{Sp}(q, \mathbf{C})$ ,

$$(21) \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \star \star \star \\ 0 & a^{-1} & \star \star \star \\ 0 & & A \end{pmatrix} : A \in \mathbf{Sp}(q-1, \mathbf{C}) \right\}.$$

Soit  $f$  un endomorphisme de  $X$ ,  $\bar{f}$  l'endomorphisme induit sur  $\mathbf{P}^n$  et  $q$  un point de  $\mathbf{P}^n$ . Si  $s$  est un élément de  $S$  qui envoie  $F_q$  sur  $F_{\bar{f}(q)}$ ,  $s^{-1} \circ f$  détermine un endomorphisme de la fibre  $F_q$ . Ce dernier ne dépend du choix de  $s$  que modulo  $P$  : son action sur les groupes d'homotopies et d'homologie de  $F_q$  n'en dépend donc pas. Cette remarque permet de définir la notion d'*endomorphisme agissant par translation, par automorphisme ou par endomorphisme de degré  $d$  dans les fibres*.

## 6.2 UN THÉORÈME DE JÖRG WINKELMANN

Sur une variété parallélisable compacte  $L/\Gamma$ , les champs de vecteurs holomorphes globaux sont en correspondance bi-univoque avec les éléments de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$  de  $L$ . Tout endomorphisme  $\phi$  de  $L/\Gamma$  détermine alors un endomorphisme d'algèbre de Lie  $\phi_*: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$  (voir [29]). Si  $L$  est simplement connexe, il existe donc un automorphisme  $\Phi$  de  $L$  qui stabilise  $\Gamma$  (*i.e.*  $\Phi(\Gamma) \subset \Gamma$ ) et un élément  $a$  de  $L$  tel que  $\phi(g\Gamma) = a\Phi(g)\Gamma$ .

Puisque  $\phi_*$  est un morphisme d'algèbre de Lie, il préserve le radical résoluble de  $\mathfrak{l}$ . Ceci permet de trouver une fibration équivariante de  $L/\Gamma$  à valeurs dans  $S/\Gamma'$  où  $S$  est semi-simple. Puisque tous les endomorphismes des algèbres de Lie simples sont intérieurs, l'endomorphisme induit sur la base est un automorphisme et l'un de ses itérés est une translation à gauche. Ce raisonnement peut être poussé un cran plus loin et conduit au théorème suivant de J. Winkelmann [29] :

**THÉORÈME 6.1** (J. Winkelmann). *Soit  $F = L/\Gamma$  une variété complexe compacte parallélisable et  $f$  un endomorphisme holomorphe de  $F$ . Si  $N$  désigne le nilradical de  $L$ , il existe un automorphisme  $f': L/N\Gamma \rightarrow L/N\Gamma$  qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} L/\Gamma & \xrightarrow{f} & L/\Gamma \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ L/(N\Gamma) & \xrightarrow{f'} & L/(N\Gamma) . \end{array}$$

Reprendons l'étude de la fibration de Tits commencée au paragraphe 6.1. Le théorème précédent s'applique simultanément à l'action du groupe parabolique  $P$  et à celle induite par l'endomorphisme  $f$  sur les fibres. Nous pouvons donc énoncer une version fibrée du théorème de J. Winkelmann. Si nous notons  $L/\Gamma$  la fibre de Tits (où  $\Gamma$  est un réseau du groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe  $L$ ), et  $N$  le radical nilpotent de  $L$ , nous obtenons un diagramme commutatif de fibrations

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{morphisme fibré}} & Y \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathbf{P}^m & \xrightarrow{id} & \mathbf{P}^m \end{array}$$

qui est équivariant sous l'action de  $f$ ; la variété  $Y$  est un espace homogène complexe compact dont la base de Tits est isomorphe à  $\mathbf{P}^m$  et la fibre à

$L/(N\Gamma)$ ; cette variété  $Y$  est munie d'un endomorphisme  $f_Y$  agissant par automorphisme dans les fibres.

### 6.3 ENDOMORPHISMES AGISSANT PAR AUTOMORPHISMES DANS LES FIBRES

**PROPOSITION 6.2.** *Soit  $X$  une variété homogène complexe compacte dont la fibration de Tits a pour base un espace projectif. Si  $f$  est un endomorphisme de degré strictement supérieur à 1 qui agit par automorphisme dans les fibres, la fibration de Tits est un produit.*

*Démonstration: première étape.* Conservons les notations du paragraphe 6.1 et supposons pour commencer que la fibre de Tits  $F$  est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe  $L$ . Dans ce cas, quitte à remplacer l'endomorphisme  $f$  par l'un de ses itérés, l'action de  $f$  dans les fibres se fait par translation. En particulier, son action sur le groupe fondamental des fibres est triviale. Le degré de  $f$  étant supérieur à 1, l'action de  $\bar{f}$  sur  $\pi_2(\mathbf{P}^m)$  est la multiplication par un entier strictement plus grand que 1. L'équivariance de la suite exacte

$$(22) \quad \cdots \rightarrow \pi_2(\mathbf{P}^m) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(\mathbf{P}^m) = \{0\} \rightarrow \cdots$$

montre donc que la première flèche a une image finie. Quitte à changer  $X$  par un revêtement fini, on peut donc supposer que le groupe fondamental de  $F$  s'injecte dans celui de  $X$ .

Si nous passons au revêtement universel  $\tilde{X}$  de  $X$ , la fibre de la fibration de Tits est alors remplacée par le groupe de Lie simplement connexe  $L$  et  $\tilde{X}$  est l'espace total d'un fibré principal sous l'action de  $L$  par translations à droite. L'endomorphisme  $f$  s'y relève en un morphisme d'espaces fibrés  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ , qui est équivariant pour l'action de  $L$  par multiplication à droite à la source et par multiplication à droite après composition par un automorphisme de  $L$  au but. On obtient donc un morphisme  $\tilde{f}$  au-dessus de  $f$  entre deux fibrés principaux équivalents. Les classes caractéristiques du fibré principal  $\tilde{X}$  doivent être invariantes par  $\tilde{f}$  et sont donc nulles, car  $\tilde{f}$  agit par multiplication par un entier positif strictement plus grand que 1 sur chaque espace de cohomologie. Nous allons employer cette propriété à plusieurs reprises pour montrer que la fibration de Tits est en fait un produit.

Soit  $W$  le fibré vectoriel obtenu en faisant le produit fibré du fibré principal  $\tilde{X}$  par la représentation adjointe de  $L$ . Il suffit de montrer que ce fibré vectoriel est trivial. Par construction,  $\tilde{X}$  est un fibré principal obtenu par la suspension

d'une représentation

$$(23) \quad \rho: P \rightarrow L$$

où  $P$  est le stabilisateur du point  $[1 : 0 : \dots : 0]$  pour l'action de  $\mathbf{PGL}(m+1, \mathbf{C})$  (resp.  $\mathbf{Sp}((m+1)/2, \mathbf{C})$ ) sur  $\mathbf{P}^n$ . Le fibré  $W$  est donc un fibré vectoriel homogène: il est obtenu par suspension de la représentation  $\text{ad}_L \circ \rho$  où  $\text{ad}_L$  désigne la représentation adjointe de  $L$ .

L'endomorphisme  $\tilde{f}$  détermine un endomorphisme de  $W$  (au-dessus de  $f$ ) qui agit par isomorphisme linéaire dans les fibres. L'argument relatif aux classes caractéristiques du fibré  $\tilde{X}$  affirme ainsi que les classes de Chern de  $W$  sont nulles et, en particulier, que sa pente

$$(24) \quad \mu(W) = \frac{c_1(W)}{\text{rang}(W)}$$

est nulle. Si  $V$  était un sous-faisceau de  $W$  de pente  $\mu(V)$  strictement supérieure à 0, son image réciproque par  $\tilde{f}^n$  serait de pente  $d^n \mu(V)$ , ce qui contredirait l'existence d'une borne supérieure pour les pentes des sous-faisceaux de  $W$  (voir [17], § V.7). Ceci montre que  $W$  est un fibré semi-stable et permet de trouver une décomposition de  $W$  en somme directe de sous-faisceaux

$$(25) \quad W = \bigoplus_{i=1, \dots, k} W_i$$

telle que chaque  $W_i$  est stable et de pente nulle [24]. L'image réciproque d'une telle décomposition par  $\tilde{f}$  est une nouvelle décomposition de  $W$  en faisceaux stables: par le corollaire 2.8 de [24], chaque  $\tilde{f}^*(W_i)$  est donc isomorphe à l'un des  $W_j$ . Ceci montre que toutes les classes de Chern des  $W_i$  sont nulles. Puisque  $\mathbf{P}^n$  est simplement connexe, la nullité des classes de Chern et la stabilité assurent la trivialité. Les  $W_i$ , et donc  $W$  lui-même, sont triviaux.

Ceci démontre la proposition lorsque la fibre de Tits est le quotient d'un groupe de Lie semi-simple par un réseau: la fibration étant triviale,  $f$  admet un facteur inversible.

*Seconde étape.* Lorsque  $L$  est un groupe de Lie connexe simplement connexe quelconque, l'argument qui vient d'être donné montre que le fibré principal associé à sa partie semi-simple est trivial.

Dans la suite exacte (22) nous pouvons donc supposer que l'image de la première flèche est contenue dans l'intersection de  $\Gamma$  avec le radical de  $L$ . On peut donc supposer pendant quelques lignes que  $L$  est résoluble.

Un automorphisme d'un tore agit sur le groupe fondamental  $\mathbf{Z}^n$  en ne possédant aucune valeur propre entière strictement plus grande que 1. Plus généralement, si  $L$  est résoluble, il n'existe pas de sous-groupe cyclique infini  $A = \{\dots, a^{-1}, 1, a, a^2, \dots\}$  dans  $\Gamma$  tel que  $f_*(a) = a^d$  avec  $|d| > 1$ . L'équivariance de la suite exacte (22) montre alors que l'image de la première flèche est triviale. Comme dans la première étape, on peut donc relever la dynamique au revêtement universel de  $X$  et supposer que les fibres de la projection sur  $\mathbf{P}^m$  sont isomorphes au groupe de Lie simplement connexe  $L$ .

La variété  $\widetilde{X}$  est obtenue en faisant une suspension à partir d'un morphisme du groupe parabolique  $P$  dans  $L$  et la première étape permet de supposer que le morphisme du groupe parabolique  $P$  à valeurs dans  $L$  est en fait à valeurs dans le radical résoluble  $\text{Rad}(L)$  de  $L$ .

Supposons pour commencer que  $P$  est le stabilisateur de  $[1 : 0 : \dots : 0]$  dans  $\mathbf{SL}(m+1, \mathbf{C})$ . Un tel morphisme est trivial sur le sous-groupe simple constitué des matrices de la forme

$$(26) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbf{SL}(m, \mathbf{C}).$$

Il est donc trivial sur le plus petit sous-groupe distingué contenant cette copie de  $\mathbf{SL}(m, \mathbf{C})$  et il est facile d'en déduire que le morphisme factorise à travers la représentation de  $P$  dans  $\mathbf{C}^*$  donnée par

$$(27) \quad \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & A \end{pmatrix} \mapsto \alpha.$$

Si l'un des poids de la représentation associée est non nul, nous pouvons construire un fibré en droites  $\widetilde{f}$ -équivariant de classe de Chern non nulle, ce qui est impossible. Tous les poids de la représentation sont donc nuls et le morphisme de  $P$  dans  $L$  est trivial.

Supposons maintenant que  $P$  est le stabilisateur de  $[1 : 0 : \dots : 0]$  dans le groupe  $\mathbf{Sp}(q, \mathbf{C})$ , avec  $m+1 = 2q$ . Dans ce cas, le morphisme de  $P$  dans  $\text{Rad}(L)$  est trivial sur le sous-groupe de Lie simple

$$(28) \quad \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

où  $A$  décrit  $\mathbf{Sp}(q-1, \mathbf{C})$  et  $\text{Id}$  est l'élément neutre de  $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ . Le morphisme de  $P$  dans  $\text{Rad}(L)$  est donc trivial sur le plus petit sous-groupe algébrique distingué qui contient ce groupe. Il transite ainsi par

$$(29) \quad \begin{pmatrix} M & a \\ 0 & A \end{pmatrix} \mapsto M,$$

où  $M$  est une matrice triangulaire supérieure de déterminant 1,

$$(30) \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Là encore, l'argument sur les classes de Chern permet de conclure que la représentation est triviale : les matrices  $M$  diagonales sont dans le noyau et le sous-groupe distingué qu'elles engendent coïncide avec le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Nous avons donc montré dans tous les cas que la représentation de  $P$  était triviale, ce qui assure que  $X$  est un produit. Le théorème est démontré.

**EXEMPLE 6.1.** Pour les surfaces de Hopf (voir l'exemple 5.1), le revêtement universel coïncide avec le fibré tautologique de  $\mathbf{P}^1$  (de fibre  $\mathbf{C}^*$  et de classe de Chern  $-1$ ). Cette surface n'a donc aucun endomorphisme non injectif qui soit de degré 1 dans les fibres. Nous pourrions le montrer directement en travaillant sur le revêtement universel  $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ .

#### 6.4 APPLICATION

Pour démontrer le théorème 1.1, il suffit maintenant de juxtaposer le paragraphe 6.2, la proposition 6.2 et le théorème de Paranjape et Srinivas : si  $f$  est un endomorphisme sans facteur inversible, la base de la fibration de Tits doit être un produit d'espaces projectifs et  $f$  induit un produit d'endomorphismes non inversibles, donc la fibre est une nilvariété.

**REMARQUE 6.1.** Certains endomorphismes de la base  $\prod_i \mathbf{P}^{m_i}$  ne se relèvent pas en des endomorphismes de  $X$ , même si la fibre de Tits est une nilvariété. Si l'on suppose que la fibre  $F$  est un quotient d'un groupe de Heisenberg  $\mathcal{H}_n$ , une condition nécessaire et suffisante est que les endomorphismes  $f_i : \mathbf{P}^{m_i} \rightarrow \mathbf{P}^{m_i}$  aient tous même degré pour les indices  $i$  tels que la suspension de  $F$  au-dessus de  $\mathbf{P}^{m_i}$  est non triviale. Ce résultat peut être obtenu en utilisant les arguments présentés au cours des exemples 5.2 et 5.3. Nous le laissons en exercice.

### 7. ENDOMORPHISMES IRRÉDUCTIBLES

Dans [10], J.-Y. Briand et J. Duval montrent que les endomorphismes non inversibles de l'espace projectif possèdent tous une unique mesure de probabilité invariante d'entropie maximale. De plus, cette mesure coïncide avec