

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGENES  
**Autor:** Cantat, Serge  
**Kapitel:** 5. Quelques exemples  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66689>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

cette construction ne dépend pas de l'écriture de  $X$  sous la forme  $G/H$ . Les fibres sont isomorphes au quotient du groupe de Lie complexe  $L = N/H^0$  par le sous-groupe discret cocompact  $\Gamma = H/H^0$ ; ce sont donc des variétés parallélisables connexes. Nous renvoyons le lecteur à [9], [27], [15] et [2] pour les démonstrations de ces résultats.

VOCABULAIRE. Si  $X$  est une variété homogène compacte, les fibres et la base de la fibration de Tits de  $X$  seront appelées *fibres de Tits* et *base de Tits* de  $X$ .

#### 4.2 PREMIÈRE APPLICATION

Soit  $Q$  la base et  $F$  la fibre de la fibration de Tits d'une variété homogène compacte  $X$ . Si  $f$  est un endomorphisme de  $X$ , il induit un endomorphisme  $\bar{f}$  de la variété de drapeaux  $Q$ . Nous pouvons donc appliquer le théorème de Paranjape et Srinivas. S'il apparaît un facteur  $Q = Q_0 \times Q_1$  sur lequel  $\bar{f}$  induit un automorphisme  $\bar{f}_0: Q_0 \rightarrow Q_0$ , la dynamique de  $f$  s'appauvrit considérablement:  $\bar{f}_0$  est induite par une transformation linéaire isotope à l'identité.

Afin de démontrer le théorème 1.1, nous pourrions donc supposer que la base  $Q$  de la fibration de Tits est un produit d'espaces projectifs :

$$(11) \quad Q = \mathbf{P}^{m_1} \times \dots \times \mathbf{P}^{m_k}, \quad k \in \mathbf{N},$$

et que  $f$  agit diagonalement:  $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k)$  où  $\bar{f}_j \in \text{End}(\mathbf{P}^{m_j})$ .

Soit  $q$  un point de  $Q$  et  $\mathbf{P}_q^{m_j}$  l'espace projectif qui passe par  $q$  et est donné par le  $j^{\text{ème}}$  facteur du produit (11). L'image réciproque de la fibration de Tits par l'injection  $\mathbf{P}_q^{m_j} \rightarrow Q$  ne dépend pas de  $q$  car  $X$  est homogène. On obtient ainsi une variété homogène  $X_j$  dont la fibration de Tits a des fibres isomorphes à celles de  $X$  et une base isomorphe à  $\mathbf{P}^{m_j}$ . Puisque tout endomorphisme d'un espace projectif admet des points fixes,  $f$  induit un endomorphisme de  $X_j$ . Nous étudierons donc d'abord les endomorphismes des variétés homogènes dont la base de Tits est un espace projectif.

### 5. QUELQUES EXEMPLES

Présentons maintenant quelques exemples qui illustrent l'invariance de la fibration de Tits et donnent une petite idée des phénomènes qui peuvent apparaître lorsque la variété homogène n'est pas kählérienne.

EXEMPLE 5.1. L'exemple le plus simple de variété homogène qui ne soit pas kählérienne est la surface de Hopf, obtenue en quotientant  $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$  par les homothéties de rapport  $\lambda^n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $\lambda$  étant un nombre complexe non nul. Cette surface  $S_\lambda$  est difféomorphe à  $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^1$ . Elle fibre sur  $\mathbf{P}^1$ , les fibres étant isomorphes à la courbe elliptique  $\mathbf{C}^*/\langle\lambda\rangle$ .

En voici une seconde construction qui montre directement que cette variété est homogène. Soit  $H_\lambda$  le sous-groupe de  $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$  défini par

$$(12) \quad H_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^n & z \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix} : n \in \mathbf{Z}, z \in \mathbf{C} \right\}.$$

Le quotient de  $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$  par  $H_\lambda$  est isomorphe à la surface de Hopf  $S_\lambda$ . La fibration elliptique de  $S_\lambda$  sur  $\mathbf{P}^1$  coïncide avec sa fibration de Tits et provient de l'inclusion de  $H_\lambda$  dans le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Si  $P(X, Y)$  et  $Q(X, Y)$  sont deux polynômes homogènes de degré  $d$  qui n'ont que l'origine comme zéro commun, la transformation

$$\phi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

passé au quotient en un endomorphisme de degré  $d^3$  sur la surface de Hopf. On construit ainsi de nombreux exemples d'endomorphismes; l'invariance de la fibration de Tits résulte immédiatement de l'homogénéité de  $P$  et  $Q$ .

EXEMPLE 5.2. Le deuxième exemple de variétés complexes compactes non kählériennes est celui donné par Eugenio Calabi et Beno Eckmann dans [11]. Il s'agit de variétés de dimension 3 difféomorphes à  $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ . Chacune des sphères fibre en cercles sur  $\mathbf{P}^1$  et le produit de ces deux fibrations donne naissance à une fibration elliptique localement triviale. L'invariant modulaire de la fibre peut être fixé de manière arbitraire lors de la définition de la structure complexe sur  $\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3$ . Si cet invariant est égal à  $\tau$ , nous noterons  $M_\tau$  la variété de Calabi-Eckmann correspondante.

Ces variétés peuvent être construites de la manière suivante. Soit  $V = (\mathbf{C}^2 \setminus \{0\})^2$ . L'action de  $\mathbf{C}$  sur  $V$  donnée par

$$(13) \quad t \star ((u, v), (x, y)) = ((e^{-t/2}u, e^{t/2}v), (e^{-\tau t/2}x, e^{\tau t/2}y))$$

est fidèle dès que le nombre complexe  $\tau$  appartient au demi-plan de Poincaré. L'espace des orbites est alors une variété isomorphe à  $M_\tau$ . Cette construction a l'avantage de montrer directement que  $M_\tau$  est homogène et possède de nombreux endomorphismes. Pour en construire, il suffit en effet d'exhiber des

transformations holomorphes de  $V$  qui permutent les orbites de l'action (13). Par exemple,

$$(14) \quad ((u, v), (x, y)) \mapsto ((u^3 + u^2v, u^3 + v^3), (xy^2 + x^3, y^3))$$

détermine un endomorphisme de  $M_\tau$  dont le degré topologique est égal à  $3^4$ .

Il est facile de constater sur cet exemple que la fibration elliptique de  $M_\tau$  sur  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  est équivariante: l'endomorphisme permute les fibres et induit une transformation polynômiale de degré 3 sur chaque  $\mathbf{P}^1$ . C'est une illustration de l'invariance de la fibration de Tits. L'égalité entre les degrés des deux endomorphismes de  $\mathbf{P}^1$  illustre un autre phénomène. Notons  $E_\tau$  la fibre elliptique de  $M_\tau$ . La suite exacte longue des groupes d'homotopie

$$(15) \quad \cdots \rightarrow \pi_2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \rightarrow \pi_1(E_\tau) \rightarrow \pi_1(M_\tau) \rightarrow \pi_1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \rightarrow \cdots$$

montre que la simple connexité de  $M_\tau$  résulte du caractère surjectif de la flèche  $\pi_2(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1) \rightarrow \pi_1(E_\tau)$ . L'action d'un endomorphisme de  $\mathbf{P}^1$  sur le second groupe d'homotopie  $\pi_2(\mathbf{P}^1) \simeq \mathbf{Z}$  coïncide avec la multiplication par le degré de l'endomorphisme. Celle d'un endomorphisme holomorphe de  $E_\tau$  sur  $\pi_1(E_\tau) \simeq \mathbf{Z}^2$  se fait par une similitude dont le rapport  $\alpha$  est égal à la racine carrée du degré topologique. Puisque la suite exacte est équivariante, il s'ensuit que le degré de l'endomorphisme sur chaque  $\mathbf{P}^1$  est égal à  $\alpha$ . En particulier, tous les endomorphismes de  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  ne se relèvent pas en des endomorphismes de  $M_\tau$ .

E. Calabi et B. Eckmann construisent des structures complexes similaires sur  $\mathbf{S}^{2p+1} \times \mathbf{S}^{2q+1}$  pour toute paire d'entiers positifs  $(p, q)$  (voir [11], [20]). Une étude analogue à la précédente peut être effectuée pour toutes ces variétés.

EXEMPLE 5.3. Donnons maintenant un exemple pour lequel les fibres de Tits sont des nilvariétés (et pas des tores). Soit  $\mathcal{H}_3(\mathbf{C})$  le groupe de Heisenberg constitué des matrices

$$(16) \quad \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $x, y$  et  $z$  sont trois nombres complexes. Le quotient de  $\mathcal{H}_3(\mathbf{C})$  par  $\mathcal{H}_3(\mathbf{Z}[i])$  est une variété complexe compacte que nous noterons  $M_3$ .

Soit  $P$  le sous-groupe de  $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$  formé par les matrices triangulaires supérieures. Si  $\tau$  appartient à  $\mathbf{Z}[i]$ , on note  $\rho_\tau$  la représentation de  $P$  dans

$\text{Aut}^0(M_3)$  déterminée par la translation à gauche par l'élément

$$(17) \quad \rho_\tau \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\log(a)}{2i\pi} \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque « l'image » de  $\rho_\tau$  est dans le centre de  $\mathcal{H}_3(\mathbf{C})$ , il est facile de voir que  $\rho_\tau$  définit bien une représentation à valeurs dans  $\text{Aut}(M_3)$  et que la variété  $X_\tau$  obtenue par suspension de cette représentation au-dessus de  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})/P$  est homogène. La fibration de Tits de  $X_\tau$  coïncide avec la projection sur  $\mathbf{P}^1$  et n'est pas triviale. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'image du second groupe d'homologie de  $\mathbf{P}^1$  dans la fibre  $M_3$  est engendrée par la matrice de paramètres  $x = y = 0$ ,  $z = \tau$ .

Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers et  $\bar{f}$  est un endomorphisme de  $\mathbf{P}^1$  de degré  $pq$ , la transformation

$$(18) \quad f([u : v], \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \mapsto (\bar{f}([u : v]), \begin{pmatrix} 1 & p.x & pq.z \\ 0 & 1 & q.y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

détermine un endomorphisme de  $X_\tau$  de degré  $(pq)^5$ . Tous les endomorphismes de  $\mathbf{P}^1$  se relèvent donc en des endomorphismes de  $M_3$ . Les endomorphismes ainsi construits n'ont pas de facteur inversible.

EXEMPLE 5.4. Donnons maintenant un exemple de variété homogène non kählérienne ne possédant pas d'endomorphisme de degré supérieur à 1. Soit  $X$  le quotient de  $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$  par un sous-groupe discret cocompact  $\Gamma$ . Pour montrer que tout endomorphisme  $f: X \rightarrow X$  est un automorphisme, utilisons que  $X$  est parallélisable, son fibré cotangent étant trivialisé par les 1-formes invariantes par translation à droites sur  $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$ . L'action de  $f$  sur les formes différentielles induit ainsi un endomorphisme  $f^*$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ , dont le déterminant est égal au degré topologique de  $f$ . Tout endomorphisme de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  étant un automorphisme intérieur (voir [16], prop. 1.98), le déterminant de  $f^*$  est égal à 1 et  $f$  est un automorphisme.

## 6. EXISTENCE DE FACTEURS INVERSIBLES.

Nous démontrons maintenant le théorème énoncé dans l'introduction. Les idées principales sont déjà apparues dans la partie précédente.