Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES
Autor: Cantat, Serge
Kapitel: 4.1 La fibration de Tits
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66689

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

4. Invariance de la fibration de Tits

4.1 La fibration de Tits

Pour étudier les endomorphismes d'une variété complexe compacte, l'existence de fibrations invariantes est un atout crucial. Nous avons déjà signalé les fibrations d'Albanese et pluricanoniques dans la partie 2. Le troisième exemple est fourni par le processus de réduction algébrique. Il donne naissance à une fibration dont les fibres sont les sous-variétés sur lesquelles toute fonction méromorphe est constante. Tout endomorphisme préserve cette fibration; l'action induite sur la base correspond à celle de l'endomorphisme f par composition sur le corps des fonctions méromorphes. Dans le cas général, il s'agit d'une fibration méromorphe (voir [28]) mais pour les variétés homogènes, on dispose du théorème suivant ([1], theorème 6.2):

Théorème 4.1. *Soit X une variété homogène compacte. Il existe une variété homogène projective Y et une fibration localement triviale $\rho: X \to Y$ telle que:*

(i) *Les fibres de ρ sont parallélisables,*

(ii) *ρ réalise un isomorphisme entre le corps des fonctions méromorphes de X et celui de Y,*

(iii) *tout endomorphisme de X permute les fibres de ρ.*

D'après le théorème de Borel et Remmert, Y est le produit d'une variété abélienne par une variété de drapeaux. Une façon de définir la fibration de Tits est de composer la fibration précédente avec la projection de sa base sur la variété de drapeaux. Le théorème précédent et la proposition 3.3 montrent ainsi que la fibration de Tits est invariante par tout endomorphisme.

Proposition 4.2. *La fibration de Tits d'une variété homogène compacte est invariante par tout endomorphisme.*

Pour obtenir ce résultat, nous avons employé une définition quelque peu inhabituelle de la fibration de Tits. Voici la construction initiale de Jacques Tits. Soit $X = G/H$ une variété homogène compacte, avec H un sous-groupe fermé du groupe de Lie complexe G. Notons H^0 la composante connexe de l'élément neutre dans H et N le normalisateur de H^0. On peut montrer que G/N est une variété de drapeaux. On obtient ainsi une fibration de X sur une variété de drapeaux Q qui s'avère être la fibration de Tits; en particulier,

cette construction ne dépend pas de l'écriture de X sous la forme G/H. Les fibres sont isomorphes au quotient du groupe de Lie complexe $L = N/H^0$ par le sous-groupe discret cocompact $\Gamma = H/H^0$; ce sont donc des variétés parallélisables connexes. Nous renvoyons le lecteur à [9], [27], [15] et [2] pour les démonstrations de ces résultats.

VOCABULAIRE. Si X est une variété homogène compacte, les fibres et la base de la fibration de Tits de X seront appelées *fibres de Tits* et *base de Tits* de X.

4.2 PREMIÈRE APPLICATION

Soit Q la base et F la fibre de la fibration de Tits d'une variété homogène compacte X. Si f est un endomorphisme de X, il induit un endomorphisme $\bar{f}$ de la variété de drapeaux Q. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Paranjape et Srinivas. S'il apparaît un facteur $Q = Q_0 \times Q_1$ sur lequel $\bar{f}$ induit un automorphisme $\bar{f}_0 : Q_0 \to Q_0$, la dynamique de f s'appauvrit considérablement : $\bar{f}_0$ est induite par une transformation linéaire isotope à l'identité.

Afin de démontrer le théorème 1.1, nous pourrons donc supposer que la base Q de la fibration de Tits est un produit d'espaces projectifs :

$$Q = \mathbf{P}^{m_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{m_k}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{11}$$

et que f agit diagonalement : $\bar{f} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k)$ où $\bar{f}_j \in \mathrm{End}(\mathbf{P}^{m_j})$.

Soit q un point de Q et $\mathbf{P}_q^{m_j}$ l'espace projectif qui passe par q et est donné par le $j^{\text{ème}}$ facteur du produit (11). L'image réciproque de la fibration de Tits par l'injection $\mathbf{P}_q^{m_j} \to Q$ ne dépend pas de q car X est homogène. On obtient ainsi une variété homogène X_j dont la fibration de Tits a des fibres isomorphes à celles de X et une base isomorphe à $\mathbf{P}^{m_j}$. Puisque tout endomorphisme d'un espace projectif admet des points fixes, f induit un endomorphisme de X_j. Nous étudierons donc d'abord les endomorphismes des variétés homogènes dont la base de Tits est un espace projectif.

5. QUELQUES EXEMPLES

Présentons maintenant quelques exemples qui illustrent l'invariance de la fibration de Tits et donnent une petite idée des phénomènes qui peuvent apparaître lorsque la variété homogène n'est pas kählérienne.