Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ENDOMORPHISMES DES VARIÉTÉS HOMOGÈNES
Autor: Cantat, Serge
Kapitel: 3. Variétés homogènes kählériennes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66689

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

un endomorphisme non surjectif si et seulement si H est un plan ou une quadrique de $\mathbf{P}^3$ (voir [4] et [8]).

Dans ce texte, nous analysons le cas des espaces homogènes compacts. Ceci permet de quitter le monde des variétés kählériennes et de traiter des exemples significatifs en dimension de Kodaira négative.

3. Variétés homogènes kählériennes

Une variété complexe compacte est homogène si le groupe de ses difféomorphismes holomorphes agit transitivement sur la variété. Dans ce cas, la variété est isomorphe au quotient d'un groupe de Lie complexe G par un sous-groupe de Lie complexe fermé H (voir [2]).

Cette partie classe les endomorphismes des variétés complexes compactes qui sont à la fois kählériennes et homogènes.

3.1 Tores

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie n, Γ un réseau de V et $A = V/\Gamma$ le tore associé. Puisque le fibré tangent de A est trivial, le principe du maximum montre que la différentielle de tout endomorphisme $f\colon A \to A$ est constante. Les endomorphismes de A sont donc les transformations affines de V qui permutent les orbites de Γ. Les homothéties de rapport entier fournissent des exemples explicites mais il existe quelques exemples nettement plus riches.

Exemple 3.1. Soit Λ un réseau de la droite complexe $\mathbf{C}$. Pour tout entier n, Λ^n est un réseau de $\mathbf{C}^n$ stabilisé par l'action des endomorphismes linéaires de $\mathbf{C}^n$ à coefficients entiers. Ainsi, pour $n = 2$, la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

induit un endomorphisme de degré topologique 2^4 sur $\mathbf{C}^2/\Lambda^2$.

3.2 Variétés de drapeaux

Le deuxième type d'exemples est fourni par les variétés de drapeaux, c'est-à-dire les quotients compacts et lisses S/P où S est un groupe de Lie complexe semi-simple et P est un sous-groupe de Lie complexe connexe. Les

Grassmanniennes et l'espace des k-plans isotropes pour une forme quadratique ou une forme symplectique sont des exemples de telles variétés. On retrouve ainsi tous les espaces homogènes « classiques ». On dispose pour ces variétés d'un très joli théorème dû à Paranjape et Srinivas [22] :

THÉORÈME 3.1 (K. H. Paranjape et V. Srinivas). *Soit X une variété de drapeaux et $f\colon X \to X$ un endomorphisme. Il existe alors un nombre fini d'endomorphismes $f_i\colon \mathbf{P}^{n_i} \to \mathbf{P}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, et un automorphisme d'une variété de drapeaux $f_0\colon X_0 \to X_0$ tels que X soit isomorphe au produit $X_0 \times \mathbf{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_k}$ et l'un des itérés de f coïncide avec l'endomorphisme diagonal $(f_0, f_1, \ldots, f_k)$.*

Lorsque la variété $X = S/P$ est le quotient d'un groupe de Lie simple, le théorème montre que tout endomorphisme est un automorphisme, sauf si X est un espace projectif. En particulier, les quadriques de dimension $d \geq 3$ et les Grassmanniennes qui ne sont pas des espaces projectifs ne possèdent aucun endomorphisme de degré topologique différent de 1. Afin de présenter quelques-unes des idées qui peuvent être employées pour démontrer ce théorème, nous en donnons une preuve pour $\mathbf{G}(1,3)$, la Grassmannienne des droites de $\mathbf{P}^3$. C'est un cas particulier intéressant car il s'agit à la fois d'une quadrique et de la plus petite Grassmannienne qui ne soit pas un espace projectif.

Démonstration pour $\mathbf{G}(1,3)$. Commençons par introduire quelques notations standards. L'élément d de $\mathbf{G}(1,3)$ et la droite $d \subset \mathbf{P}^3$ qui lui correspond seront systématiquement identifiés. Soit p_0 un point et H_0 un plan de $\mathbf{P}^3$. On pose alors :

$$W_{2,0}(p_0) = \{d \in \mathbf{G}(1,3) \mid p_0 \in d\}\ , \tag{6}$$

$$W_{1,1}(H_0) = \{d \in \mathbf{G}(1,3) \mid d \subset H_0\}\ . \tag{7}$$

La classe d'homologie de chacune de ces deux variétés ne dépend pas du choix de p_0 et de H_0 ; elle sera donc notée $[\sigma_{2,0}]$ (resp. $[\sigma_{1,1}]$), sans référence aux choix effectués. Ces deux classes d'homologie forment une base du $\mathbf{Z}$-module $H_4(\mathbf{G}(1,3), \mathbf{Z})$ qui est orthonormée pour la forme d'intersection (voir [13], §I.5). Puisque la classe d'homologie de toute sous-variété complexe de dimension 2 dans $\mathbf{G}(1,3)$ doit couper $[\sigma_{2,0}]$ et $[\sigma_{1,1}]$ positivement, l'ensemble décrit par ces classes d'homologie coïncide avec le cadran $\mathbf{N}.[\sigma_{2,0}] + \mathbf{N}.[\sigma_{1,1}]$.

LEMME 3.2. *Soit S une sous-variété complexe de $\mathbf{G}(1,3)$ de dimension 2. Supposons que cette surface est irréductible et réduite et qu'il existe un entier m strictement positif tel que $[S] = m[\sigma_{1,1}]$. Il existe alors un plan H dans $\mathbf{P}^3$ tel que $S = W_{1,1}(H)$. En particulier, m est égal à 1.*

C'est le point-clef: la présence d'une telle classe d'homologie est un phénomène qui n'apparaît évidemment pas pour les espaces projectifs.

Démonstration du lemme. Soit S comme dans l'énoncé et $V(S)$ la sous-variété de $\mathbf{P}^3$ balayée par les droites de S:

$$V(S) = \left\{x \in \mathbf{P}^3 \mid \exists\, d \in S,\, x \in d\right\}. \tag{8}$$

Comme $[S]$ est proportionnelle à $[\sigma_{1,1}]$, le nombre d'intersection $[S].[\sigma_{2,0}]$ est nul, ce qui signifie qu'un point générique de $\mathbf{P}^3$ n'appartient pas à $V(S)$. La variété $V(S)$ est donc une surface, qui est irréductible car S l'est. Pour conclure, il suffit de remarquer qu'une hypersurface irréductible de $\mathbf{P}^3$ balayée par une famille à deux paramètres de droites est un plan, puis de poser $H = V(S)$.

Soit $f\colon \mathbf{G}(1,3) \to \mathbf{G}(1,3)$ un endomorphisme et δ son degré topologique: pour montrer que f est un automorphisme, nous allons montrer que δ est égal à 1.

Notons f_* la transformation linéaire de $H_4(\mathbf{G}(1,3),\mathbf{Z})$ associée à f. Le caractère holomorphe de f montre que f_* préserve le cadran $\mathbf{N}.[\sigma_{2,0}] + \mathbf{N}.[\sigma_{1,1}]$. Mais f_* est une similitude de $H_4(\mathbf{G}(1,3),\mathbf{R})$ pour la forme d'intersection, donc f_* ou f_*^2 est une homothétie. En particulier,

$$f_*^2[\sigma_{1,1}] = \delta[\sigma_{1,1}]. \tag{9}$$

Si H est un plan générique de $\mathbf{P}^3$, la surface $f^2(W_{1,1}(H))$ est une surface irréductible de $\mathbf{G}(1,3)$. D'après le lemme 3.2, elle coïncide donc avec la surface $W_{1,1}(\Psi(H))$ associée à un autre plan $\Psi(H)$. Ceci détermine une application holomorphe $\Psi\colon (\mathbf{P}^3)^* \to (\mathbf{P}^3)^*$.

Montrons que Ψ envoie droite sur droite: si d est une droite de $\mathbf{P}^3$ et H est un plan qui contient d, alors $W_{1,1}(H)$ contient le point de $\mathbf{G}(1,3)$ correspondant à la droite d, et réciproquement; la droite de $(\mathbf{P}^3)^*$ constituée des plans contenant d est donc envoyée par Ψ sur la droite des plans contenant $f(d)$.

Puisqu'elle envoie droite sur droite, l'application Ψ est de degré 1. Ceci entraîne immédiatement que f est de degré 1 : l'image réciproque d'un point d de $\mathbf{G}(1,3)$ doit coïncider avec la droite $\Psi^{-1}(d)$.

REMARQUE 3.1. La preuve que nous venons de présenter simplifie légèrement les arguments de [22] et a l'avantage d'employer peu d'outils évolués. La stratégie s'applique pour toutes les variétés de drapeaux classiques – *i.e.* pour les ensembles de sous-espaces vectoriels emboîtés de $\mathbf{C}^n$. Par contre, elle ne s'applique pas pour la quadrique lisse de dimension 3. Pour une preuve dans le cas général, nous renvoyons le lecteur à [22]; le cas des quadriques apparaît également dans [4].

3.3 CAS GÉNÉRAL

D'après un théorème d'Armand Borel et Reinhold Remmert, toutes les variétés homogènes kählériennes compactes sont isomorphes au produit d'un tore T par une variété de drapeaux Q. Puisque la projection de $T \times Q$ sur T coïncide avec le morphisme d'Albanese, ses fibres sont permutées par tout endomorphisme. Si $f\colon T \times Q \to T \times Q$ est une application holomorphe surjective, on peut donc l'écrire sous la forme

$$f(t,q) = (a(t), g_t(q)), \tag{10}$$

où a est un endomorphisme de T et $t \mapsto g_t$ est une application holomorphe à valeurs dans les endomorphismes de Q. Quitte à remplacer f par l'un de ses itérés, le théorème 3.1 et la connexité de T permettent de supposer que g_t est à valeurs dans :

(i) les endomorphismes d'un certain degré d'un espace projectif, ou

(ii) la composante connexe du groupe d'automorphismes d'une variété de drapeaux.

Chacun de ces ensembles est égal au complémentaire d'une famille non vide d'hypersurfaces dans un espace projectif. L'application $t \mapsto g_t$ doit donc être constante. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3. *Soit T un tore et Q une variété de drapeaux. Les endomorphismes de $T \times Q$ sont tous du type $(t,q) \mapsto (a(t), g(q))$ où a est un endomorphisme de T et g est un endomorphisme de Q.*

En particulier, tous les endomorphismes de ces variétés préservent la projection sur Q. Il s'agit d'un cas particulier de fibration de Tits. Nous allons maintenant montrer que cette dernière est toujours invariante.