2.5 Une question proche

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

le premier cas, l'existence d'endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration force M à être un tore (voir [28]). Dans le second cas, le premier groupe d'homologie de M est fini.

2.4 Petite dimension

Le théorème d'Hurwitz montre que les courbes qui possèdent des endomorphismes de degré plus grand que 1 sont la droite projective et les courbes elliptiques. Ceci peut être démontré à l'aide de la remarque 2.1.

Les surfaces qui possèdent des endomorphismes non inversibles ne préservant aucune fibration doivent être cherchées parmi celles dont la dimension de Kodaira est 0 ou $-\infty$. A côté des tores et du plan projectif on trouve l'exemple des surfaces toriques; ainsi, la transformation polynomiale $[x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2]$ détermine un endomorphisme du plan projectif qui se relève au plan projectif éclaté en $[0 : 0 : 1]$. Les exemples ainsi construits sur les variétés toriques sont tous conjugués à des endomorphismes du plan projectif par une transformation birationnelle. Ces trois familles d'exemples persistent en toute dimension.

D'après [21], les endomorphismes non inversibles des surfaces kählériennes appartiennent tous à l'une de ces trois familles. De surcroît, les fibrations méromorphes invariantes par des endomorphismes non inversibles deviennent triviales après revêtement fini (voir [5], [21] et les références qui s'y trouvent). La situation pour les surfaces est donc bien comprise. Les blocs élémentaires sont des variétés homogènes.

Pour les variétés projectives de dimension 3 dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle, on dispose également d'une classification. Celle-ci n'apporte pas de surprise (voir [25]). Le cas $\mathsf{kod}(M) = -\infty$ est plus intéressant et plus obscur: Ekaterina Amerik a étudié les endomorphismes des variétés qui admettent une fibration par des espaces projectifs, ceci en dimension quelconque [5], mais peu de résultats sont disponibles pour la situation générale.

2.5 Une question proche

Au lieu de regarder les endomorphismes d'une variété X dans elle-même, on peut s'intéresser aux applications surjectives $f : X \to Y$ entre variétés de même dimension. Dans [3], [4], [6], les variétés de Fano, les quadriques et les variétés projectives avec un nombre de Picard égal à 1 sont traitées. Les méthodes employées ont un corollaire intéressant pour notre étude: une hypersurface lisse H de l'espace projectif $\mathbf{P}^N$, $N > 2$, admet un endomorphisme non surjectif si et seulement si H est un plan ou une quadrique de $\mathbf{P}^3$ (voir [4] et [8]).

Dans ce texte, nous analysons le cas des espaces homogènes compacts. Ceci permet de quitter le monde des variétés kählériennes et de traiter des exemples significatifs en dimension de Kodaira négative.

3. Variétés homogènes kählériennes

Une variété complexe compacte est homogène si le groupe de ses difféomorphismes holomorphes agit transitivement sur la variété. Dans ce cas, la variété est isomorphe au quotient d'un groupe de Lie complexe G par un sous-groupe de Lie complexe fermé H (voir [2]).

Cette partie classe les endomorphismes des variétés complexes compactes qui sont à la fois kählériennes et homogènes.

3.1 Tores

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie n, Γ un réseau de V et $A = V/\Gamma$ le tore associé. Puisque le fibré tangent de A est trivial, le principe du maximum montre que la différentielle de tout endomorphisme $f\colon A \to A$ est constante. Les endomorphismes de A sont donc les transformations affines de V qui permutent les orbites de Γ. Les homothéties de rapport entier fournissent des exemples explicites mais il existe quelques exemples nettement plus riches.

Exemple 3.1. Soit Λ un réseau de la droite complexe $\mathbf{C}$. Pour tout entier n, Λ^n est un réseau de $\mathbf{C}^n$ stabilisé par l'action des endomorphismes linéaires de $\mathbf{C}^n$ à coefficients entiers. Ainsi, pour $n = 2$, la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

induit un endomorphisme de degré topologique 2^4 sur $\mathbf{C}^2/\Lambda^2$.

3.2 Variétés de drapeaux

Le deuxième type d'exemples est fourni par les variétés de drapeaux, c'est-à-dire les quotients compacts et lisses S/P où S est un groupe de Lie complexe semi-simple et P est un sous-groupe de Lie complexe connexe. Les