

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTES SUR L'ARTICLE DE M. GROMOV  
**Autor:** CANTAT, Serge  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66688>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## NOTE DES ÉDITEURS

L'article qui précède a été rédigé en 1976 et a circulé sous la forme d'une prépublication de SUNY, dès 1977. Nous l'avons imprimé ici en l'état, à l'exception de la dernière remarque du §4, de l'adjonction de trois références et de la correction d'un petit nombre de fautes de frappe. Serge Cantat, que nous remercions, a bien voulu rédiger à cette occasion un court texte pour orienter le lecteur vers quelques-uns des nombreux travaux influencés par l'article de Mikhaïl Gromov.

## NOTES SUR L'ARTICLE DE M. GROMOV

par Serge CANTAT

0.1. L'article de M. Gromov a considérablement influencé les travaux sur la conjecture de Shub (reliant entropie topologique et action sur l'homologie) ainsi que l'étude des systèmes dynamiques holomorphes, notamment en ce qui concerne la dynamique à plusieurs variables.

Le texte [14] propose une preuve alternative des résultats principaux obtenus par M. Gromov. Ceux de Shmuel Friedland ([6], [7] et [8]) proposent diverses extensions de ces résultats au cadre des transformations méromorphes des variétés kähleriennes (voir [5]).

Les deux pages qui suivent ne concernent que la dynamique holomorphe. Il convient toutefois de noter les articles suivants, qui sont liés à d'autres aspects de l'article de Gromov et contiennent de nombreuses références : [15] et plus généralement l'ensemble des travaux de S. Newhouse sur le sujet, ainsi que [1], qui s'inscrit dans la lignée des travaux d'Artin et Mazur, de Gromov et de Yomdin.

0.2. Bien souvent, on couple les résultats obtenus par M. Gromov à ceux de Y. Yomdin (voir [10], [19]) et de S. Newhouse (voir [15]). Le théorème suivant est un exemple typique.

THÉORÈME 0.1 (Gromov, Yomdin). *Soit  $M$  une variété complexe compacte kähleriennne et  $f: M \rightarrow M$  une transformation holomorphe de  $M$ . Si  $\lambda(f)$  désigne le rayon spectral de l'action de  $f$  sur la cohomologie de  $M$ , alors*

$$h(f) = \log(\lambda(f)).$$

REMARQUE 1. Lorsque  $M$  est l'espace projectif  $\mathbf{P}^n$ , la transformation  $f$  est donné par  $m + 1$  polynômes homogènes de même degré  $d$ . L'action de  $f$  sur chaque groupe de cohomologie  $H^k(M, \mathbf{Z})$  est la multiplication par  $d^k$ . Le rayon spectral  $\lambda(f)$  est donc égal au degré topologique  $\deg(f) = d^m$  et

$$h(f) = \log(\deg(f)).$$

REMARQUE 2. Le théorème précédent peut être affiné: comme le montre l'article de M. Gromov, il suffit de regarder l'action de  $f$  sur les classes de Kähler de  $M$ , donc sur les groupes de cohomologie  $H^{k,k}(M, \mathbf{R})$ . En particulier, seule compte la cohomologie de dimension paire pour évaluer  $\lambda(f)$ . De manière analogue, les variétés stables et instables locales de  $f$  sont des sous-variétés complexes de  $M$ ; si l'on peut associer une classe d'homologie asymptotique à une variété instable, celle-ci vit dans un groupe du type  $H_{k,k}(M, \mathbf{R})$  (voir [16], [18]).

Ce point de vue est largement utilisé dans [2], dans [4] et [13], ainsi que dans [3] et [11]. Il apparaît aussi dans [6], mais le lemme 3 de cet article est illusoire; cependant, T. C. Dinh et N. Sibony ont trouvé récemment comment adapter les arguments de M. Gromov dans le contexte des transformations méromorphes des variétés kähleriennes (voir [5]).

0.3. Dans [9] et [17], un résultat analogue au théorème 0.1 est démontré pour les automorphismes polynomiaux du plan affine  $\mathbf{C}^2$ . La démarche est proche de celle présentée par M. Gromov au paragraphe 4 de son article: le théorème de Bézout y joue un rôle similaire mais il est couplé aux travaux de A. Katok [12] et à ceux de Y. Yomdin mentionnés plus haut (l'usage du théorème de Bézout est également au cœur de [3]).

L'énoncé est le suivant. Si  $g$  est un automorphisme polynomial du plan, notons  $\text{algdeg}(g)$  le maximum des degrés des deux polynômes déterminant  $g$ , le degré d'un monôme  $x^a y^b$  étant égal à  $a + b$ . La limite

$$\deg(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{algdeg}(g^k)^{\frac{1}{k}})$$

existe et est un entier. Contrairement au degré algébrique  $\text{algdeg}(g)$ , ce degré  $\deg(g)$  est invariant par conjugaison:  $\deg(hgh^{-1}) = \deg(g)$ . Soit  $H(g)$  le taux de croissance exponentiel du nombre de points périodiques de  $g$ , alors

$$h(g) = H(g) = \log(\deg(g)).$$

## RÉFÉRENCES

- [1] ARNOL'D, V. I. Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 21 (1990), 1–10.
- [2] BEDFORD, E., M. LYUBICH and J. SMILLIE. Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbf{C}^2$ . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.* 112 (1993), 77–125.
- [3] BRIEND, J.-Y. et J. DUVAL. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de  $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ . *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 93 (2001), 145–159.
- [4] CANTAT, S. Dynamique des automorphismes des surfaces  $K3$ . *Acta Math.* 187 (2001), 1–57.
- [5] DINH, T.-C. et N. SIBONY. Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle. Preprint Orsay, mars 2003.
- [6] FRIEDLAND, S. Entropy of polynomial and rational maps. *Ann. of Math.* (2) 133 (1991), 359–368.
- [7] —— Entropy of rational self-maps of projective varieties. In: *Dynamical Systems and Related Topics (Nagoya, 1990)*, 128–140. Volume 9 of *Adv. Ser. Dynam. Systems*, World Sci. Publishing, River Edge (N.J.), 1991.
- [8] —— Entropy of algebraic maps. In: *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, 215–228. Special Issue, 1995.
- [9] FRIEDLAND, S. and J. MILNOR. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 9 (1989), 67–99.
- [10] GROMOV, M. Entropy, homology and semialgebraic geometry. In: *Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86*, 225–240. *Astérisque* 145–146, 1987.
- [11] GUEDJ, V. Dynamics of rational transformations. Manuscrit, 2002.
- [12] KATOK, A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 51 (1980), 137–173.
- [13] McMULLEN, C. T. Dynamics on  $K3$  surfaces: Salem numbers and Siegel disks. *J. reine angew. Math.* 545 (2002), 201–233.
- [14] NEWHOUSE, S. E. Entropy and volume. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 8\* (Charles Conley Memorial Issue) (1988), 283–299.
- [15] —— Entropy in smooth dynamical systems. In: *Proc. Int. Congr. Math., Kyoto/Japan 1990, Vol. II*, 1285–1294, 1991.
- [16] RUELLE, D. and D. SULLIVAN. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology* 14 (1975), 319–327.

- [17] SMILLIE, J. The entropy of polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . *Ergodic Theory Dynam. Systems* 10 (1990), 823–827.
- [18] SULLIVAN, D. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.* 36 (1976), 225–255.
- [19] YOMDIN, Y. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.* 57 (1987), 285–300.

(Reçu le 3 septembre 2003)

Serge Cantat

IRMAR, UMR 6625 du CNRS  
Université Rennes I  
Campus de Beaulieu, Bât. 22–23  
F-35042 Rennes cedex  
France  
*e-mail* : cantat@maths.univ-rennes1.fr

**vide-leer-empty**