Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 49 (2003)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

Autor: Capitanio, Gianmarco

Kapitel: 2.2 La solution géométrique de (PC)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66676

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 31.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(3) L'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique est une hypersurface stratifiée (c'est-à-dire une réunion finie de variétés lisses, les *strates*, connexes par arcs, deux à deux disjointes, telles que la fermeture de chaque strate est la même strate et une réunion finie de strates de dimension plus petite), voir [Ar2].

(4) La caustique et l'ensemble de Maxwell d'une sous-variété lagrangienne générique ont mesure nulle.

2.2 La solution géométrique de (PC)

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi sur une variété Q (sans bord, mais pas forcément compacte) de hamiltonien $H : [0,+\infty[\times T^*Q \to \mathbf{R}$ de classe C^2 dans $]0,+\infty[\times T^*Q$ et continue au bord, et donnée initiale $u_0 \colon Q \to \mathbf{R}$ de classe C^1 :

$$(PC) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,q) + H(t,q,\partial_q u(t,q)) = 0, & \forall\ t > 0,\ q \in Q \\ u(0,q) = u_0(q), & \forall\ q \in Q\,. \end{cases}$$

Dans cette section on construit une sous-variété lagrangienne du fibré cotangent de l'espace temps, la solution géométrique de (PC). Le théorème de Sikorav-Viterbo permet de lui associer une "unique" fgqi $S(t,q;\xi)$. Cette fonction est définie à une constante additive près; une fois cette constante convenablement fixée, S est une solution, en générale multivoque, de (PC). Son graphe[6])

$$\{(t,q,S(t,q;\bar{\xi}) \mid \partial_\xi S(t,q;\bar{\xi}) = 0\}$$

est le front d'onde de la solution géométrique.

Dans la prochaine section on utilisera la méthode de minimax pour choisir en tout point (t,q) un unique point critique de $\xi \mapsto S(t,q;\xi)$; on obtiendra de cette manière une section du front, qui s'avère être le graphe d'une fonction bien définie, solution faible de (PC).

Sur le fibré cotangent $T^*Q = \{(q,p)\}$, muni de la forme symplectique canonique $dp \wedge dq$, le champ hamiltonien $X_H = (\partial_p H, -\partial_q H)$ induit le flot $\phi \colon [0,+\infty[\times T^*Q \to T^*Q$. Ses composantes $\phi^t(q,p) = (\tilde{q}(t),\tilde{p}(t))$, que l'on appelle les *caractéristiques* de X_H, sont les solutions des équations de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{q}(t) = \partial_p H(t,\tilde{q}(t),\tilde{p}(t))\,, \\ \frac{d}{dt}\tilde{p}(t) = -\partial_q H(t,\tilde{q}(t),\tilde{p}(t))\,, \end{cases}$$

telles que $\tilde{q}(0) = q$ et $\tilde{p}(0) = p$.

---

[6]) Plus précisément, le contour apparent du graphe de S, projection le long de l'axe des ξ.

Soit $\Lambda_0 := \{(q, du_0(q)) \mid q \in Q\}$ la sous-variété lagrangienne de T^*Q engendrée par la donnée initiale, et $\Lambda_t := \phi^t(\Lambda_0)$ son évoluée au temps t.

REMARQUES.

(1) La sous-variété Λ_0 est isotope à la section nulle de T^*Q, l'isotopie étant engendrée par l'hamiltonien $-u_0$.

(2) Chaque Λ_t est isotope à la section nulle de T^*Q ; en effet Λ_t est isotope à Λ_0 par l'isotopie ϕ^{-t}, et les isotopies forment un groupe.

(3) Il s'ensuit que Λ_t est exacte et, d'après le théorème de Viterbo, admet une unique fgqi $S_t(q;\xi)$.

Considérons maintenant la variété "espace-temps" $\mathcal{Q} := \mathbf{R} \times Q$, et son fibré cotangent $T^*\mathcal{Q} = \{(t, q; \tau, p)\}$, muni de la forme symplectique $dp \wedge dq + d\tau \wedge dt$. Le hamiltonien autonome $\mathcal{H}(t, q; \tau, p) := \tau + H(t, q, p)$ engendre le flot $\Phi\colon [0, +\infty[\times T^*\mathcal{Q} \to T^*\mathcal{Q}$, de composantes

$$\Phi^s(t, q; \tau, p) = \big(t + s, \tilde{q}(t + s); \tilde{\tau}(t + s), \tilde{p}(t + s)\big),$$

où $\tilde{q}, \tilde{p}$ sont les caractéristiques de X_H telles que $\tilde{q}(t) = q$ et $\tilde{p}(t) = p$, et $\tilde{\tau}(t) = -H\big(t, \tilde{q}(t), \tilde{p}(t)\big)$.

Pour tout $t \geq 0$, considérons l'application

$$i_t\colon T^*Q \to T^*\mathcal{Q}, \qquad (q, p) \mapsto (t, q; -H(t, q, p), p).$$

Un calcul direct montre que la variété que l'on obtient par la réunion des courbes caractéristiques du flot Φ, sortant de $i_0(\Lambda_0)$,

$$\Lambda := \bigcup_{s>0} \Phi^s\big(i_0(\Lambda_0)\big) \subset T^*\mathcal{Q},$$

est lagrangienne. De même, pour tout $T > 0$ fixé, la sous-variété de $T^*\mathcal{Q}$

$$\Lambda^T := \bigcup_{0<s<T} \Phi^s\big(i_0(\Lambda_0)\big)$$

est aussi lagrangienne.

DÉFINITION. On appelle Λ la *solution géométrique* de (PC), et Λ^T la *solution géométrique tronquée* au temps T.

REMARQUE. Pour s fixé, Φ^s translate Λ d'un temps s le long les caractéristiques, c'est-à-dire :

$$\Phi^s\big(i_t(\Lambda_t)\big) = \Phi^s \circ \Phi^t\big(i_0(\Lambda_0)\big) = \Phi^{s+t}\big(i_0(\Lambda_0)\big) = i_{s+t}(\Lambda_{t+s})$$

(propriété de semi-groupe du flot).

THÉORÈME 2.1. *Pour tout $T > 0$, la solution géométrique tronquée au temps T est isotope à la section nulle* $\{(t,q;0,0) \mid -T < t < 0, q \in Q\}$.

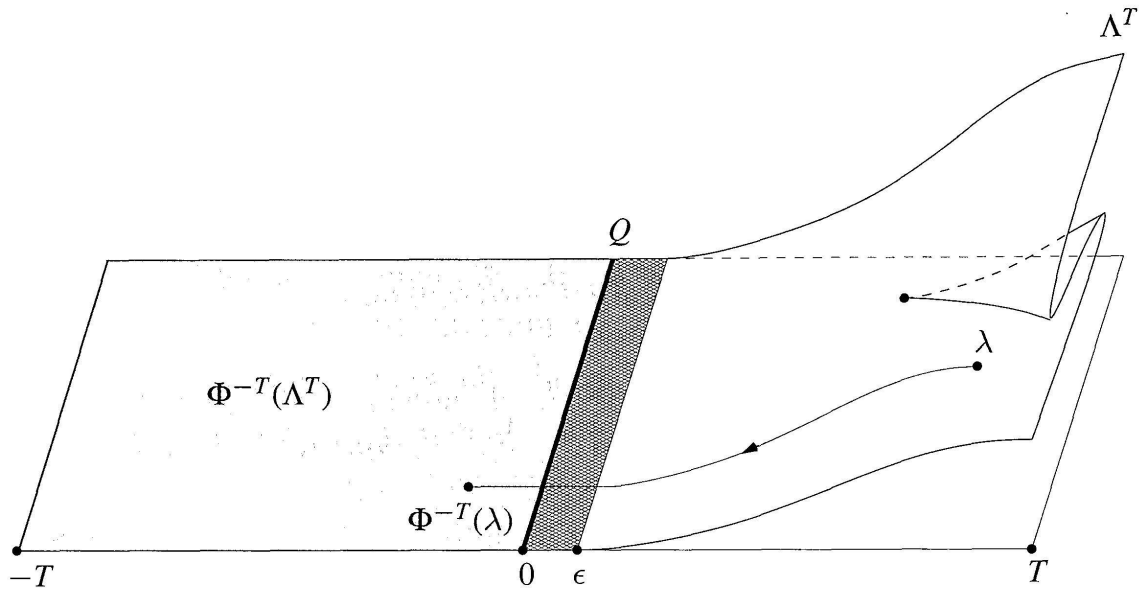

FIGURE 5
L'isotopie entre la solution géométrique tronquée et la section nulle

Démonstration. Puisque pour des temps petits il existe une solution classique de (PC), il est facile de se ramener, par une isotopie, au cas où la solution géométrique Λ coïncide avec la section nulle pour tout temps inférieur à un certain $\epsilon > 0$ assez petit. Alors pour tout $t < \epsilon' < \epsilon$, on a $H(t,q,p) = 0$. On peut considérer l'extension suivante de H, de classe C^2 :

$$\widetilde{H}(t,q,p) := \begin{cases} H(t,q,p), & \text{pour tout } t \geq 0,\ (q,p) \in T^*Q, \\ 0 & \text{pour tout } t \leq 0,\ (q,p) \in T^*Q. \end{cases}$$

Le flot $\widetilde{\Phi}$ engendré par $\widetilde{\mathcal{H}} := \tau + \widetilde{H}$ étend le flot Φ à $\mathbf{R}$ tout entier. La sous-variété lagrangienne

$$\widetilde{\Lambda} := \bigcup_{s \in \mathbf{R}} \widetilde{\Phi}^s(i_0(\Lambda_0))$$

de $T^*\mathcal{Q}$ coïncide avec Λ dans le demi-espace $\{t > 0\}$ et avec la section nulle dans $\{t < 0\}$. Par conséquent, pour tout $T > 0$ fixé, $\widetilde{\Phi}^{-T}$ est une isotopie entre Λ^T et la section nulle (cf. Figure 5). $\square$

On peut ainsi appliquer le théorème de Sikorav-Viterbo aux solutions géométriques tronquées de (PC).

COROLLAIRE. *Pour tout $T > 0$ fixé, Λ^T admet une unique fgqi $S(t, q; \xi)$ (modulo les opérations d'équivalence* (i) *et* (ii)*), telle que son graphe restreint à $t = 0$ coïncide avec le graphe de la donnée initiale u_0.*

Dans la suite, S sera toujours une telle fgqi.

Démonstration. Soit $\widetilde{S}(t, q; \xi)$ l'unique fgqi de Λ^T. Or, cette fonction est une primitive de la forme de Liouville $p\,dq$ de Λ_0 :

$$d\widetilde{S}(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = du_0(q)\,dq\,,$$

où $\bar{\xi}_0(q)$ est le seul point critique de $\xi \mapsto S_0(q; \xi)$. Par conséquent il existe une unique constante C telle que $S := \widetilde{S} + C$ vérifie $S(0, q; \bar{\xi}_0(q)) = u_0(q)$ pour tout $q \in Q$. $\square$

REMARQUE. On peut construire une famille génératrice globale de la solution géométrique Λ comme suit. La *fonctionnelle d'action* $\int pdq - Hdt$ est une famille génératrice formelle (l'espace de paramètre étant de dimension infinie) de Λ. En utilisant une méthode de point fixe, proposée par Amann-Conley-Zehnder, on obtient une vraie fonction génératrice, voir [Car].

2.3 LA SOLUTION DE MINIMAX

Soient $t > 0, q \in Q$ et $S(t, q; \xi)$ la fgqi de la solution géométrique tronquée Λ^T, pour $T > t$. La fonction $\xi \mapsto S(t, q; \xi)$ est quadratique à l'infini, donc on peut lui associer le niveau critique de minimax, étudié au § 1.3.

DÉFINITION (Chaperon). On appelle *solution de minimax* de (PC) la fonction

$$u(t, q) := \min\max\{\xi \mapsto S(t, q; \xi)\}\,.$$

REMARQUE. L'autre solution que l'on peut construire avec ce même argument (cf. [Cha]), *la solution de max-min* est, pour le Théorème 1.9, la même solution.

M. Chaperon ([Cha]), T. Joukovskaïa ([Jou]), C. Viterbo ([Vi2]) ont étudié les propriétés de cette fonction; en particulier Joukovskaïa a classifié les singularités génériques de u en dimension petite ($\dim Q \leq 2$).