

1.1 Préliminaires

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI

1.1 PRÉLIMINAIRES

Soient X un espace topologique, D^n un disque de dimension n , orienté, et $\psi: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$ une application. On considère sur $\mathbf{S}^{n-1} = \partial D^n$ l'orientation induite. On appelle *cellule* de dimension n le couple $\sigma^n := (D^n, \psi)$. L'espace que l'on construit en identifiant chaque point x de \mathbf{S}^{n-1} au point $\psi(x)$ est obtenu *en attachant à X la cellule σ^n* ; on le note $X \cup \sigma^n$ ou bien $X \cup_{\psi} D^n$.

Un espace est dit *cellulaire* s'il est obtenu par l'attachement de cellules (un nombre fini pour chaque dimension) à un nombre fini de points (cellules de dimension 0). Un espace cellulaire X est un *complexe cellulaire* si chaque cellule est attachée à une cellule de dimension plus petite.

Il est bien connu que tout espace cellulaire est homotopiquement équivalent à un complexe cellulaire, voir par exemple [DNF], vol. III, §4.

Soit X un complexe cellulaire. La réunion des cellules de dimension $k \leq n$ est appelée *squelette cellulaire* de dimension n , que l'on note X^n . On a alors la suite des squelettes emboîtés

$$X^0 \subset \dots \subset X^k \subset \dots \subset X.$$

L'espace quotient X^{k-1}/X^{k-2} , où X^{k-2} est identifié à un point, est un bouquet de sphères de dimension $k-1$. Considérons une cellule $\sigma^k = (D^k, \psi)$ et l'application

$$\tilde{\psi}_i: \partial D^k = \mathbf{S}^{k-1} \xrightarrow{\psi} X^{k-1} \xrightarrow{Id} X^{k-1}/X^{k-2} \xrightarrow{\pi_i} \mathbf{S}_i^{k-1},$$

où π_i est la projection sur la i -ème sphère du bouquet. Soit σ_i^{k-1} la cellule de X correspondant à la sphère \mathbf{S}_i^{k-1} .

DÉFINITION. On appelle *coefficient d'incidence* du couple de cellules σ^k, σ_i^{k-1} le nombre entier

$$[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] := \deg(\tilde{\psi}_i).$$

Soient $E = \mathbf{R}^K$ et $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse excellente¹⁾, avec un nombre fini de points critiques. D'après le lemme de Morse, autour d'un point

¹⁾ Une fonction est *de Morse* si ses points critiques sont tous non dégénérés, *excellente* si les valeurs critiques sont toutes distinctes.

critique $\bar{\xi}$ de f , il existe un système de coordonnées $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$ tel que :

$$f(\xi_1, \dots, \xi_K) = f(\bar{\xi}) - \xi_1^2 - \dots - \xi_k^2 + \xi_{k+1}^2 + \dots + \xi_K^2.$$

Le nombre k , dénoté par $\text{ind}(\bar{\xi})$, est l'*indice* du point critique $\bar{\xi}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on note

$$E_f^\lambda = E^\lambda := \{\xi \in E \mid f(\xi) \leq \lambda\}.$$

THÉORÈME 1.1 ([Mil]). *Si l'intervalle $[a, b]$ ne contient aucune valeur critique de f , alors E^b et E^a sont difféomorphes.*

THÉORÈME 1.2 ([Mil]). *Soient c la seule valeur critique dans l'intervalle $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ et $\bar{\xi}$ le point critique correspondant, d'indice $\text{ind}(\bar{\xi}) = i$. Alors $E^{c+\epsilon}$ et E^c se rétractent sur l'espace $E^{c-\epsilon} \cup \sigma^i$ que l'on obtient de $E^{c-\epsilon}$ en attachant à son bord une cellule $\sigma^i = (D^i, \psi)$ de dimension i .*

Pour ξ, η points critiques de f , tels que $\text{ind}(\xi) - \text{ind}(\eta) = 1$, on note $[\xi : \eta]$ l'indice d'incidence des cellules correspondantes.

REMARQUE. Les Théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour toute fonction de Morse excellente, dès que le champ gradient est défini et intégrable; par exemple si la condition de Palais-Smale est vérifiée: toute suite $\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\nabla f(\xi_n) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$ et $\{f(\xi_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, admet une sous-suite convergente.

Soit $b > 0$ un nombre réel assez grand pour que l'intervalle $] -b, b[$ contienne toutes les valeurs critiques de f . On déduit du Théorème 1.1 que $E^\lambda \simeq E^{-b}$ pour $\lambda \leq -b$ et $E^\lambda \simeq E^b$ pour $\lambda \geq b$. On note alors $E^{\pm\infty} := E^{\pm b}$.

Soit $\{\xi_1^k, \dots, \xi_{\#(k)}^k\}$ l'ensemble des points critiques d'indice k de f , ordonnés selon leur valeur critique: $f(\xi_\ell^k) < f(\xi_{\ell+1}^k)$.

DÉFINITION. Le *complexe de Morse* de f est le complexe cellulaire (M_*^f, ∂_*) , défini comme suit:

- l'espace M_k^f des chaînes de dimension k est l'espace des combinaisons linéaires formelles sur \mathbf{Q} des points critiques d'indice k de f :

$$M_k^f := \left\{ \sum_{\ell=1}^{\#(k)} \alpha_\ell \xi_\ell^k \mid \alpha_\ell \in \mathbf{Q} \right\} \simeq \mathbf{Q}^{\#(k)};$$

- l'opérateur de bord²⁾ est l'application linéaire $\partial: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$ définie par la formule

$$\partial \xi_\ell^k := \sum_{m=1}^{\#(k-1)} [\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \xi_m^{k-1}.$$

REMARQUE. D'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, l'espace $E/E^{-\infty}$ est un espace cellulaire, homotopiquement équivalent au complexe cellulaire (M_*^f, ∂_*) . Il s'ensuit que

$$\tilde{H}_*(M_*^f, \partial_*) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}),$$

où \tilde{H}_* dénote le complexe d'homologie réduite à valeurs dans \mathbf{Q} .

En suivant une idée de Cerf ([Cer]), S. A. Barannikov a montré que l'on peut "diagonaliser" les complexes de Morse. C'est pour rendre possible cette diagonalisation que l'on a défini le complexe de Morse sur \mathbf{Q} , bien que le complexe originel soit à coefficients entiers.

LEMME ALGÈBRE ([Bar]). *Dans chaque M_k^f il existe un changement de générateurs, représenté par une matrice triangulaire supérieure inversible de dimension $\#(k)$, qui met le complexe de Morse sous forme canonique, c'est-à-dire que les nouveaux générateurs (ordonnés) $\{\Xi_\ell^k\}_{\ell,k}$ ($\ell = 1, \dots, \#(k)$, $k = 1, \dots, K$) vérifient*

$$(1) \quad \partial \Xi_\ell^k = 0 \quad \text{ou} \quad \partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}.$$

Démonstration. Par récurrence: supposons que les générateurs Ξ_j^h soient du type (1) pour $h = k$ et $j \leq \ell$, et pour $h < k$ et $j \in \{1, \dots, \#(h-1)\}$. Soit Q l'ensemble des indices q tels que $\Xi_q^{k-1} = \partial \Xi_{q^*}^k$ pour quelque $q^* \leq j$, et $P := \{1, \dots, \#(k-1)\} \setminus Q$. L'égalité $\partial \xi_{j+1}^k = \sum_{m=1}^{\#(k-1)} \alpha_m \xi_m^{k-1}$ s'écrit donc

$$\partial \left(\xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \sum_{p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

Si $\alpha_p = 0$ pour tout $p \in P$, le générateur $\Xi_{j+1}^k := \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k$ est canonique, en effet $\partial \Xi_{j+1}^k = 0$. Sinon, soit p_0 le plus grand indice dans P tel que $\alpha_{p_0} \neq 0$:

$$(2) \quad \partial \left(\xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \alpha_{p_0} \Xi_{p_0}^{k-1} + \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

²⁾ Pour la démonstration du fait que $\partial^2 = 0$, voir [DNF], vol. III, §4.

Remplaçons le générateur $\Xi_{p_0}^{k-1}$ par $\tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$, qui est encore de la forme (1), car $\partial \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial \Xi_{p_0}^{k-1} = 0$. L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}} \partial \left(\xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1};$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}} \left(\xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right)$$

vérifie $\partial \Xi_{j+1}^k = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$. \square

REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces M_k^f on peut définir un autre opérateur de bord $\delta: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$ par la formule

$$\delta \xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1}) \xi_m^{k-1},$$

où $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$ est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs $Y := -\nabla f / |\nabla f|^2$ de ξ_ℓ^k à ξ_m^{k-1} . Puisque l'attachement des cellules σ_ℓ^k est induit par la rétraction des espaces E^λ le long des trajectoires intégrales de Y , on a $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de Y entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes (M_*^f, ∂_*) et (M_*^f, δ_*) ont la même forme canonique.

1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit (M_*^f, ∂_*) le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$. A chaque point critique ξ_ℓ^k correspond le générateur Ξ_ℓ^k , c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j \leq \ell} \alpha_j \xi_j^k, \quad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0.$$

DÉFINITION. On dit que deux points critiques ξ_ℓ^k et ξ_m^{k-1} de f sont *incidents* si $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$, *liés* si $\partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$. Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.