**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 49 (2003)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI

**Autor:** Capitanio, Gianmarco

**Kapitel:** 1.1 Préliminaires

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-66676

## 1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI

### 1.1 PRÉLIMINAIRES

Soient $X$ un espace topologique, $D^n$ un disque de dimension $n$, orienté, et $\psi\colon \mathbf{S}^{n-1} \to X$ une application. On considère sur $\mathbf{S}^{n-1} = \partial D^n$ l'orientation induite. On appelle *cellule* de dimension $n$ le couple $\sigma^n := (D^n, \psi)$. L'espace que l'on construit en identifiant chaque point $x$ de $\mathbf{S}^{n-1}$ au point $\psi(x)$ est obtenu *en attachant à $X$ la cellule $\sigma^n$* ; on le note $X \cup \sigma^n$ ou bien $X \cup_\psi D^n$.

Un espace est dit *cellulaire* s'il est obtenu par l'attachement de cellules (un nombre fini pour chaque dimension) à un nombre fini de points (cellules de dimension 0). Un espace cellulaire $X$ est un *complexe cellulaire* si chaque cellule est attachée à une cellule de dimension plus petite.

Il est bien connu que tout espace cellulaire est homotopiquement équivalent à un complexe cellulaire, voir par exemple [DNF], vol. III, §4.

Soit $X$ un complexe cellulaire. La réunion des cellules de dimension $k \leq n$ est appelée *squelette cellulaire* de dimension $n$, que l'on note $X^n$. On a alors la suite des squelettes emboîtés

$$X^0 \subset \cdots \subset X^k \subset \cdots \subset X\,.$$

L'espace quotient $X^{k-1}/X^{k-2}$, où $X^{k-2}$ est identifié à un point, est un bouquet de sphères de dimension $k-1$. Considérons une cellule $\sigma^k = (D^k, \psi)$ et l'application

$$\widetilde{\psi}_i\colon \partial D^k = \mathbf{S}^{k-1} \xrightarrow{\ \psi\ } X^{k-1} \xrightarrow{\ Id\ } X^{k-1}/X^{k-2} \xrightarrow{\ \pi_i\ } \mathbf{S}_i^{k-1}\,,$$

où $\pi_i$ est la projection sur la $i$-ème sphère du bouquet. Soit $\sigma_i^{k-1}$ la cellule de $X$ correspondant à la sphère $\mathbf{S}_i^{k-1}$.

DÉFINITION. On appelle *coefficient d'incidence* du couple de cellules $\sigma^k, \sigma_i^{k-1}$ le nombre entier

$$[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] := \deg(\widetilde{\psi}_i)\,.$$

Soient $E = \mathbf{R}^K$ et $f\colon E \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse excellente [1]), avec un nombre fini de points critiques. D'après le lemme de Morse, autour d'un point

---

[1]) Une fonction est *de Morse* si ses points critiques sont tous non dégénérés, *excellente* si les valeurs critiques sont toutes distinctes.

critique $\bar{\xi}$ de $f$, il existe un système de coordonnées $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$ tel que :

$$f(\xi_1, \dots, \xi_K) = f(\bar{\xi}) - \xi_1^2 - \dots - \xi_k^2 + \xi_{k+1}^2 + \dots + \xi_K^2 .$$

Le nombre $k$, dénoté par $\mathrm{ind}(\bar{\xi})$, est l'*indice* du point critique $\bar{\xi}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on note

$$E_f^\lambda = E^\lambda := \{\xi \in E \mid f(\xi) \leq \lambda\} .$$

THÉORÈME 1.1 ([Mil]). *Si l'intervalle $[a, b]$ ne contient aucune valeur critique de $f$, alors $E^b$ et $E^a$ sont difféomorphes.*

THÉORÈME 1.2 ([Mil]). *Soient $c$ la seule valeur critique dans l'intervalle $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ et $\bar{\xi}$ le point critique correspondant, d'indice $\mathrm{ind}(\bar{\xi}) = i$. Alors $E^{c+\epsilon}$ et $E^c$ se rétractent sur l'espace $E^{c-\epsilon} \cup \sigma^i$ que l'on obtient de $E^{c-\epsilon}$ en attachant à son bord une cellule $\sigma^i = (D^i, \psi)$ de dimension $i$.*

Pour $\xi, \eta$ points critiques de $f$, tels que $\mathrm{ind}(\xi) - \mathrm{ind}(\eta) = 1$, on note $[\xi : \eta]$ l'indice d'incidence des cellules correspondantes.

REMARQUE. Les Théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour toute fonction de Morse excellente, dès que le champ gradient est défini et intégrable ; par exemple si la condition de Palais-Smale est vérifiée : toute suite $\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\nabla f(\xi_n) \to 0$ pour $n \to \infty$ et $\{f(\xi_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, admet une sous-suite convergente.

Soit $b > 0$ un nombre réel assez grand pour que l'intervalle $]-b, b[$ contienne toutes les valeurs critiques de $f$ . On déduit du Théorème 1.1 que $E^\lambda \simeq E^{-b}$ pour $\lambda \leq -b$ et $E^\lambda \simeq E^b$ pour $\lambda \geq b$. On note alors $E^{\pm\infty} := E^{\pm b}$.

Soit $\{\xi_1^k, \dots, \xi_{\#(k)}^k\}$ l'ensemble des points critiques d'indice $k$ de $f$, ordonnés selon leur valeur critique : $f(\xi_\ell^k) < f(\xi_{\ell+1}^k)$.

DÉFINITION. Le *complexe de Morse* de $f$ est le complexe cellulaire $(M_*^f, \partial_*)$, défini comme suit :

- l'espace $M_k^f$ des chaînes de dimension $k$ est l'espace des combinaisons linéaires formelles sur $\mathbf{Q}$ des points critiques d'indice $k$ de $f$ :

$$M_k^f := \left\{ \sum_{\ell=1}^{\#(k)} \alpha_\ell \ \xi_\ell^k \ \middle| \ \alpha_\ell \in \mathbf{Q} \right\} \simeq \mathbf{Q}^{\#(k)} ;$$

- l'opérateur de bord[2]) est l'application linéaire $\partial\colon M_k^f \to M_{k-1}^f$ définie par la formule

$$\partial\xi_\ell^k := \sum_{m=1}^{\#(k-1)} [\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}]\, \xi_m^{k-1}\,.$$

REMARQUE. D'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, l'espace $E/E^{-\infty}$ est un espace cellulaire, homotopiquement équivalent au complexe cellulaire $(M_*^f, \partial_*)$. Il s'ensuit que

$$\widetilde{H}_*(M_*^f, \partial_*) \simeq \widetilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \widetilde{H}_*(E, E^{-\infty})\,,$$

où $\widetilde{H}_*$ dénote le complexe d'homologie réduite à valeurs dans $\mathbf{Q}$.

En suivant une idée de Cerf ([Cer]), S. A. Barannikov a montré que l'on peut "diagonaliser" les complexes de Morse. C'est pour rendre possible cette diagonalisation que l'on a défini le complexe de Morse sur $\mathbf{Q}$, bien que le complexe originel soit à coefficients entiers.

LEMME ALGÉBRIQUE ([Bar]). *Dans chaque $M_k^f$ il existe un changement de générateurs, représenté par une matrice triangulaire supérieure inversible de dimension $\#(k)$, qui met le complexe de Morse sous forme canonique, c'est-à-dire que les nouveaux générateurs (ordonnés) $\{\Xi_\ell^k\}_{\ell,k}$ ($\ell = 1,\dots,\#(k)$, $k = 1,\dots,K$) vérifient*

(1) $$\partial\Xi_\ell^k = 0 \quad \text{ou} \quad \partial\Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}\,.$$

*Démonstration.* Par récurrence: supposons que les générateurs $\Xi_j^h$ soient du type (1) pour $h = k$ et $j \le \ell$, et pour $h < k$ et $j \in \{1,\dots,\#(h-1)\}$. Soit $Q$ l'ensemble des indices $q$ tels que $\Xi_q^{k-1} = \partial\Xi_{q^*}^k$ pour quelque $q^* \le j$, et $P := \{1,\dots,\#(k-1)\} \setminus Q$. L'égalité $\partial\xi_{j+1}^k = \sum_{m=1}^{\#(k-1)} \alpha_m \Xi_m^{k-1}$ s'écrit donc

$$\partial\Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\Xi_{q^*}^k\Big) = \sum_{p\in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}\,.$$

Si $\alpha_p = 0$ pour tout $p \in P$, le générateur $\Xi_{j+1}^k := \xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\xi_{q^*}^k$ est canonique, en effet $\partial\Xi_{j+1}^k = 0$. Sinon, soit $p_0$ le plus grand indice dans $P$ tel que $\alpha_{p_0} \neq 0$ :

(2) $$\partial\Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q\in Q} \alpha_{q^*}\Xi_{q^*}^k\Big) = \alpha_{p_0}\Xi_{p_0}^{k-1} + \sum_{p_0 > p\in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}\,.$$

2) Pour la démonstration du fait que $\partial^2 = 0$, voir [DNF], vol. III, §4.

Remplaçons le générateur $\Xi_{p_0}^{k-1}$ par $\widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$, qui est encore de la forme (1), car $\partial \widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial \Xi_{p_0}^{k-1} = 0$. L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}} \, \partial\Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k\Big) = \widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} \, ;$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}} \, \Big(\xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k\Big)$$

vérifie $\partial \Xi_{j+1}^k = \widetilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$. □

REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces $M_k^f$ on peut définir un autre opérateur de bord $\delta \colon M_k^f \to M_{k-1}^f$ par la formule

$$\delta \xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1}) \; \xi_m^{k-1} \, ,$$

où $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$ est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs $Y := -\nabla f / |\nabla f|^2$ de $\xi_\ell^k$ à $\xi_m^{k-1}$. Puisque l'attachement des cellules $\sigma_\ell^k$ est induit par la rétraction des espaces $E^\lambda$ le long des trajectoires intégrales de $Y$, on a $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de $Y$ entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes $(M_*^f, \partial_*)$ et $(M_*^f, \delta_*)$ ont la même forme canonique.

## 1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit $(M_*^f, \partial_*)$ le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente $f \colon E = \mathbf{R}^K \to \mathbf{R}$. A chaque point critique $\xi_\ell^k$ correspond le générateur $\Xi_\ell^k$, c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j \leq \ell} \alpha_j \; \xi_j^k \; , \qquad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0 \, .$$

DÉFINITION. On dit que deux points critiques $\xi_\ell^k$ et $\xi_m^{k-1}$ de $f$ sont *incidents* si $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$, *liés* si $\partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$. Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.