

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 49 (2003)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES SOLUTIONS DE MINIMAX POUR L'ÉQUATION DE HAMILTON-JACOBI  
**Autor:** Capitanio, Gianmarco  
**Kapitel:** 1.1 Préliminaires  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-66676>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 1. MINIMAX D'UNE FONCTION QUADRATIQUE À L'INFINI

## 1.1 PRÉLIMINAIRES

Soient  $X$  un espace topologique,  $D^n$  un disque de dimension  $n$ , orienté, et  $\psi: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X$  une application. On considère sur  $\mathbf{S}^{n-1} = \partial D^n$  l'orientation induite. On appelle *cellule* de dimension  $n$  le couple  $\sigma^n := (D^n, \psi)$ . L'espace que l'on construit en identifiant chaque point  $x$  de  $\mathbf{S}^{n-1}$  au point  $\psi(x)$  est obtenu *en attachant à  $X$  la cellule  $\sigma^n$* ; on le note  $X \cup \sigma^n$  ou bien  $X \cup_\psi D^n$ .

Un espace est dit *cellulaire* s'il est obtenu par l'attachement de cellules (un nombre fini pour chaque dimension) à un nombre fini de points (cellules de dimension 0). Un espace cellulaire  $X$  est un *complexe cellulaire* si chaque cellule est attachée à une cellule de dimension plus petite.

Il est bien connu que tout espace cellulaire est homotopiquement équivalent à un complexe cellulaire, voir par exemple [DNF], vol. III, §4.

Soit  $X$  un complexe cellulaire. La réunion des cellules de dimension  $k \leq n$  est appelée *squelette cellulaire* de dimension  $n$ , que l'on note  $X^n$ . On a alors la suite des squelettes emboîtés

$$X^0 \subset \dots \subset X^k \subset \dots \subset X.$$

L'espace quotient  $X^{k-1}/X^{k-2}$ , où  $X^{k-2}$  est identifié à un point, est un bouquet de sphères de dimension  $k-1$ . Considérons une cellule  $\sigma^k = (D^k, \psi)$  et l'application

$$\tilde{\psi}_i: \partial D^k = \mathbf{S}^{k-1} \xrightarrow{\psi} X^{k-1} \xrightarrow{Id} X^{k-1}/X^{k-2} \xrightarrow{\pi_i} \mathbf{S}_i^{k-1},$$

où  $\pi_i$  est la projection sur la  $i$ -ème sphère du bouquet. Soit  $\sigma_i^{k-1}$  la cellule de  $X$  correspondant à la sphère  $\mathbf{S}_i^{k-1}$ .

**DÉFINITION.** On appelle *coefficient d'incidence* du couple de cellules  $\sigma^k, \sigma_i^{k-1}$  le nombre entier

$$[\sigma^k : \sigma_i^{k-1}] := \deg(\tilde{\psi}_i).$$

Soient  $E = \mathbf{R}^K$  et  $f: E \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de Morse excellente<sup>1)</sup>, avec un nombre fini de points critiques. D'après le lemme de Morse, autour d'un point

<sup>1)</sup> Une fonction est *de Morse* si ses points critiques sont tous non dégénérés, *excellente* si les valeurs critiques sont toutes distinctes.

critique  $\bar{\xi}$  de  $f$ , il existe un système de coordonnées  $\{\xi_1, \dots, \xi_K\}$  tel que :

$$f(\xi_1, \dots, \xi_K) = f(\bar{\xi}) - \xi_1^2 - \dots - \xi_k^2 + \xi_{k+1}^2 + \dots + \xi_K^2.$$

Le nombre  $k$ , dénoté par  $\text{ind}(\bar{\xi})$ , est l'*indice* du point critique  $\bar{\xi}$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  on note

$$E_f^\lambda = E^\lambda := \{\xi \in E \mid f(\xi) \leq \lambda\}.$$

**THÉORÈME 1.1** ([Mil]). *Si l'intervalle  $[a, b]$  ne contient aucune valeur critique de  $f$ , alors  $E^b$  et  $E^a$  sont difféomorphes.*

**THÉORÈME 1.2** ([Mil]). *Soient  $c$  la seule valeur critique dans l'intervalle  $[c - \epsilon, c + \epsilon]$  et  $\bar{\xi}$  le point critique correspondant, d'indice  $\text{ind}(\bar{\xi}) = i$ . Alors  $E^{c+\epsilon}$  et  $E^c$  se rétractent sur l'espace  $E^{c-\epsilon} \cup \sigma^i$  que l'on obtient de  $E^{c-\epsilon}$  en attachant à son bord une cellule  $\sigma^i = (D^i, \psi)$  de dimension  $i$ .*

Pour  $\xi, \eta$  points critiques de  $f$ , tels que  $\text{ind}(\xi) - \text{ind}(\eta) = 1$ , on note  $[\xi : \eta]$  l'indice d'incidence des cellules correspondantes.

**REMARQUE.** Les Théorèmes 1.1 et 1.2 sont vrais pour toute fonction de Morse excellente, dès que le champ gradient est défini et intégrable; par exemple si la condition de Palais-Smale est vérifiée: toute suite  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  telle que  $\nabla f(\xi_n) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$  et  $\{f(\xi_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée, admet une sous-suite convergente.

Soit  $b > 0$  un nombre réel assez grand pour que l'intervalle  $] -b, b[$  contienne toutes les valeurs critiques de  $f$ . On déduit du Théorème 1.1 que  $E^\lambda \simeq E^{-b}$  pour  $\lambda \leq -b$  et  $E^\lambda \simeq E^b$  pour  $\lambda \geq b$ . On note alors  $E^{\pm\infty} := E^{\pm b}$ .

Soit  $\{\xi_1^k, \dots, \xi_{\#(k)}^k\}$  l'ensemble des points critiques d'indice  $k$  de  $f$ , ordonnés selon leur valeur critique:  $f(\xi_\ell^k) < f(\xi_{\ell+1}^k)$ .

**DÉFINITION.** Le *complexe de Morse* de  $f$  est le complexe cellulaire  $(M_*^f, \partial_*)$ , défini comme suit:

- l'espace  $M_k^f$  des chaînes de dimension  $k$  est l'espace des combinaisons linéaires formelles sur  $\mathbf{Q}$  des points critiques d'indice  $k$  de  $f$ :

$$M_k^f := \left\{ \sum_{\ell=1}^{\#(k)} \alpha_\ell \xi_\ell^k \mid \alpha_\ell \in \mathbf{Q} \right\} \simeq \mathbf{Q}^{\#(k)};$$

- l'opérateur de bord<sup>2)</sup> est l'application linéaire  $\partial: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  définie par la formule

$$\partial \xi_\ell^k := \sum_{m=1}^{\#(k-1)} [\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \xi_m^{k-1}.$$

REMARQUE. D'après les Théorèmes 1.1 et 1.2, l'espace  $E/E^{-\infty}$  est un espace cellulaire, homotopiquement équivalent au complexe cellulaire  $(M_*^f, \partial_*)$ . Il s'ensuit que

$$\tilde{H}_*(M_*^f, \partial_*) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}),$$

où  $\tilde{H}_*$  dénote le complexe d'homologie réduite à valeurs dans  $\mathbf{Q}$ .

En suivant une idée de Cerf ([Cer]), S. A. Barannikov a montré que l'on peut "diagonaliser" les complexes de Morse. C'est pour rendre possible cette diagonalisation que l'on a défini le complexe de Morse sur  $\mathbf{Q}$ , bien que le complexe originel soit à coefficients entiers.

LEMME ALGÈBRE ([Bar]). *Dans chaque  $M_k^f$  il existe un changement de générateurs, représenté par une matrice triangulaire supérieure inversible de dimension  $\#(k)$ , qui met le complexe de Morse sous forme canonique, c'est-à-dire que les nouveaux générateurs (ordonnés)  $\{\Xi_\ell^k\}_{\ell,k}$  ( $\ell = 1, \dots, \#(k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ ) vérifient*

$$(1) \quad \partial \Xi_\ell^k = 0 \quad \text{ou} \quad \partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}.$$

*Démonstration.* Par récurrence: supposons que les générateurs  $\Xi_j^h$  soient du type (1) pour  $h = k$  et  $j \leq \ell$ , et pour  $h < k$  et  $j \in \{1, \dots, \#(h-1)\}$ . Soit  $Q$  l'ensemble des indices  $q$  tels que  $\Xi_q^{k-1} = \partial \Xi_{q^*}^k$  pour quelque  $q^* \leq j$ , et  $P := \{1, \dots, \#(k-1)\} \setminus Q$ . L'égalité  $\partial \xi_{j+1}^k = \sum_{m=1}^{\#(k-1)} \alpha_m \xi_m^{k-1}$  s'écrit donc

$$\partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \sum_{p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

Si  $\alpha_p = 0$  pour tout  $p \in P$ , le générateur  $\Xi_{j+1}^k := \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k$  est canonique, en effet  $\partial \Xi_{j+1}^k = 0$ . Sinon, soit  $p_0$  le plus grand indice dans  $P$  tel que  $\alpha_{p_0} \neq 0$ :

$$(2) \quad \partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \alpha_{p_0} \Xi_{p_0}^{k-1} + \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}.$$

<sup>2)</sup> Pour la démonstration du fait que  $\partial^2 = 0$ , voir [DNF], vol. III, §4.

Remplaçons le générateur  $\Xi_{p_0}^{k-1}$  par  $\tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$ , qui est encore de la forme (1), car  $\partial \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial \Xi_{p_0}^{k-1} = 0$ . L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}} \partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1};$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}} \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right)$$

vérifie  $\partial \Xi_{j+1}^k = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$ .  $\square$

#### REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces  $M_k^f$  on peut définir un autre opérateur de bord  $\delta: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  par la formule

$$\delta \xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1}) \xi_m^{k-1},$$

où  $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs  $Y := -\nabla f / |\nabla f|^2$  de  $\xi_\ell^k$  à  $\xi_m^{k-1}$ . Puisque l'attachement des cellules  $\sigma_\ell^k$  est induit par la rétraction des espaces  $E^\lambda$  le long des trajectoires intégrales de  $Y$ , on a  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de  $Y$  entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes  $(M_*^f, \partial_*)$  et  $(M_*^f, \delta_*)$  ont la même forme canonique.

## 1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit  $(M_*^f, \partial_*)$  le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$ . A chaque point critique  $\xi_\ell^k$  correspond le générateur  $\Xi_\ell^k$ , c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j \leq \ell} \alpha_j \xi_j^k, \quad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0.$$

**DÉFINITION.** On dit que deux points critiques  $\xi_\ell^k$  et  $\xi_m^{k-1}$  de  $f$  sont *incidents* si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ , *liés* si  $\partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$ . Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.